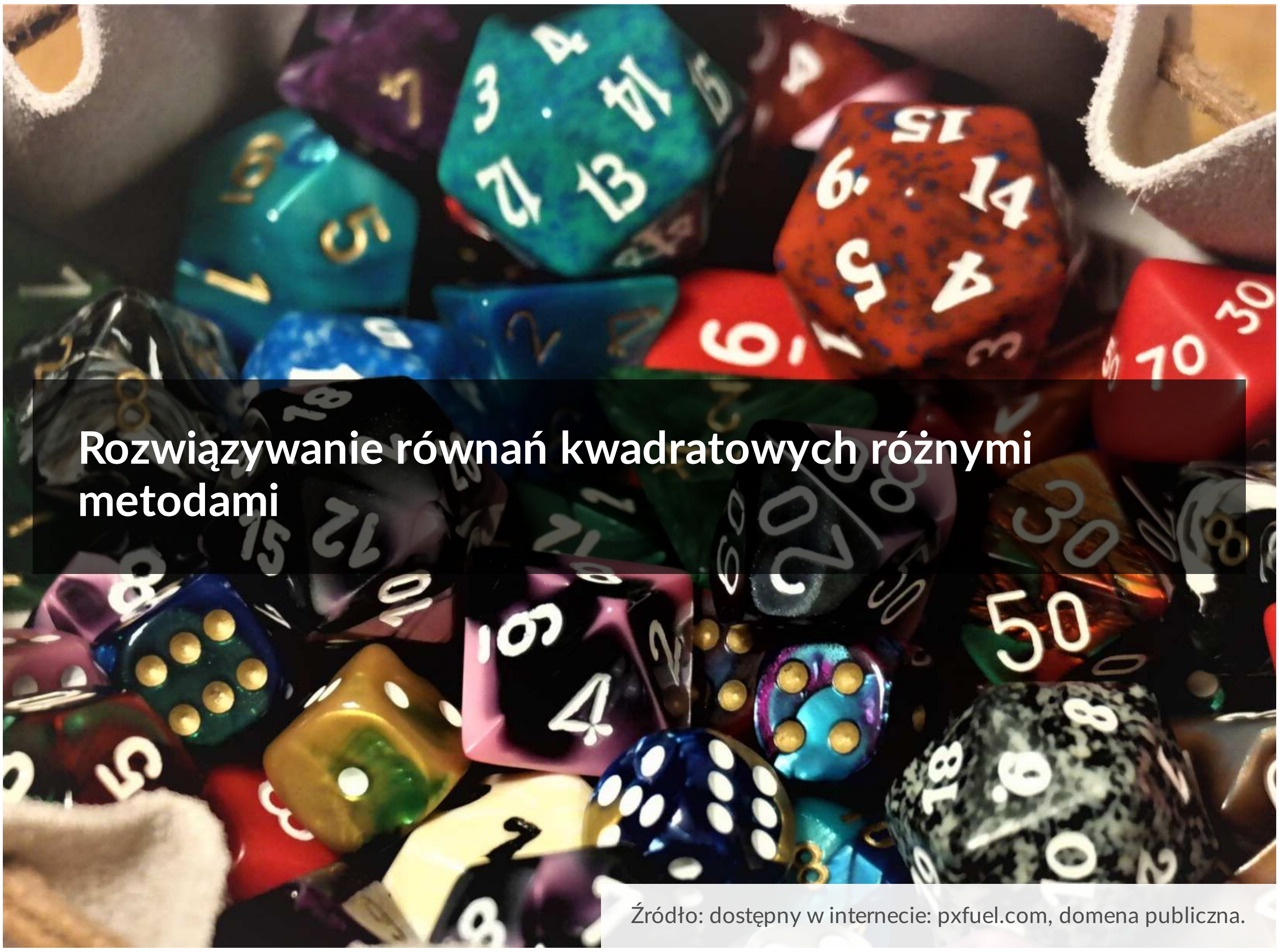
Rozwiązywanie równań kwadratowych różnymi metodami

Rozwiązywanie równań kwadratowych różnymi metodami



Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Rozwiązanie równania kwadratowego polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego, zwanego deltą, oraz skorzystaniu ze wzorów na pierwiastki równania. Można również rozwiązywać równania kwadratowe metodą rozkładania na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia lub grupowanie wyrazów.

W tym materiale będziemy wykorzystywać metody rozwiązywania równań kwadratowych do bardziej skomplikowanych przykładów, układów równań kwadratowych oraz zadań z parametrami.

Twoje cele

- Rozwiążesz równanie kwadratowe różnymi metodami.
- Określisz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m.
- Obliczysz współczynniki równania o danej liczbie rozwiązań.
- Wyznaczysz wartości parametrów tak, aby równania posiadały ten sam zbiór rozwiązań.

Przeczytaj

Równanie kwadratowe – jest to równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Postać $ax^2 + bx + c = 0$ gdy $a \neq 0$ nazywamy **postacią ogólną równania kwadratowego**.

Równanie kwadratowe najczęściej rozwiązuje się obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego, zwany deltą.

> **Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego**
>
> Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
>
> 1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
> 2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek, nazwany podwójnym pierwiastkiem $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
> 3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Równanie kwadratowe możemy rozwiązywać również metodą rozkładania na czynniki poprzez wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia lub grupowanie wyrażeń.

