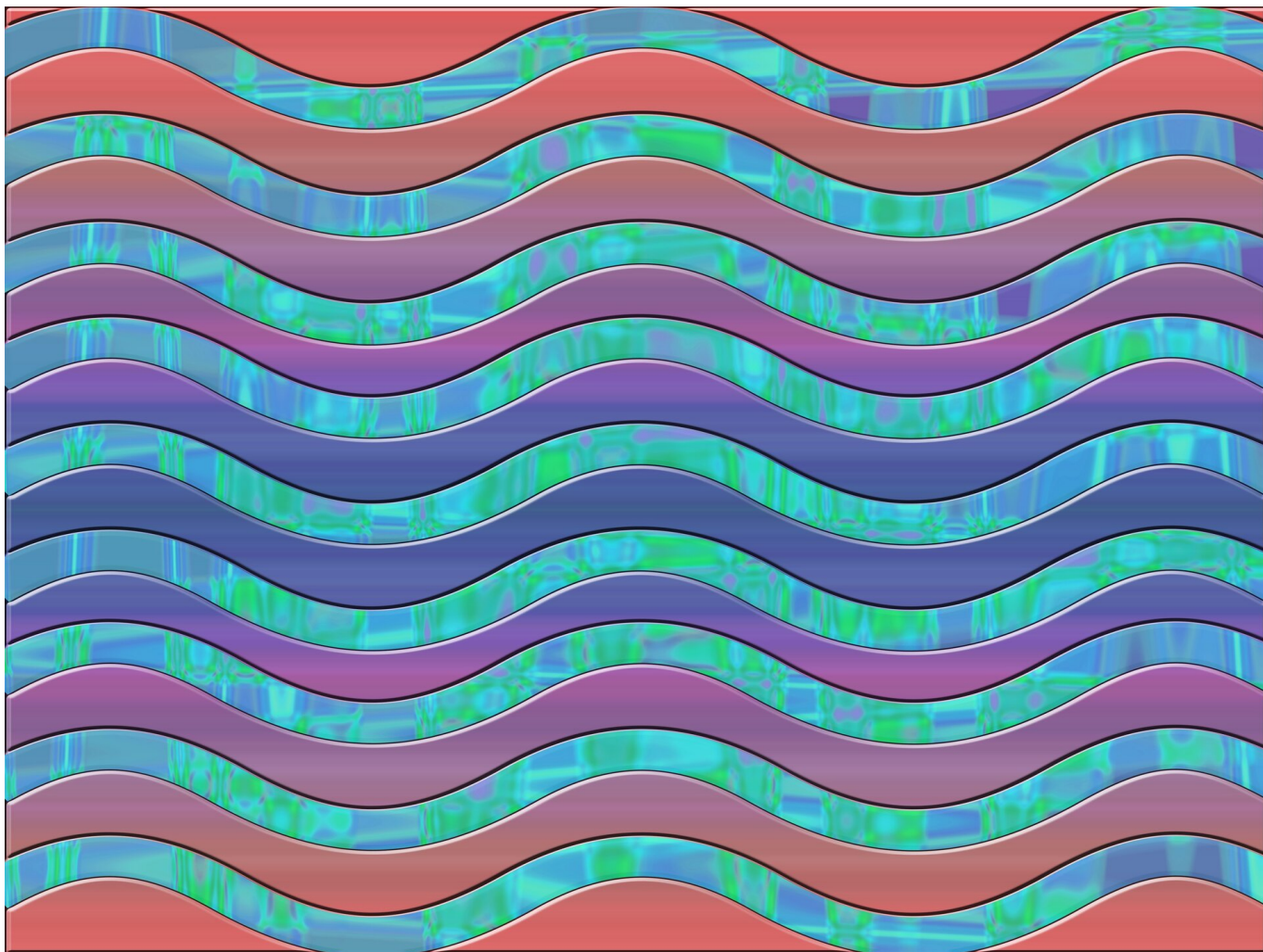




Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania równań

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania równań

Źródło: Klara Acel, dostępny w internecie: <https://pixabay.com/>, domena publiczna.

Wyobraź sobie, że masz odpowiedzieć na pytanie:

Dla jakiego kąta α wyrażenie: $4 \sin \alpha \cos \alpha$ przyjmuje wartość $\sqrt{2}$?

Z pomocą przyjdzie Ci umiejętność rozwiązywania równań z funkcjami trygonometrycznymi podwojonych kątów.

