



## Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (rzuty kostką)

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (rzuty kostką)

Źródło: dostępny w internecie: [pxhere.com](https://pxhere.com), domena publiczna.

Bywa, że kiedy jesteśmy zdecydowani na podjęcie jakiejś ważnej decyzji przywołujemy słowa wypowiedziane przez Juliusza Cezara, który podczas przekraczania Rubikonu miał powiedzieć (o czym zaświadcza Swetoniusz) „alea iacta est”, czyli: „kości zostały rzucone”.

Kości to jedno z najstarszych znanych człowiekowi narzędzi. Służyły jako przyrządy do przepowiadania przyszłości, czym zazwyczaj trudnili się wróżbici. W starożytności używano do tego celu kostek skokowych pochodzących od zwierząt hodowlanych – były to tzw. astragale.

Równie często kostek używano do gier hazardowych, które zajmowały ludzi od najdawniejszych czasów. Kostki o sześciennym kształcie i niewątpliwie hazardowym przeznaczeniu znaleźli archeolodzy prowadzący wykopaliska w Chinach – to odkrycie datowane jest na VII–VI wiek p.n.e.

Wśród bardziej nam współczesnych hazardzistów zdarzali się i tacy, którzy przy okazji gry w kości zadawali sobie pytania dotyczące szans na wygraną.

Kilkoma problemami, dotyczącymi spodziewanych wyników w rzutach sześciennymi kostkami do gry, podzielił się z Błażem Pascalem, znakomitym francuskim matematykiem, pisarz–hazardzista Antoine Gombaud, znany jako Kawaler de Méré. Pascal swoje wnioski na zadane tematy konsultował z Pierre’em de Fermatem. Powstała w ten sposób

korespondencja dała, jak się obecnie uważa, metodyczne podstawy rachunku prawdopodobieństwa.

W prezentowanych w tej lekcji przykładach omówimy zadania dotyczące rozkładu wyników w rzutach sześciennymi kostkami, m.in. omówimy jeden z problemów Kawalera de Mére.

### **Twoje cele**

- Nauczysz się, jak rozwiązywać zadania, w których wyniki rzutu kostkami do gry spełniają jednocześnie kilka warunków,
- Będziesz doskonalić umiejętności dotyczące budowania modelu matematycznego w zadaniach dotyczących rzutu symetrycznymi kostkami do gry,
- Znajomość poznanych wcześniej reguł kombinatorycznych pozwoli Ci obliczać, ile jest wyników w doświadczeniach polegających na rzucie kostkami do gry,
- Zapoznasz się z rozwiązaniem zadania znanego jako problem Kawalera de Mére.

# Przeczytaj

---

Kawaler de Méré obstawiając wyniki w rzucie trzema sześciennymi kostkami do gry był przekonany, że suma oczek na wszystkich kostkach równa 11 pojawia się z taką samą częstością, jak suma oczek równa 12.

Zauważył mianowicie, że:

- sumę oczek równą 11 można otrzymać sześcioma sposobami:  
 $11 = 1 + 4 + 6 = 1 + 5 + 5 = 2 + 4 + 5 = 2 + 3 + 6 = 3 + 4 + 4 = 3 + 3 + 5,$
- sumę oczek równą 12 również można otrzymać sześcioma sposobami:  
 $12 = 1 + 5 + 6 = 2 + 5 + 5 = 2 + 4 + 6 = 3 + 3 + 6 = 3 + 4 + 5 = 4 + 4 + 4.$

Tymczasem praktyka pokazywała, że suma oczek równa 11 wypada częściej niż suma oczek równa 12.

## Przykład 1

Rozpatrzmy więc rzut trzema kostkami, z których każda ma inny kolor. Obliczmy, ile jest wszystkich możliwych wyników, w których suma oczek uzyskanych na wszystkich trzech kostkach jest równa:

- a) 11,
- b) 12.

## Rozwiązanie

Przypuśćmy, że kostki są w kolorach białym, żółtym oraz niebieskim. Oznaczmy liczby oczek, które wypadły na kostkach białej, żółtej i niebieskiej przez, odpowiednio,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ .

Wynik rzutu tymi trzema kostkami zapiszemy jako trzelementowy ciąg  $(w_1, w_2, w_3)$ , gdzie  $w_1, w_2, w_3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Wtedy:

(1) jeśli wyrzucone liczby oczek na kostkach są parami różne, to wyników jest tyle, ile [permutacji](#) zbioru trzelementowego, czyli  $3! = 6$ .

