



Walec opisany na kuli

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Walec opisany na kuli

Źródło: Miguel Bernardo, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

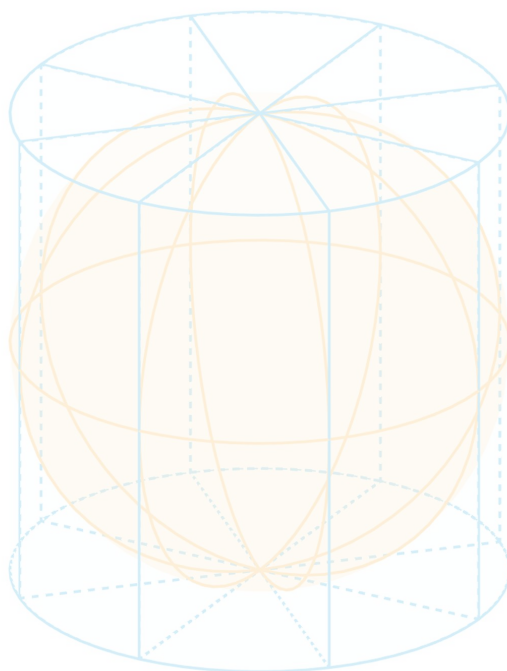
Wyobraź sobie walec opisany na kuli. Przekonasz się, że pole powierzchni bocznej takiego walca jest równe polu powierzchni kuli wpisanej w niego. Wykażesz, że stosunek objętości walca i suma objętości kul wpisanych w niego w odpowiedni sposób jest stały. Walec opisany na kuli to kolejne zagadnienie geometrii przestrzennej, które nauczysz się sprowadzać do prostego zadania geometrii płaskiej.

Twoje cele

- Wykreślisz przekrój osiowy przedstawiający walec opisany na kuli.
- Rozpoznaś sytuację, w której walec opisano na kuli
- Naskicujesz odpowiedni przekrój osiowy.
- Zbadasz związki miarowe między odcinkami na wykreślonym przekroju osiowym.
- Wykorzystasz związki miarowe geometrii płaskiej do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną.
- Przeprowadzisz rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Przeczytaj

Jak należy rozumieć sformułowanie „walec opisany na kuli”? Jak wykreślić rysunek pomocniczy w zadaniu dotyczącym walca opisanego na kuli? W odpowiedzi na te pytania pomoże nam aplet Geogebra.



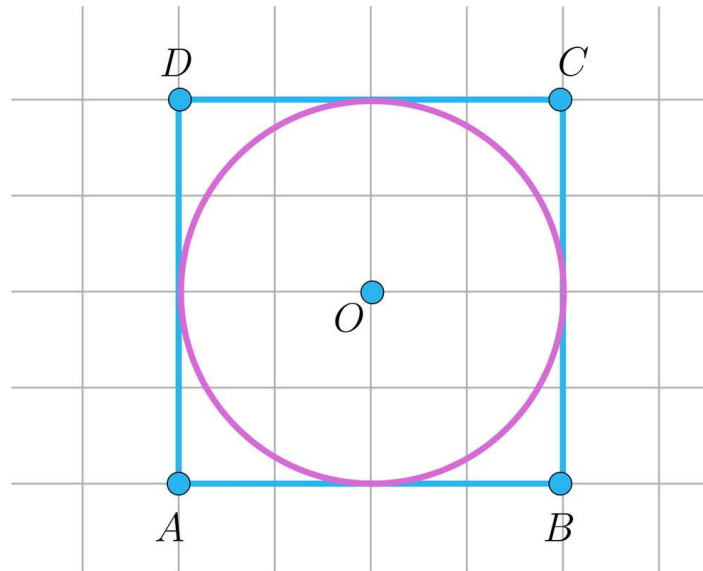
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D91vUlte2>

Zapamiętaj!

Walec jest opisany na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy kula jest styczna do dwóch podstaw walca i do każdej **tworzącej walca**.

Walec można opisać na kuli tylko wtedy, gdy średnica podstawy walca oraz wysokość walca są tej samej długości.

