



Wyznaczanie pierwiastków całkowitych wielomianu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Posługując się prostymi przekształceniami potrafimy wyznaczyć pierwiastki dowolnych wielomianów pierwszego i drugiego stopnia.

Są również znane, choć przekraczają zakres materiału szkolnego, wzory na wyznaczenie pierwiastków wielomianów stopnia trzeciego i czwartego – można znaleźć pierwiastki znając współczynniki w zapisie wielomianu i wykonując skończoną liczbę prostych operacji arytmetycznych (cztery podstawowe działania i wyciąganie pierwiastków różnego stopnia). Wiadomo też, że nie da się w sposób ogólny wyprowadzić analogicznych wzorów dla wielomianów stopnia wyższego, niż czwarty.

W bieżącym materiale zajmiemy się wielomianami, w których wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi.

Twoje cele

- Udowodnisz twierdzenie pozwalające wyznaczyć wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.
- Zastosujesz twierdzenie pozwalające wyznaczyć wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych.

Przeczytaj

Twierdzenie: o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

Dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$.

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0 .

Dowód

Niech $W(x)$ będzie wielomianem spełniającym warunki zadania.

Wiemy, że $W(p) = 0$, czyli $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$.

Zatem $a_0 = -a_n p^n - a_{n-1} p^{n-1} - \dots - a_1 p$,

czyli $a_0 = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1)$. Wszystkie liczby znajdujące się po prawej stronie znaku równości są całkowite, więc p jest dzielnikiem a_0 .

Z powyższego [twierdzenia o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych](#) wynika, że analizując dzielniki wyrazu wolnego wielomianu o współczynnikach całkowitych jesteśmy w stanie wyznaczyć wszystkie pierwiastki całkowite tego wielomianu.

Przykład 1

Wyznacz wszystkie pierwiastki całkowite wielomianu

$$W(x) = 6x^5 + 31x^4 + 9x^3 + 21x^2 + 3x - 10.$$

Możliwe pierwiastki całkowite wielomianu $W(x)$ to dzielniki liczby (-10) . Mamy więc do sprawdzenia osiem przypadków (bo tyle dzielników, uwzględniając również liczby ujemne, ma (-10)).

- Jeśli współczynniki przy zmiennej x są dodatnie oraz dwa z nich są większe niż 10, to dla dzielników dodatnich (1, 2, 5 i 10) wielomian przyjmuje wartości

dodatnie (nie trzeba ich dokładnie obliczać, wystarczy tylko zauważyć, że są to wartości różne od 0). Dlatego całkowitych pierwiastków wielomianu szukamy wśród ujemnych dzielników wyrazu wolnego.

- $W(-1) = -6 + 31 - 9 + 21 - 3 - 10 \neq 0$
- $W(-2) = 6 \cdot (-32) + 31 \cdot 16 + 9 \cdot (-8) + 21 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) - 10 = -192 + 496 - 72 + 84 - 6 - 10 > 0$
- $W(-5) = -6 \cdot 5^5 + 31 \cdot 5^4 - 9 \cdot 5^3 + 21 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 - 10 = 5^4(-30 + 31) + 5^2(-45 + 21) - 15 - 10 = 5^4 - 5^2 \cdot 24 - 25 = 5^4 - 5^2 \cdot 25 = 5^4 - 5^4 = 0$
- $W(-10) = -6 \cdot 10^5 + 31 \cdot 10^4 - 9 \cdot 10^3 + 21 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 10 = -600000 + 310000 - 9000 + 2100 - 30 - 100 < 0$

Zatem jedynym pierwiastkiem całkowitym wielomianu $W(x)$ jest liczba (-5) .

Przykład 2

Udowodnij, że wielomian $W(x) = x^7 - 3x^5 + 2x^4 - 13x + 4$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Przykład 3

Wyznacz wszystkie [pierwiastki wielomianu](#) $W(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 15$.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D14icO57S>

Film nawiązujący do treści materiału

Przykład 4

Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = 6x^4 - 15x^2 - 15x - 6$.