Jest tak w każdym z poniższych przypadków:

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{1, 4, 6\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{2, 3, 6\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{2, 4, 5\}$$

(zatem w przypadku trzech różnych wyników dla sumy równej 11 mamy

$$3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18 \text{ wyników},$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{1, 5, 6\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{2, 4, 6\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{3, 4, 5\}$$

(zatem w przypadku trzech różnych wyników dla sumy równej 12 mamy również  $3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$  wyników),

(2) jeśli wśród liczb oczek wyrzuconych na kostkach dokładnie dwie się powtarzają, to kolory kostek dla nich wybierzemy na  $\binom{3}{2} = 3$  sposoby, a trzeciemu przyporządkujemy kostkę różną od tych dwóch.

Oznacza to, że 3 możliwe wyniki są w każdym z poniższych przypadków:

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{1, 5, 5\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{3, 3, 5\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{3, 4, 4\}$$

(zatem dla sumy równej 11 mamy tym razem  $3 \cdot 3 = 9$  wyników),

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{2, 5, 5\}$$

$$\{w_1, w_2, w_3\} = \{3, 3, 6\}$$

(zatem dla sumy równej 12 mamy tym razem  $3 \cdot 2 = 6$  wyników),

(3) jeśli wszystkie wyrzucone liczby oczek są takie same, to sprzyja mu jeden możliwy wynik rzutu trzema kostkami; tak jest w przypadku, gdy  $\{w_1, w_2, w_3\} = \{4, 4, 4\}$  – wtedy suma oczek jest równa 12).

Wynika stąd, że:

a) jest  $3 \cdot 3! + 3 \cdot 3 = 27$  możliwych wyników, w których suma oczek jest równa 11,

b) jest  $3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 + 1 = 25$  możliwych wyników, w których suma oczek jest równa 12.

### Uwaga:

W praktyce szkolnej przy rozpatrywaniu zdarzenia związanego z rzutem kilkoma kostkami do gry zazwyczaj podaje się informację, że kostki są rozróżnialne np. kolorem. Kawaler de Méré obstawiał wyniki rzutów trzema nierozróżnialnymi kostkami. Był więc przekonany, że skoro obie interesujące go sumy oczek da się przedstawić na 6 sposobów, to i szanse na uzyskanie tych sum są równe. A jednak okazało się, że ważne są nie tylko rozkłady sum oczek, ale i kostki, do których są one przypisane.

### Przykład 2

Obliczymy, ile jest wszystkich możliwych wyników siedmiokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadło jedno oczko i dokładnie trzy razy wypadło sześć oczek.

### Rozwiązanie:

Wynik siedmiokrotnego rzutu kostką zapiszemy jako siedmioelementowy ciąg  $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7)$  wyników kolejnych rzutów, gdzie  $w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dla  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

Zliczanie wszystkich możliwych wyników przeprowadzimy w trzech kolejnych etapach:

(1) spośród wszystkich rzutów wybór dwóch takich, w których wypadło po jednym oczku;

ponieważ wybieramy dwa elementy z siedmioelementowego zbioru

$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7)$ , więc w tym przypadku możliwości jest tyle, ile jest dwuelementowych **kombinacji** zbioru siedmioelementowego, czyli  $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ ,

(2) spośród pięciu pozostałych rzutów wybór trzech takich, w których wypadło po sześć oczek;

ponieważ w tym przypadku wybieramy trzy elementy ze zbioru pięcioelementowego, więc możliwości jest tyle, ile jest trzelementowych **kombinacji** zbioru

pięcioelementowego, czyli  $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ,

(3) przydzielenie dwóm pozostałym rzutom wyników wybranych za każdym razem spośród czterech dostępnych:  $\{2, 3, 4, 5\}$ , co można zrobić na  $4^2 = 16$  sposobów.

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy ostatecznie, że wszystkich możliwych wyników siedmiokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie dwa razy wypadło jedno oczko i dokładnie trzy razy wypadło sześć oczek jest  $21 \cdot 10 \cdot 16 = 3360$ .

### Przykład 3

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników dziesięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie trzy razy wypadło jedno oczko i dokładnie cztery razy wypadła parzysta liczba oczek.

#### Rozwiązanie:

Wynik dziesięciokrotnego rzutu kostką zapiszemy jako dziesięcioelementowy ciąg  $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10})$  wyników kolejnych rzutów, gdzie  $w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dla  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ .