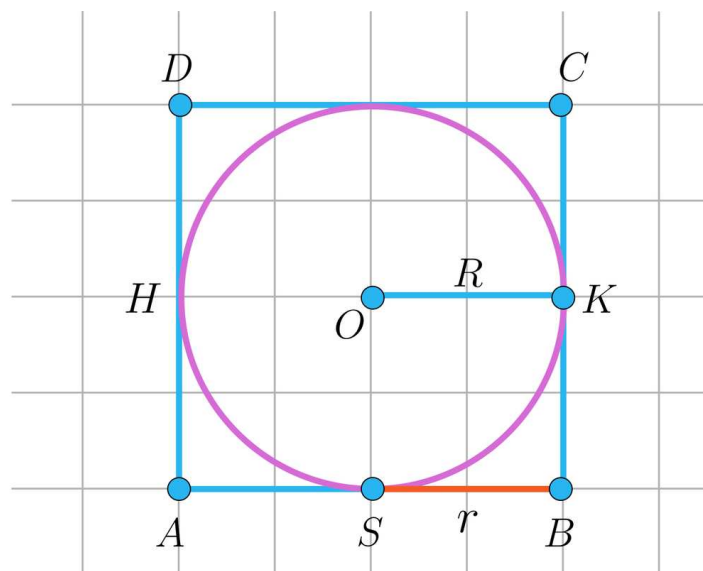
Zadania dotyczące walca opisanego na kuli sprowadzimy do prostych zadań geometrii płaskiej. Na rysunku poniżej przedstawiono **przekrój osiowy walca** opisanego na kuli. Przekrój osiowy tych brył jest kwadratem opisanym na kole. Spostrzeżenie to pomoże nam w uproszczeniu planowania strategii rozwiązania wielu zadań geometrii przestrzennej.



Dla przejrzystości rysunku, **przekrój osiowy kuli** wystarczy wykreślić jako okrąg.

Tak wykreślony rysunek jest punktem startowym w planowaniu kolejnych kroków. Ważnym elementem rozwiązania zadania jest analiza własności otrzymanych figur oraz związków miarowych zachodzących między odcinkami tych figur.

Rozważmy przekrój osiowy walca opisanego na kuli. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Określmy najważniejsze związki miarowe zachodzące pomiędzy odcinkami przekroju osiowego tych brył.



$R = |OK|$ - długość promienia kuli;

$r = |SB|$ - długość promienia podstawy walca;

$H = |AD|$ - długość wysokości walca.

Zauważmy, że

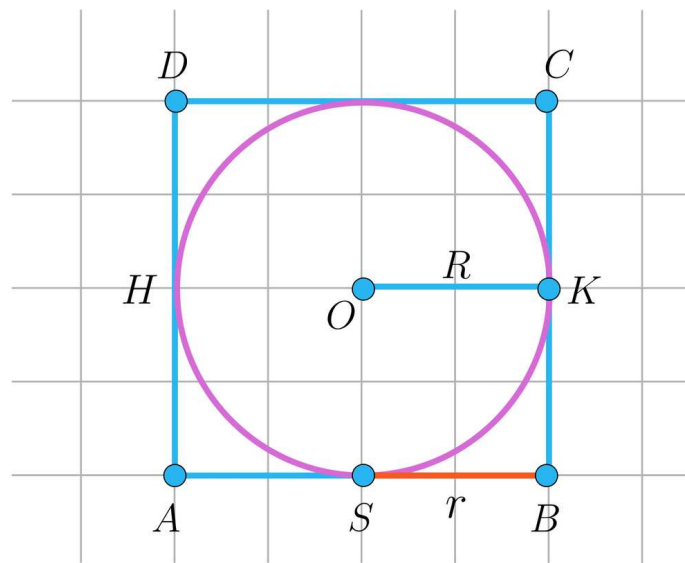
- długość promienia kuli jest równa długości promienia podstawy walca opisanego na tej kuli $r = R$;
- długość wysokości walca opisanego na kuli jest równa długości średnicy tej kuli $H = 2R$.

Przykład 1

Oblicz objętość kuli wpisanej w walec, którego objętość wynosi $343\pi \text{ cm}^3$.

Rozwiązanie

Wykreślamy rysunek i przyjmujemy oznaczenia.



$R = |OK|$ - długość promienia kuli;

$r = |SB|$ - długość promienia podstawy walca;

$H = |AD|$ - długość wysokości walca;

$V_w = \pi r^2 H$ - objętość walca;

$V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$ - objętość kuli.

