



Równanie środkowej trójkąta

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie środkowej trójkąta

Źródło: Richard Cohen, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

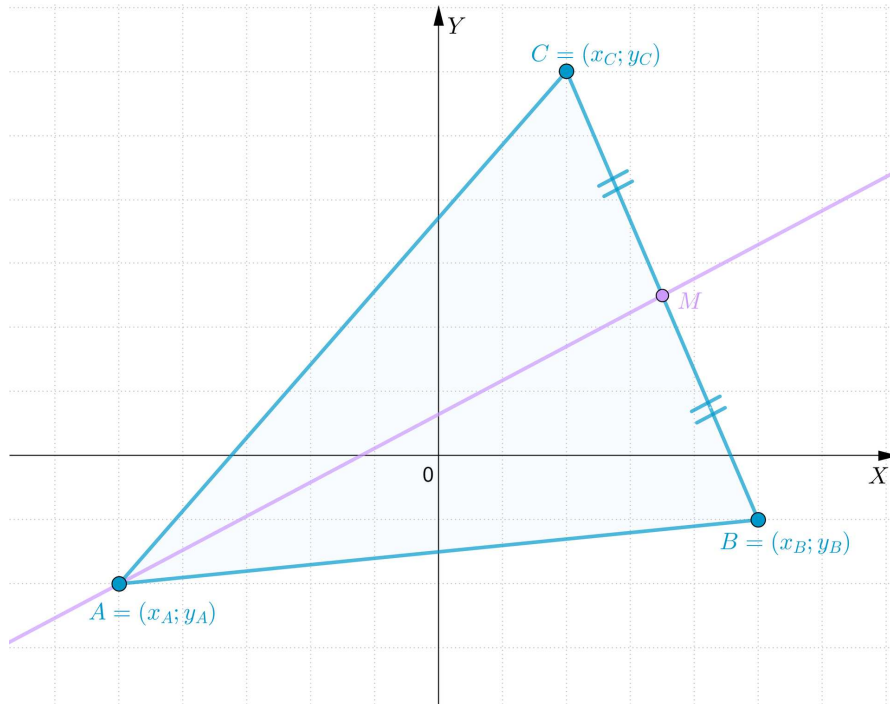
W tej lekcji wykorzystamy poznane do tej pory wzory i własności do wyprowadzenia równania prostej, która zawiera środkową trójkąta. Zastosujemy też to równanie, do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

Twoje cele

- Wyznaczysz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
- Zastosujesz równanie prostej zawierającej środkową trójkąta

Przeczytaj

Rozważmy trójkąt o wierzchołkach $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$, $C = (x_C; y_C)$ i prostą zawierającą środkową poprowadzoną z wierzchołka A przez środek boku BC .



Wiemy już, że środek odcinka ma współrzędne równe średnim arytmetycznym współrzędnych jego końców, zatem środek M odcinka BC ma współrzędne $(\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2})$. Teraz możemy zastosować wzór na równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty - punkty $A = (x_A; y_A)$ i $M = (\frac{x_B+x_C}{2}; \frac{y_B+y_C}{2})$. Współczynnik kierunkowy tej prostej równy jest ilorazowi różnicy drugich współrzędnych przez różnicę pierwszych współrzędnych, czyli $\frac{y_A - \frac{y_B+y_C}{2}}{x_A - \frac{x_B+x_C}{2}} = \frac{2y_A - y_B - y_C}{2x_A - x_B - x_C}$ (o ile punkty A i M nie leżą na prostej równoległej do osi Y). Zatem równanie szukanej prostej ma postać $y - y_A = \frac{2y_A - y_B - y_C}{2x_A - x_B - x_C}(x - x_A)$. Można je też przekształcić do postaci, która nie wymaga założenia, że punkty A i M nie leżą na prostej, która jest równoległa do osi Y : $(2x_A - x_B - x_C)(y - y_A) = (2y_A - y_B - y_C)(x - x_A)$.

Analogiczne wzory można podać dla prostych przechodzących przez wierzchołek B i środek boku AC : $(2x_B - x_A - x_C)(y - y_B) = (2y_B - y_A - y_C)(x - x_B)$ wierzchołek C i środek boku AB : $(2x_C - x_A - x_B)(y - y_C) = (2y_C - y_A - y_B)(x - x_C)$.