Zliczanie wszystkich możliwych wyników przeprowadzimy w trzech kolejnych etapach:

(1) spośród wszystkich rzutów wybór trzech takich, w których wypadło po jednym oczku;

ponieważ wybieramy trzy elementy z dziesięcioelementowego zbioru

$(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10})$ , więc w tym przypadku możliwości jest tyle, ile jest trzelementowych **kombinacji** zbioru dziesięcioelementowego, czyli

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120,$$

(2) spośród siedmiu pozostałych rzutów wybór czterech takich, w których wypadła parzysta liczba oczek i uwzględnienie wszystkich możliwych wyników w każdym z tych czterech rzutów;

ponieważ w tym przypadku wybieramy cztery elementy ze zbioru siedmioelementowego, a ponadto w każdym z tych rzutów mamy do wyboru jeden z trzech wyników spośród  $\{2, 4, 6\}$ , więc wszystkich możliwości jest tym razem

$$\binom{7}{4} \cdot 3^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 81 = 2835,$$

(3) przydzielenie trzem pozostałym rzutom wyników wybranych za każdym razem spośród dwóch dostępnych:  $\{3, 5\}$ , co można zrobić na  $2^3 = 8$  sposobów.

Korzystając z **reguły mnożenia** stwierdzamy ostatecznie, że wszystkich możliwych wyników dziesięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których dokładnie trzy razy wypadło jedno oczko i dokładnie cztery razy wypadła parzysta liczba oczek jest  $120 \cdot 2835 \cdot 8 = 2721600$ .

#### Przykład 4

Rozpatrujemy wyniki rzutu siedmioma kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Obliczymy, ile jest wśród nich wszystkich takich wyników, które spełniają równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po 3 oczka,
- dokładnie na dwóch kostkach otrzymano po 4 oczka,
- suma wszystkich otrzymanych liczb oczek jest podzielna przez 3.

#### Rozwiązanie:

Zliczanie wszystkich możliwych wyników przeprowadzimy w trzech kolejnych etapach:

(1) wybór trzech kostek, na każdej z których wypadną 3 oczka;

takie trzy kostki wybieramy spośród wszystkich siedmiu na  $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$  sposobów,

(2) wybór dwóch kostek, na każdej z których wypadną 4 oczka;

takie dwie kostki wybieramy spośród pozostałych czterech na  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  sposobów,

(3) rozpatrzenie wszystkich możliwych wyników na dwóch pozostałych kostkach tak, aby suma wszystkich otrzymanych liczb oczek była podzielna przez 3; ponieważ suma liczb oczek uzyskanych na pięciu kostkach w poprzednio omówionych etapach jest równa

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 17 = 3 \cdot 5 + 2,$$

więc suma liczb uzyskanych na ostatnich dwóch kostkach musi przy dzieleniu przez 3 dawać resztę 1; przy tym na żadnej z tych kostek nie możemy już uzyskać ani liczby oczek równej 3, ani liczby oczek równej 4.

Warunki te spełniają następujące wyniki: 6 i 1, 1 i 6, 5 i 2, 2 i 5 oraz 5 i 5.

Wobec tego wszystkich wyników rzutu siedmioma kostkami do gry, które spełniają warunki zadania jest  $35 \cdot 6 \cdot 5 = 1050$ .

## Słownik

### permutacja zbioru $n$ -elementowego

każdy  $n$ -elementowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru  $n$ -elementowego

### $k$ -elementowa kombinacja zbioru $n$ -elementowego

każdy  $k$ -elementowy podzbiór zbioru  $n$ -elementowego, gdzie  $0 \leq k \leq n$ , nazywamy  $k$ -elementową kombinacją tego zbioru  $n$ -elementowego

### reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei  $n$  czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z  $k_1$  sposobów, druga – na jeden z  $k_2$  sposobów, trzecia – na jeden z  $k_3$  sposobów i tak dalej do  $n$ -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z  $k_n$  sposobów, jest równa

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$$



# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej galerią zdjęć interaktywnych.

Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym należy ustalić, ile jest wszystkich wyników rzutu dziewięcioma odróżnialnymi kostkami do gry, spełniających jednocześnie trzy pewne warunki.