Wiedząc, że długość promienia podstawy walca i długość promienia kuli są równe oraz, że długość wysokości walca odpowiada długości średnicy kuli, otrzymujemy odpowiednio

$$\pi r^2 H = 343\pi$$

$$\pi R^2 \cdot 2R = 343\pi,$$

$$\text{zatem } R^3 = \frac{343}{2}.$$

Zauważmy, że do obliczenia objętości kuli potrzebujemy wielkości R^3 , zatem

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{343}{2} = \frac{686\pi}{3} [\text{cm}^3].$$

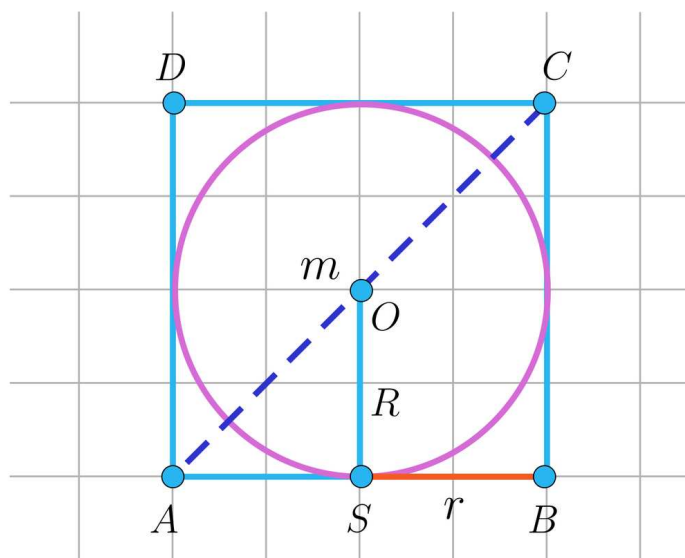
Przykład 2

Oblicz długość promienia kuli wpisanej w walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem o przekątnej długości m .

Rozwiązanie

Wykreślamy rysunek obrazujący przekrój osiowy kuli wpisanej w walec.

Przyjmujemy oznaczenia. Oznaczenia pomogą w prowadzeniu toku rozumowania.



$R = |OS|$ - długość promienia kuli;

$r = |SB|$ - długość promienia podstawy walca;

$m = |AC|$ - długość przekątnej przekroju osiowego walca.

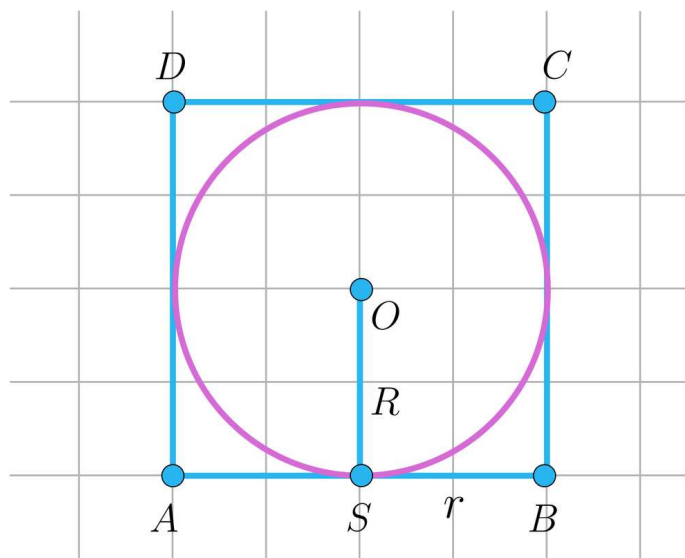
Zauważmy, że przekrojem osiowym walca jest kwadrat o boku długości $2R$, zatem przekątna przekroju osiowego walca jest opisana zależnością $m = 2R\sqrt{2}$. Wynika stąd, że $R = \frac{m\sqrt{2}}{4}$.

Przykład 3

Walec opisano na kuli. Pole powierzchni całkowitej walca wynosi $2S$. Wyznacz objętość kuli.

Rozwiązanie

Wykreślamy przekrój osiowy tych brył i przyjmujemy oznaczenia.



$R = |OS|$ - długość promienia kuli;

$r = |SB|$ - długość promienia podstawy walca;

$H = |AD|$ - długość wysokości walca.