- Zauważmy, że $W(x) = 3(2x^4 - 5x^2 - 5x - 2)$, więc wielomian $W(x)$ ma te same pierwiastki, co wielomian $V(x) = 2x^4 - 5x^2 - 5x - 2$.
- $V(x)$ jest wielomianem stopnia czwartego, więc może mieć co najwyżej cztery pierwiastki.
- Spróbujmy na początek znaleźć jakiś pierwiastek całkowity wielomianu $V(x)$. Będziemy go szukać wśród dzielników liczby (-2) .
- Łatwo zauważyć, że $V(-1) = 2 - 5 + 5 - 2 = 0$, czyli liczba (-1) jest pierwiastkiem wielomianu $V(x)$. Zgodnie z [twierdzeniem Bézouta](#) wielomian $V(x)$ jest więc podzielny przez dwumian $x + 1$.
- Możemy posłużyć się np. schematem Hornera bądź dzieleniem pisemnym wielomianów. Po wykonaniu dzielenia możemy zapisać, że $W(x) = 3(x + 1)(2x^3 - 2x^2 - 3x - 2)$.
- Uzyskaliśmy wielomian trzeciego stopnia $V_1(x) = 2x^3 - 2x^2 - 3x - 2$, którego pierwiastki są jednocześnie pierwiastkami wielomianu $W(x)$.
- Możemy ponownie przeanalizować dzielniki wyrazu wolnego. Łatwo zauważyć, że liczba 2 jest pierwiastkiem całkowitym wielomianu $V_1(x)$, więc jest on podzielny przez dwumian $x - 2$.
- Po wykonaniu dzielenia możemy zapisać, że $W(x) = 3(x + 1)(x - 2)(2x^2 + 2x + 1)$.

- Na koniec wyznaczmy pierwiastki wielomianu drugiego stopnia $V_2(x) = 2x^2 + 2x + 1$. Po obliczeniu wyróżnika $\Delta = -4$ widzimy, że wielomian ten nie ma pierwiastków rzeczywistych i jest nierozkładalny.
- Z tego wynika, że wielomian $W(x)$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste: (-1) oraz 2 .

Słownik

pierwiastek wielomianu

dla wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej x to liczba x_0 taka, że $W(x_0) = 0$

twierdzenie Bézouta

liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ dzieli się przez dwumian $x - a$ bez reszty

twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych

dany jest wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, w którym wszystkie współczynniki a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 i a_0 są liczbami całkowitymi, przy czym $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$.

Jeżeli liczba całkowita p jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem (dodatnim lub ujemnym) wyrazu wolnego a_0

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj przykład wyznaczania pierwiastków całkowitych wielomianu.

Polecenie 2

Spróbuj wyznaczyć pierwiastki całkowite podanego wielomianu. Następnie sprawdź swoje rozumowanie analizując infografikę.

Polecenie 3

Sprawdź się raz jeszcze. Wyznacz pierwiastki całkowite podanego wielomianu, a potem porównaj swoje rozumowanie z opisami zawartymi w punktach od 1 do 9 w poniższej infografice.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Michał Niedźwiedź

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie pierwiastków całkowitych wielomianu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne

Uczeń:

- stosuje twierdzenie pozwalające wyznaczyć wszystkie całkowite pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- udowadnia twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel pokazuje uczniom przykład równania wielomianowego, którego nie można łatwo rozwiązać wyłączając wspólny czynnik przed nawias. Uczniowie przez chwilę próbują samodzielnie rozwiązać równanie stosując poznane dotychczas metody.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel podaje Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych wraz z dowodem.
- Uczniowie, pod kierunkiem nauczyciela, analizują przykłady przedstawione na infografice.
- Nauczyciel, z pomocą uczniów, rozwiązuje Przykład 1.
- Uczniowie w parach rozwiązują Przykład 3, wybrana osoba prezentuje rozwiązanie na tablicy.
- Uczniowie w kiluosobowych grupach zastanawiają się nad Przykładem 2, zwracając uwagę na budowę twierdzenia (warunek konieczny vs warunek dostateczny).
- Pozostając w grupach uczniowie grają w memory (Ćwiczenie 7), nauczyciel nadzoruje pracę grup.

Faza podsumowująca:

- Uczniowie samodzielnie redagują notatkę z lekcji oraz rozwiązują Ćwiczenie 1 i 2.
- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończony na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może zostać wykorzystana jako materiał służący powtórzeniu materiału na temat „Wyznaczanie pierwiastków wielomianu”.