## Polecenie 2

Korzystając z przykładu omówionego powyżej rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrujemy rzut dziesięcioma sześciennymi kostkami do gry, z których każde dwie mają inny kolor. Oblicz, ile jest wszystkich wyników tego rzutu, które spełniają równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po 2 oczka,
- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po 1 oczku,
- suma kwadratów wszystkich otrzymanych liczb oczek jest podzielna przez 5.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Rozważamy 5-krotny rzut sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia spełniających równocześnie dwa poniższe warunki:

- dokładnie w 2 rzutach otrzymano po dwa oczka,
- dokładnie w 1 rzucie wypadło jedno oczko.

Wskaż prawidłową odpowiedź.

☐ 480

☐ 1080

☐ 30

☐ 60

## Ćwiczenie 2



Rozpatrujemy rzut trzema sześciennymi kostkami do gry, z których każde dwie mają inny kolor. Oznaczamy:

$A$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 9,

$B$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 10,

$C$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 13,

$D$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 14.

Dobierz w pary podane niżej liczby.

|       |    |
|-------|----|
| $ B $ | 25 |
| $ D $ | 27 |
| $ C $ | 21 |
| $ A $ | 15 |

## Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest wszystkich wyników ośmiokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest równy 20.

Zakoduj poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności zapisu dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Odp.

#### Ćwiczenie 4



Rozpatrujemy rzut czterema sześciennymi kostkami do gry, z których każde dwie mają inny kolor.

Oznaczamy:

$A$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których na dokładnie trzech kostkach wypadła parzysta liczba oczek,

$B$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których na dokładnie dwóch kostkach wypadła liczba oczek podzielna przez 3,

$C$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których na co najmniej jednej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez 5,

$D$  – zbiór wszystkich wyników tego rzutu, w których na dokładnie jednej kostce wypadła parzysta liczba oczek i na dokładnie jednej kostce wypadła liczba oczek podzielna przez 5.

Znajdź pary równych liczb.

|       |     |
|-------|-----|
| $ D $ | 144 |
| $ C $ | 384 |
| $ B $ | 324 |
| $ A $ | 671 |

#### Ćwiczenie 5



Oblicz, ile jest wszystkich wyników siedmiokrotnego rzutu kostką sześcienną do gry, w których suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 12.

Odp.

## Ćwiczenie 6



Rozważmy rzut dziewięcioma sześciennymi kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Oznaczmy przez  $k$  liczbę wszystkich możliwych wyników tego rzutu, które spełniają równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po trzy oczka,
- dokładnie na czterech kostkach otrzymano po cztery oczka,
- suma wszystkich otrzymanych liczb oczek jest nieparzysta.

Wynika stąd, że:

☐  $k < 5000$

☐  $k > 10000$

☐  $k < 11000$

☐  $k > 12000$

## Ćwiczenie 7



Rozważmy rzut jedenastoma sześciennymi kostkami do gry, z których każde dwie mają inny kolor.

Przez  $x$  oznaczamy liczbę wszystkich możliwych wyników tego rzutu, które spełniają równocześnie trzy warunki:

- na dokładnie trzech kostkach otrzymano po trzy oczka,
- na dokładnie pięciu kostkach otrzymano po pięć oczek,
- suma kwadratów liczb oczek otrzymanych na wszystkich kostkach jest podzielna przez 3.

Wówczas liczba

$$\frac{x}{\binom{11}{3} \cdot \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{2}}$$

jest równa:

☐ 3

☐ 4

☐ 2

☐ 1

## Ćwiczenie 8



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Rozważmy rzut ośmioma sześciennymi kostkami do gry, z których każde dwie mają inny kolor.

Oznaczmy przez  $n$  liczbę wszystkich możliwych wyników, w których największą wyrzuconą liczbą oczek jest 6 i najmniejszą wyrzuconą liczbą oczek jest 2.

Wówczas:

☐  $n < 5^8 - 3^8$

☐  $n < 5^8 - 4^8$

☐  $n < 5^8 - 2 \cdot 4^8$

☐  $n < 5^8 - 2 \cdot 3^8$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Paweł Kwiatkowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (rzuty kostką)

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozwiązuje zadania, w których wyniki rzutu kostkami do gry spełniają jednocześnie kilka warunków,
- buduje model matematyczny w zadaniach dotyczących rzutu symetrycznymi kostkami do gry,
- oblicza liczbę wyników w doświadczeniach polegających na rzucie kostkami do gry,
- rozwiązuje zadania znane jako problem Kawalera de Méré.



**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

**Przebieg lekcji****Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (rzuty kostką)”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 4-8 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum.

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Praca domowa:**

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończzone na zajęciach.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Zliczanie obiektów z podziałem na etapy (rzuty kostką)”.