Zauważmy, że przekrojem osiowym walca jest kwadrat o boku długości $2R$. Stąd mamy odpowiednio zależności:

$$r = R \text{ i } H = 2R.$$

Ponadto z warunków zadania mamy zależność

$$2\pi r(r + H) = 2S,$$

zatem podstawiając odpowiednio mamy

$$2\pi R(R + 2R) = 2S,$$

$$\text{stąd } 3\pi R^2 = S,$$

$$\text{zatem } R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

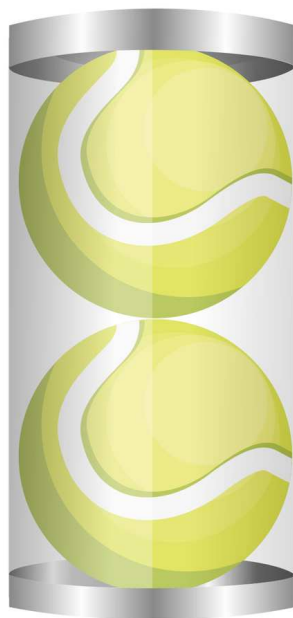
Objętość kuli obliczamy ze wzoru $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Otrzymujemy

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{S}{3\pi}} \right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{S}{3\pi} \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \frac{4S\sqrt{S}}{9\sqrt{3\pi}} = \frac{4S\sqrt{3\pi S}}{27\pi}.$$

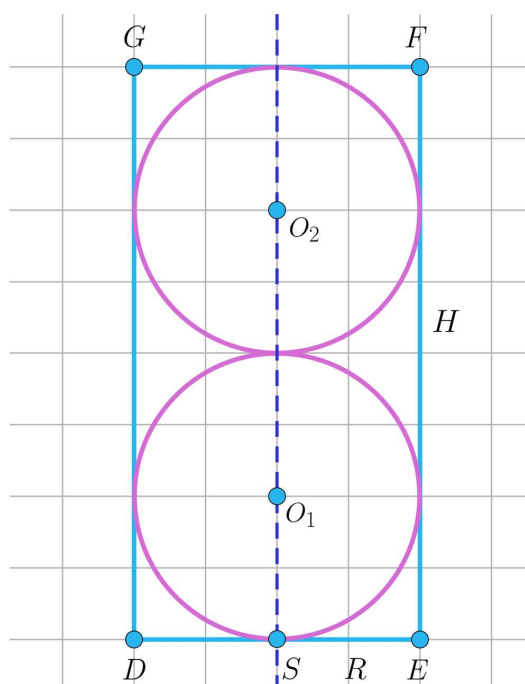
Przykład 4

W puszcze w kształcie walca umieszczono dwie piłki tenisowe, jak na rysunku. Jaką część objętości puszki stanowi objętość obu piłek. Przyjmujemy, że każda piłka do tenisa ma średnicę $6,5\text{ cm}$. Wykreśl przekrój osiowy puszki z umieszczonymi tam dwiema piłkami, wiedząc, że długość wysokości puszki jest równa długości średnicy obu piłek oraz, że długość średnicy puszki jest równa długości średnicy piłki tenisowej.



Rozwiązanie

Wykreślamy rysunek i przyjmujemy oznaczenia.



$H = |EF|$ - długość wysokości puszek;

$R = |SE|$ - długość promienia podstawy puszki oraz długość promienia piłki tenisowej.

Przekrojem osiowym walca opisanego na dwóch zewnętrznie stycznych kulach jest prostokąt opisany na dwóch zewnętrznie stycznych kołach.

Wynika stąd, że $R = \frac{13}{4}$ cm i $H = 13$ cm. Zatem objętość puszki

$$V_p = \pi r^2 H = \pi \left(\frac{13}{4}\right)^2 \cdot 13 = \frac{2197}{16} \pi.$$

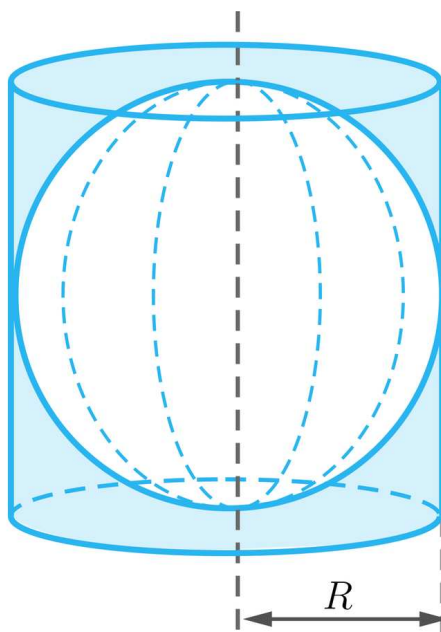
Objętość obu piłek

$$2V_k = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(\frac{13}{4}\right)^3 = \frac{2197\pi}{24}.$$