Przykład 1

Wyznamy równania prostych zawierających **środkowe trójkąta** o wierzchołkach $A = (-5; 2)$, $B = (2; 6)$, $C = (5; -1)$.

Równanie prostej zawierającej środkową przechodzącą przez punkt A :

$$(2(-5) - 2 - 5)(y - 2) = (2 \cdot 2 - 6 - (-1))(x - (-5))$$

$$-17(y - 2) = -1(x + 5)$$

$$-17y + 34 = -x - 5$$

$$-17y = -x - 39$$

$$y = \frac{1}{17}x + \frac{39}{17}$$

Równanie prostej zawierającej środkową przechodzącą przez punkt B :

$$(2 \cdot 2 - (-5) - 5)(y - 6) = (2 \cdot 6 - 2 - (-1))(x - 2)$$

$$4(y - 6) = 11(x - 2)$$

$$4y - 24 = 11x - 22$$

$$4y = 11x + 2$$

$$y = \frac{11}{4}x + \frac{1}{2}$$

Równanie prostej zawierającej środkową przechodzącą przez punkt C :

$$(2 \cdot 5 - (-5) - 2)(y - (-1)) = (2 \cdot (-1) - 2 - 6)(x - 5)$$

$$13(y + 1) = -10(x - 5)$$

$$13y + 13 = -10x + 50$$

$$y = -\frac{10}{13}x + \frac{37}{13}$$

Możemy wyznaczyć **środek ciężkości trójkąta** ABC , rozwiązując układ złożony z dwóch spośród trzech wyznaczonych wcześniej równań:

$$\begin{cases} y = \frac{11}{4}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{10}{13}x + \frac{37}{13} \end{cases}$$

$$\frac{11}{4}x + \frac{1}{2} = -\frac{10}{13}x + \frac{37}{13}$$

$$143x + 26 = -40x + 148$$

$$183x = 122$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Zatem środek ciężkości trójkąta o wierzchołkach $A = (-5, 2)$, $B = (2, 6)$, $C = (5, -1)$ ma współrzędne $(\frac{2}{3}; \frac{7}{3})$.

