Mnożenie wyrażeń wymiernych

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com.

Mnożąc dwa ułamki zwykłe obliczamy iloczyn liczników oraz iloczyn mianowników. Jeżeli zauważymy wspólny dzielnik, możemy przed mnożeniem dokonać skracania.
Ułamki algebraiczne będziemy mnożyć na tej samej zasadzie.

Aby opanować materiał z bieżącej lekcji, potrzebnych będzie kilka umiejętności:

- rozkład wielomianów na czynniki;
- mnożenie wielomianów;
- skracanie ułamków algebraicznych.

Twoje cele

- Zastosujesz wiadomości z zakresu wielomianów o rozkładaniu na czynniki do zapisania licznika i mianownika w postaci iloczynowej.
- Ocenisz, czy możliwe jest skracanie ułamków dla uzyskania prostszej postaci.
- Wykonasz mnożenie tak zapisanych ułamków.
- Sformułujesz warunki, przy których wykonanie podanych działań jest możliwe (określisz założenia).

Przeczytaj

Reguła: Mnożenie wyrażeń wymiernych

Aby pomnożyć dwa wyrażenia wymierne, należy wykonać opisane poniżej operacje.

1. Jeśli to możliwe, możemy sprowadzić liczniki i mianowniki do postaci iloczynowej.
2. Jeżeli w licznikach i mianownikach występują wspólne czynniki, możemy je skrócić (czynnik z licznika z takim samym czynnikiem z mianownika tego samego lub drugiego ułamka).
3. Mnożymy wyrażenia, mnożąc licznik przez licznik i mianownik przez mianownik:

$$\frac{F(x)}{P(x)} \cdot \frac{G(x)}{Q(x)} = \frac{F(x) \cdot G(x)}{P(x) \cdot Q(x)}.$$

4. Podajemy założenia wynikające z tego, że mianowniki ułamków (również przed ewentualnym skracaniem) nie mogą przyjmować wartości 0.

Przykład 1

Obliczmy iloczyn $\frac{x-2}{x-3} \cdot \frac{x-4}{x-5}$.

- W tym przykładzie ułamków nie da się skrócić, więc wymnażamy licznik przez licznik oraz mianownik przez mianownik.

  $\frac{x-2}{x-3} \cdot \frac{x-4}{x-5} = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-5)}$

- W zależności od potrzeb wynik mnożenia wyrażeń wymiernych można oczywiście przedstawić w innej postaci, np.:

  $\frac{x^2-6x+8}{(x-3)(x-5)}$ lub $\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+15}$.

- Dziedzina: $x \in \mathbb{R} \setminus \{3; 5\}$.

Przykład 2

Obliczmy $\frac{x^2-2x}{x^2+3x} \cdot \frac{x+3}{x+2}$.

- Tam, gdzie to możliwe, zapiszmy wielomiany w postaci iloczynu.
- $\frac{x^2-2x}{x^2+3x} \cdot \frac{x+3}{x+2} =$

  $= \frac{x(x-2)}{x(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x+2} = (i)$

- Możemy teraz dokonać skrócenia przez x oraz przez $x+3$.

$(i) = \frac{x^2-2x}{x^2+3x} \cdot \frac{x+3}{x+2} =$

$= \frac{\cancel{x}(x-2)}{\cancel{x}\,\cancel{(x+3)}} \cdot \frac{\cancel{x+3}}{x+2} =$

$= \frac{x-2}{1} \cdot \frac{1}{x+2} =$

$= \frac{x-2}{x+2}$

- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 0\}$

  Pamiętajmy, żeby przy określaniu założeń uwzględnić istnienie wszystkich ułamków, również w postaci przed skracaniem.

Przykład 3

Obliczmy $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-3}$.

- Zapiszmy na początek wszystkie wielomiany w postaci iloczynowej. Następnie wykonajmy wszystkie możliwe skrócenia.
- $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-3} =$

  $= \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{(x+3)(x-4)}{(x-3)(x+1)} =$

  $= \frac{\cancel{(x-3)}\,\cancel{(x+2)}}{(x+1)\,\cancel{(x+2)}} \cdot \frac{(x+3)(x-4)}{\cancel{(x-3)}\,(x+1)} =$

  $= \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)^2}$
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 3\}$
- Możemy oczywiście, jeśli z jakiegoś powodu będzie to potrzebne, zapisać wynik w innej postaci. Przykładowo – jeżeli przemnożymy ułamki bez wcześniejszego skracania, uzyskamy:

  $\frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-3} =$

  $= \frac{x^4-2x^3-17x^2+18x+72}{x^4+x^3-7x^2-13x-6}$

  przy podanych wyżej założeniach.