$$\text{Stąd } \frac{V_p}{2V_k} = \frac{3}{2}.$$

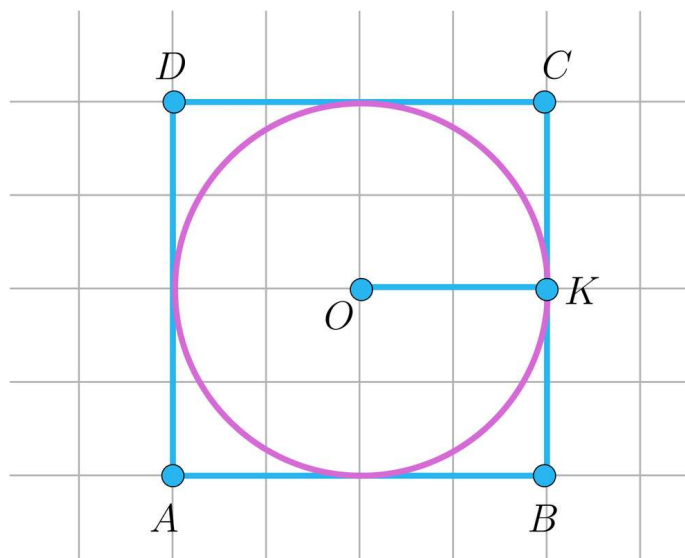
Przykład 5

Walec opisano na kuli o promieniu R . Oblicz objętość części walca zawartej pomiędzy powierzchnią walca a powierzchnią kuli.



Rozwiązanie

Wykreślmy rysunek pomocniczy i przyjmijmy oznaczenia.



$R = |OK|$ - długość promienia kuli;

$H = |AD|$ - długość wysokości walca.

Przekrój osiowy walca opisanego na kuli jest kwadratem o boku długości równej długości średnicy kuli. Objętość części walca zawartej pomiędzy powierzchnią walca a powierzchnią kuli obliczymy jako różnicę objętości walca i objętości kuli. Mamy zatem

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Słownik

przekrój osiowy walca

przekrój walca płaszczyzną zawierającą oś obrotu walca. Przekrój osiowy walca jest prostokątem

przekrój osiowy kuli

przekrój kuli płaszczyzną zawierającą oś obrotu kuli. Przekrój osiowy kuli jest kołem

tworząca walca

każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do jego podstaw

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Rozważmy walec o promieniu podstawy długości r . W walec wpisujemy kule zewnętrznie styczne o promieniu długości równej długości promienia podstawy walca. Środki kul należą do osi obrotu walca. Ponadto wysokość walca odpowiada sumie średnic wpisanych kul. Oglądając galerię zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zadania, a dopiero następnie porównaj rozwiązania.

Polecenie 2

W walec wpisano n kul zewnętrznie stycznych o promieniach długości równej długości promienia podstawy walca. Środki kul należą do osi obrotu walca oraz wysokość walca jest równa sumie średnic wszystkich wpisanych kul. Wykaż, że stosunek pola powierzchni bocznej walca do sumy pól powierzchni wszystkich kul wpisanych w ten walec jest stały.

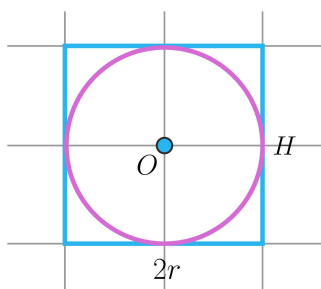
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

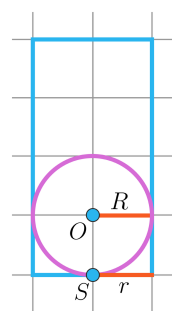
Ćwiczenie 1



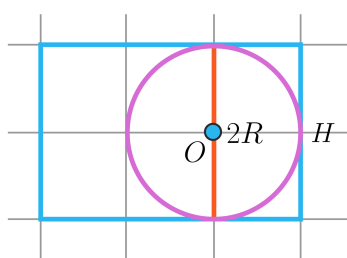
Walec można opisać na kuli wtedy i tylko wtedy, gdy



długość średnicy podstawy walca
jest równa długości wysokości walca

☐

długość promienia podstawy walca
jest równa długości promienia kuli

☐

długość średnicy kuli jest równa
długości wysokości walca

☐

Ćwiczenie 2



Jeśli walec opisano na kuli, to prawdziwe są zdania:

☐ pole powierzchni całkowitej walca jest równe polu powierzchni kuli

☐ stosunek objętości walca do objętości kuli jest równy $\frac{3}{2}$

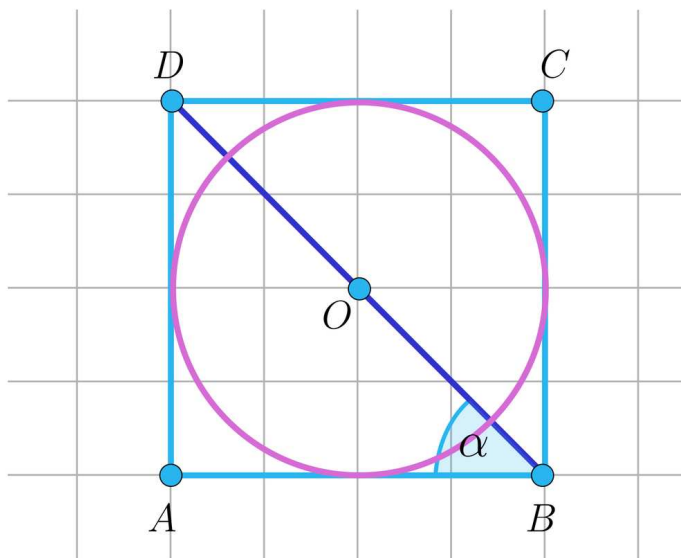
☐ dwie objętości kuli są równe trzem objętościom walca

☐ pole powierzchni bocznej walca jest równe polu powierzchni kuli

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono przekrój osiowy walca opisanego na kuli. Jaką miarę ma kąt zawarty pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca a płaszczyzną podstawy walca.



Odpowiedź: $\alpha =$ °

Ćwiczenie 4



Oblicz objętość walca o polu powierzchni całkowitej S opisanego na kuli o promieniu długości R .

Ćwiczenie 5



Wyznacz długość promienia kuli wpisanej w walec, którego przekrój osiowy jest kwadratem o przekątnej długości $n\sqrt{6}$.

Ćwiczenie 6



Trzy parami styczne kule o promieniu $r = 6$ włożono do naczynia w kształcie walca w ten sposób, że każda z kul jest styczna do obu podstaw walca oraz do jego powierzchni bocznej. Oblicz długość promienia R tego walca.

Ćwiczenie 7



W walec wpisano trzy kule zewnętrznie styczne o promieniach długości równej długości promienia podstawy walca. Środki kul należą do osi obrotu walca oraz wysokość walca jest równa sumie średnic tych kul. Wykreśl przekrój osiowy walca opisanego na tych trzech kulach. Wyznacz stosunek pola powierzchni całkowitej walca do sumy pól powierzchni wpisanych kul.

Ćwiczenie 8



W walec wpisano n kul zewnętrznie stycznych o promieniach długości równej długości promienia podstawy walca. Środki kul należą do osi obrotu walca oraz wysokość walca jest równa sumie średnic tych kul. Wykaż, że stosunek pola powierzchni całkowitej walca do sumy pól powierzchni wpisanych kul jest określony zależnością $\frac{P_w}{nP_k} = \frac{1+2n}{2n}$, gdzie n oznacza liczbę wpisanych kul.

Dla nauczyciela

Autor: Małgorzata Bochenek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Walec opisany na kuli

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Uczeń:

- 6. oblicza objętość i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka, kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykreśla przekrój osiowy przedstawiający walec opisany na kuli;
- rozpoznaje sytuację, w której walec opisano na kuli;
- szkicuje odpowiedni przekrój osiowy;
- bada związki miarowe między odcinkami na wykreślonym przekroju osiowym;
- wykorzystuje związki miarowe geometrii płaskiej do rozwiązywania zagadnień związanych z geometrią przestrzenną;
- przeprowadza rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- lekcja odwrócona;
- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z materiałem w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat: „Walec opisany na kuli” i określa cele zajęć.
- Uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel zaczyna od demonstracji modelu walca opisanego na kuli.
- Nauczyciel omawia z uczniami wątpliwości dotyczące przykładów umieszczonych w sekcji „Przeczytaj”.
- Uczniowie dzielą się na grupy i analizują zadania z galerii zdjęć interaktywnych, następnie rozwiązują polecenie 2.
- Uczniowie samodzielnie rozwiązują ćwiczenia 1-5 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel podsumowuje lekcję i określa stopień osiągnięcia celów.

Praca domowa:

- Ćwiczenia 6,7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Objętość i pole powierzchni kuli](#)
- [Objętość i pole powierzchni walca](#)

Wskazówki metodyczne:

Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać jako uzupełnienie lekcji „Objętość kuli”.