Słownik

środkowa trójkąta

odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku

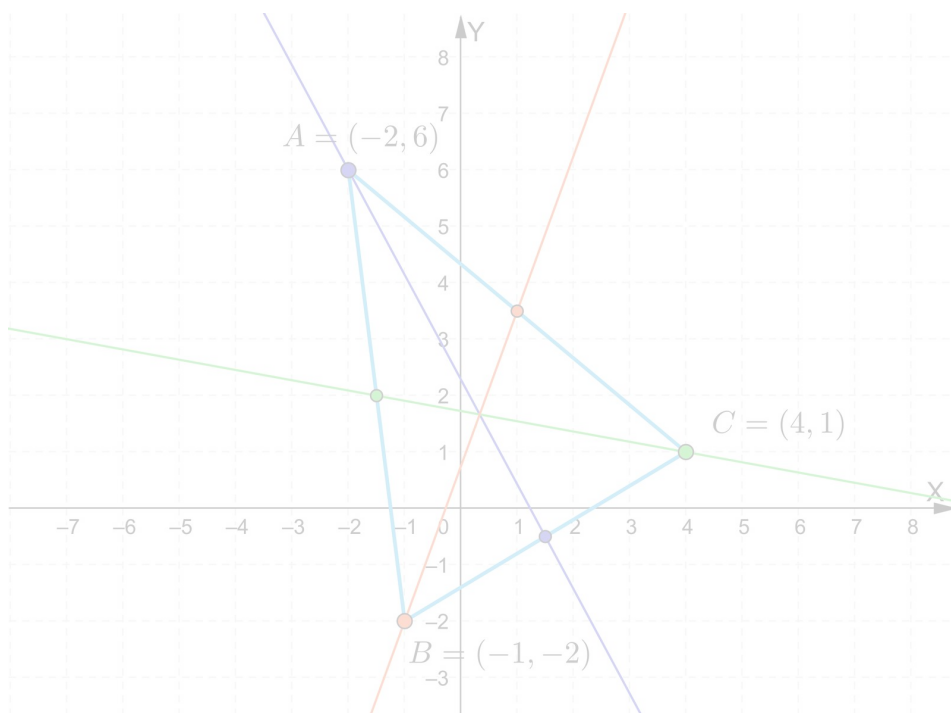
środek ciężkości trójkąta

punkt przecięcia środkowych trójkąta; inaczej: barycentrum trójkąta

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizuj, jak zmienia się równanie środkowej trójkąta ABC w zależności od położenia wierzchołków. Rozwiąż poniższe zadanie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8ut1IO1Q>

Polecenie 2

Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (3; 5)$, $B = (-1; -3)$, $C = (-5; 3)$. Uzupełnij tabelkę - przeciągnij i upuść.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-4; 1)$, $B = (1; 6)$, $C = (3; -4)$. Wskaż zdania prawdziwe.

☐ $y = -5x - 11$ jest równaniem prostej BC .

☐ $y = -\frac{5}{7}x - \frac{13}{7}$ jest równaniem prostej AC .

☐ Prosta przechodząca przez punkt A i środek boku BC ma równanie $y = 1$.

☐ Prosta przechodzącej przez punkt C i środek boku AB ma równanie $y = -\frac{15}{9}x + 1$.

☐ $y = x + 5$ jest równaniem prostej AB .

☐ Prosta przechodzącej przez punkt B i środek boku AC ma równanie $y = \frac{7}{3}x + \frac{11}{3}$.

Ćwiczenie 2



Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi. Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-3; 2)$, $B = (1; 4)$, $C = (5; -1)$. Wówczas:

Równanie prostej zawierającej bok AB to	Równanie prostej zawierającej środkową poprowadzoną z wierzchołka B to	Równanie prostej zawierającej pewną środkową trójkąta ABC to
$y = 2x + \frac{2}{7}$ ☐	$x = 1$ ☐	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ ☐
$y = 2x + 2$ ☐	$y = 1$ ☐	$y = -\frac{3}{8}x + \frac{7}{8}$ ☐
$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ ☐	$y = x$ ☐	$y = -\frac{1}{12}x + \frac{7}{4}$ ☐

Ćwiczenie 3



Punkt $A = (-4; 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC , którego dwie środkowe zawierają się w prostych o równaniach $x = 0$ oraz $x + y - 2 = 0$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie tego zadania.

Z przyjętych oznaczeń oraz wzorów na współrzędne środka odcinka wynikają równania: $\frac{0+c}{2} = 2$ i $\frac{b+2-c}{2} = 2$. Zatem $c = 4$ i $b = 6$.



Korzystając z faktu, że punkt przecięcia środkowych dzieli je w stosunku $2 : 1$ licząc od wierzchołka, możemy zauważyć, że współrzędne środka M odcinka BC to $(2; 2)$. Niech B należy do prostej o równaniu $x = 0$, zaś C należy do prostej o równaniu $y = -x + 2$.



Wyznamy najpierw współrzędne punktu S przecięcia środkowych trójkąta ABC .



Wówczas współrzędne punktu B możemy oznaczyć przez $(0; b)$, zaś współrzędne punktu C są równe $(c; 2 - c)$.



Współrzędne szukanych punktów to $B = (0; 6)$ i $C = (4; -2)$.



W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań $\begin{cases} y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases}$, z którego wynika, że $S = (0; 2)$.



Ćwiczenie 4



Punkt $A = (4; 6)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC , którego dwie środkowe zawierają się w prostych o równaniach $y = 0$ oraz $y = -x + 4$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków tego trójkąta.

Ćwiczenie 5



Napisz równanie prostej opuszczonej z wierzchołka A trójkąta ABC , gdzie $A = (2; 7)$, $B = (1; 1)$, $C = (3; 6)$ i prostopadłej do prostej zawierającej środkową BD tego trójkąta.

Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Ponieważ prosta, której równania szukamy, jest prostopadła do prostej BD , więc jej współczynnik kierunkowy jest równy $-\frac{3}{11}$.

jej równanie: $y - 7 = -\frac{3}{11}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{11}x + 7\frac{6}{11}$.