> **Przykład 1**
>
> Określimy liczbę niewymiernych pierwiastków równania $\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{2} = 0$.
>
> Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego.
>
> $\Delta = b^2 - 4ac$
>
> $\Delta = \left(4\right)^2 - 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 16 - 4\sqrt{6}$
>
> Ponieważ $\Delta > 0$ zatem równanie ma dwa rozwiązania.
>
> Ale $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16 - 4\sqrt{6}}$ jest liczbą niewymierną, zatem równanie ma dwa pierwiastki niewymierne.

> **Przykład 2**
>
> Wyznaczymy taką wartość parametru z, aby liczba $x_0 = -1$ spełniała równanie $-4x^2 + \left(z^2 - 3\right)x + 2z^2 + 4z + 1 = 0$.
>
> Ponieważ -1 jest pierwiastkiem równania, więc możemy zapisać zależność:

$-4(-1)^2 + (z^2 - 3)(-1) + 2z^2 + 4z + 1 = 0.$

$-4 - z^2 + 3 + 2z^2 + 4z + 1 = 0$

$z^2 + 4z = 0$

$z(z + 4) = 0$

$z = 0$ lub $(z + 4) = 0$

$z = 0$ lub $z = -4$

Aby rozwiązaniem równania była liczba -1 $\quad z = -4,\ z = 0.$

Przykład 3

Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 5x - 2$. Rozwiążemy równanie $f(x-1) = 1 - f(2-x)$.

Zapiszemy równanie:

$(x-1)^2 - 5(x-1) - 2 = 1 - [(2-x)^2 - 5(2-x) - 2].$

$x^2 - 2x + 1 - 5x + 5 - 2 = 1 - (4 - 4x + x^2 - 10 + 5x - 2)$

$x^2 - 7x + 4 = 1 - (x^2 + x - 8)$

$x^2 - 7x + 4 = 1 - x^2 - x + 8$

$2x^2 - 6x - 5 = 0$

$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 36 + 40 = 76$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{19}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{6-2\sqrt{19}}{4}$

$x_1 = \frac{3-\sqrt{19}}{2}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{6+2\sqrt{19}}{4}$

$x_2 = \frac{3+\sqrt{19}}{2}$

Rozwiązaniem równania są liczby $x = \frac{3-\sqrt{19}}{2},\ x = \frac{3+\sqrt{19}}{2}$.

Przykład 4

Podamy przyklad takich liczb a i b, aby równania $x^2 + 2x - 3 = 0$ i $|x - a| = b$ posiadały taki sam zbiór rozwiązań.

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem pierwszego równania, które rozwiążemy korzystając z własności wartości bezwzględnej.

$x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$

$(x + 1)^2 = 4$

$\sqrt{(x + 1)^2} = 2$

$|x + 1| = 2$

Uwzględniając równanie $|x - a| = b$ możemy powiedzieć, że $a = -1$ i $b = 2$.

Aby równania posiadały taki sam zbiór rozwiązań $a = -1$ i $b = 2$.

Przykład 5

Obliczymy taką wartość parametru a, aby równanie $(x + a) + 6(x + a)^2 = 0$ miało podwójny pierwiastek.

$(x + a) + 6(x + a)^2 = 0$

$(x + a)[1 + 6(x + a)] = 0$

$(x + a)(6\,x + 6\,a + 1) = 0$

$(x + a) = 0$ lub $(6x + 6a + 1) = 0$

$x = -a$ lub $x = \frac{-6a-1}{6}$

Aby równanie miało podwójny pierwiastek musi zachodzić warunek $-a = \frac{-6a-1}{6}$.

$6a = 6a + 1$

$0 = 1$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne. Zatem nie istnieje taka wartość parametru a, dla której równanie ma podwójny pierwiastek.

Słownik

liczba spełniająca równanie

liczba, po podstawieniu której w miejsce niewiadomej otrzymamy równość prawdziwą

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym pokazującym sposób obliczania pierwiastków równania kwadratowego w zależności od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D19V5sfKN

Polecenie 2

Rozwiąż równania, wpisując współczynniki trójmianu kwadratowego do schematu blokowego. Czy potrafisz sformułować wniosek dotyczący liczby pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ w zależności od znaku iloczynu współczynników a i c?

a) $2x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $2x^2 + 5x + 1 = 0$

d) $2x^2 + 5x - 1 = 0$

e) $-3x^2 + x - 2 = 0$

f) $3x^2 + x - 2 = 0$

Polecenie 3

Stwórz algorytm obliczający pierwiastki równania kwadratowego postaci $ax^2 + bx + c = 0$, w zależności od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązywanie równań kwadratowych różnymi metodami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy.

Uczeń:

4. rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie kwadratowe różnymi metodami,
- określa liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru m,
- oblicza współczynniki równania o danej liczbie rozwiązań,
- wyznacza wartości parametrów tak, aby równania posiadały ten sam zbiór rozwiązań,
- dobiera model do określonej sytuacji.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku,
- dyskusja,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają metody rozkładania na czynniki trójmianu kwadratowego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o samodzielne rozwiązanie przykładów z sekcji Przeczytaj.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują wyniki. Tworzą wspólny plakat ilustrujący sposoby rozwiązania zadań.
3. Uczniowie zapoznają się ze schematem interaktywnym i omawiają go wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań kwadratowych różnymi metodami.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

- Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystany przez chętnych uczniów do samodzielnego przygotowania prezentacji pokazującej sposoby rozwiązywania równań kwadratowych różnymi metodami.