Przykład 4

Obliczmy $\left(x^2 - 8x + 16\right) \cdot \frac{5x}{x^2-16}$.

- Postępujemy analogicznie jak poprzednio. Pamiętajmy, że

  $\left(x^2 - 8x + 16\right) = \frac{x^2-8x+16}{1}$.

Nie musimy sztucznie tworzyć tego ułamka, ale ważne, żebyśmy na przykład przy skracaniu wyrażenie $\left(x^2-8x+16\right)$ traktowali jako znajdujące się w liczniku.

- $\left(x^2-8x+16\right)\cdot\frac{5x}{x^2-16}=$

  $=(x-4)^2\cdot\frac{5x}{(x-4)(x+4)}=$

  $=(x-4)^{\cancel{2}}\cdot\frac{5x}{\cancel{(x-4)}\,(x+4)}=$

  $=\frac{5x(x-4)}{x+4}$

- $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4;4\}$

Przykład 5

Obliczmy $\frac{3x^2-12}{x^3-8}\cdot\frac{5x^2+10x+20}{x^2+4x+4}$.

- Rozkładamy wielomiany na czynniki. Zauważmy, że wielomian x^2+2x+4 jest nierozkładalny.

- $\frac{3x^2-12}{x^3-8}\cdot\frac{5x^2+10x+20}{x^2+4x+4}=$

  $=\frac{3(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\cdot\frac{5\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)^2}=$

  $=\frac{3\,\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x^2+2x+4)}}\cdot\frac{5\,\cancel{\left(x^2+2x+4\right)}}{(x+2)^{\cancel{2}}}=$

  $=\frac{15}{x+2}$

- $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

Słownik

wyrażenie wymierne

zmiennej rzeczywistej x to wyrażenie algebraiczne postaci $\frac{P(x)}{Q(x)}$, w którym $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym;

dziedzina wyrażenia wymiernego

zbiór liczb, dla których wyrażenie wymierne ma sens liczbowy

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Do7zb2nvN

Polecenie 2

Oblicz $\frac{4x-12}{x^2-6x+9} \cdot \frac{x^2+2x-15}{6x^2-150}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Polecenie 3

Oblicz $\frac{x^2-5x-6}{4x-24} \cdot \frac{6x-6}{x^2-1}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Polecenie 4

Oblicz $\frac{15x^2-4x-4}{9x^2-4} \cdot \frac{x^2-x-12}{25x^2-4}$.

Pamiętaj o skracaniu.

Określ dziedzinę.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Mnożenie wyrażeń wymiernych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wiadomości z zakresu wielomianów o rozkładaniu na czynniki do zapisania licznika i mianownika w postaci iloczynowej,
- skraca ułamki dla uzyskania prostszej postaci wyrażenia wymiernego.
- mnoży wyrażenia wymierne w postaci ułamków.
- formułuje warunki, przy których mnożenie wyrażeń wymiernych jest możliwe.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda stolików eksperckich.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów, aby w domu przypomnieli sobie mnożenienie ułamków zwykłych, wzory skrócongo mnożenia oraz mnożenie i dodawanie wielomianów.

Faza wstępna:

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Uczniowie przypominają prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania i przytaczają przykłady jego wykorzystania. Przypominają też pojęcia związane z wyrażeniami algebraicznymi i sposób dodawania/odejmowania wyrażeń algebraicznych.

Faza realizacyjna:

Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj"). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.

Uczniowie pracują w parach, rozwiązują na przemian przykłady z ćwiczeń interaktywnych.

Faza podsumowująca:

Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują polecenia w sekcji „Gra edukacyjna".

Materiały pomocnicze:

Wskazówki metodyczne:

Gra edukacyjna może posłużyć powtórzeniu materiału przed kartkówką.
Grę można również wykorzystać jako ćwiczenie wstępne do tematu rozwiązywanie równań wymiernych