Korzystając z faktu, że szukana prosta przechodzi przez punkt A , możemy wyznaczyć

Równanie prostej zawierającej środkową BD to:

$$(2 - 2 - 3)(y - 1) = (2 - 7 - 6)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{11}{3}x - \frac{8}{3}.$$

Ćwiczenie 6



W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A = (2; -3)$, $B = (5, 1)$, równanie prostej zawierającej bok BC : $x + 2y - 7 = 0$ oraz równanie prostej zawierającej środkową AM tego trójkąta $5x - y - 13 = 0$. Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C .

Ćwiczenie 7



Wierzchołek C trójkąta ostrokątnego ABC ma współrzędne $(2; 7)$. Prosta k o równaniu $2x + y - 1 = 0$ jest symetralną wysokości CD , a prosta m o równaniu $x + 3y - 8 = 0$ zawiera środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka A .

Oblicz współrzędne punktów A, B, D .

Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby otrzymać rozwiązanie zadania.

Prosta zawierająca wysokość CD jest prostopadła do swojej symetralnej, zatem współczynnik kierunkowy jej równania to $\frac{1}{2}$.

Zatem współrzędne punktu D to $(-6; 3)$.

Korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka możemy wyznaczyć współrzędne punktu $D = (x_D; y_D)$: $\frac{x_D+2}{2} = -2$ i $\frac{y_D+7}{2} = 5$.

Korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka możemy wyznaczyć współrzędne $(x_B; y_B)$ punktu B : $\frac{x_B+2}{2} = -1$ i $\frac{y_B+7}{2} = 3$.

Można to zrobić rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 6 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$

Rozwiązaniem powyższego układu jest para liczb $x = -2$ i $y = 5$, zatem środek wysokości CD ma współrzędne $(-2; 5)$.

Rozwiązując powyższy układ otrzymujemy parę liczb $x = -1$, $y = 3$, zatem współrzędne punktu S to $(-1; 3)$.

Teraz możemy wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia prostej zawierającej wysokość i jej symetralnej.

W drugiej kolejności wyznaczmy współrzędne punktu B . Zauważmy najpierw, że proste k i m przechodzą przez środek S odcinka BC .

Pozostały nam już tylko do wyznaczenia współrzędne punktu A , które można otrzymać rozwiązując układ złożony z równania prostej BD i równania prostej m .

Równanie prostej BD ma postać: $y - 3 = \frac{-1-3}{-4+6}(x + 6)$, czyli $y = -2x - 9$.

Ponadto możemy skorzystać z faktu, że prosta zawierająca wysokość CD przechodzi przez punkt $C = (2; 7)$, więc jej równanie ma postać $y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2)$ $\blacklozenge$, czyli $y = \frac{1}{2}x + 6$.

Zatem współrzędne punktu B to $(-4; -1)$. $\blacklozenge$

Zacniemy od wyznaczenia współrzędnych punktu D . $\blacklozenge$

Zatem współrzędne punktu A są rozwiązaniem układu $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = -2x - 9 \end{cases}$, którego rozwiązaniem jest para liczb $x = -7$, $y = 5$. Współrzędne punktu A to $(-7; 5)$. $\blacklozenge$

Zatem współrzędne punktu S można wyznaczyć rozwiązując układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y = -2x + 1 \end{cases}$. $\blacklozenge$

Ćwiczenie 8



W trójkącie prostokątnym ABC , gdzie kąt przy wierzchołku C jest prosty, $B = (6; 0)$. Prosta $k : 11x + 2y - 6 = 0$, zawierająca środkową trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C , przecina bok AB trójkąta w punkcie $S = (1; -2, 5)$. Wyznacz współrzędne punktów A i C .

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie środkowej trójkąta

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równania prostych zawierających środkowe trójkąta,
- stosuje równanie prostej zawierającej środkową trójkąta,
- analizuje postać równania prostej zawierającej środkową trójkąta w zależności od położenia wierzchołków trójkąta w układzie współrzędnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Zastosowania równania prostej: wysokości, środkowe, symetralne boków trójkąta

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie środkowej trójkąta”.