W tym materiale pokażemy, jak wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu stosować do rozwiązywania równań trygonometrycznych. Będziemy się opierać także na twierdzeniach opisujących rozwiązywanie równań postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu do rozwiązywania równań trygonometrycznych.
- Przypomnisz sobie, jak rozwiązujemy równania typu: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Przeczytaj

Każde równanie trygonometryczne staramy się sprowadzić do równania postaci: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$. Poniżej pokażemy jak stosować wzory na funkcje podwojonego argumentu przy czym wzory te będziemy stosować zarówno do zwijania jak i rozwijania wyrażeń trygonometrycznych.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru na cosinus podwojonego kąta $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ i otrzymujemy równanie w postaci:

$$4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 2 \sin^2 x.$$

Przenosimy składniki na lewą stronę:

$$4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) - 2 \sin^2 x = 0$$

i wyłączamy przed nawias wspólny czynnik:

$$2 \sin^2 x (2 + 2 \cos 2x - 1) = 0.$$

Zatem równanie jest równoważne alternatywie równań:

$$\sin x = 0 \text{ lub } \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Równanie $\sin x = 0$ ma rozwiązania:

$$x = k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Równanie $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ ma rozwiązania:

$$2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{czyli } x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem odpowiedź jest następująca: $x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia rozkładamy na czynniki lewą stronę równania:

$$\sin 2x = \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right).$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej oraz [wzoru na cosinus podwojonego kąta](#) zwiijamy równanie do postaci:

$$2 \sin x \cdot \cos x = \cos x.$$

Przenosząc wszystkie składniki na lewą stronę otrzymujemy postać iloczynową:

$$2 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Zatem otrzymujemy alternatywę warunków:

$$\cos x = 0 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Równanie $\cos x = 0$ jest spełnione dla $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ jest spełnione dla $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd otrzymujemy odpowiedź:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\operatorname{tg} 2x = 2 \sin x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Najpierw zapiszmy założenia: $\cos 2x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Korzystając z tożsamości $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ zapiszmy równanie w postaci:

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Korzystając ze [wzoru na sinus podwojonego kąta](#), zapiszmy równanie następująco:

$$2 \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos 2x.$$

Zapisujemy równanie w postaci iloczynowej:

$$\sin x (\cos x - \cos 2x) = 0.$$

Stąd otrzymujemy alternatywę równań:

$$\sin x = 0 \text{ lub } \cos x = \cos 2x.$$

Równanie $\sin x = 0$ spełniają $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Równanie $\cos x = \cos 2x$ rozwiązujemy, wykorzystując metodę porównywania wartości funkcji cosinus. Równanie ma rozwiązania: $x = 2x + 2k\pi$ lub $x = -2x + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stąd dostajemy:

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Sprawdzamy, że żaden element wykluczony z dziedziny nie pokrywa się z elementami rozwiązania.

$$\text{Odpowiedź: } x = k\pi \text{ lub } x = 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2k\pi}{3}, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Uwaga

W przykładzie 3 równanie najłatwiej było rozwiązać z wykorzystaniem funkcji sinus i cosinus. Rozpisanie wyrażenia z wykorzystaniem wzoru na [tangens podwojonego kąta](#) nie da prostszego rozwiązania.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\sin 2x + \operatorname{tg} x = 2$ w liczbach rzeczywistych.

Rozwiązanie

Zapiszmy założenia: $\cos x \neq 0$, czyli $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Skorzystamy ze wzoru $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, ale przekształcimy go do postaci związanej z funkcją tangens argumentu x :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}.$$

Teraz licznik i mianownik dzielimy przez $\cos^2 x$ (wolno to zrobić, gdyż z założeń $\cos x \neq 0$) i otrzymujemy:

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

W ten sposób doprowadziliśmy do równania z jedną niewiadomą w postaci funkcji trygonometrycznej tangens:

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 2.$$

Podstawmy $t = \operatorname{tg} x$. Otrzymujemy wówczas:

$$\frac{2t}{1+t^2} + t = 2.$$

Po pomnożeniu równania stronami przez $1 + t^2$ otrzymujemy równanie wielomianowe:

$$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

Przez obserwację współczynników możemy zauważyć, że suma współczynników jest równa 0, co oznacza, że pierwiastkiem wielomianu jest 1. Zapisujemy zatem:

$$(t - 1)(t^2 - t + 2) = 0.$$

Wyróżnik trójmianu $t^2 - t + 2$ jest równy:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7, \text{ co oznacza, że trójmian nie ma pierwiastków.}$$

Zatem jedynym rozwiązaniem równania jest $t = 1$, czyli

$$\operatorname{tg} x = 1. \text{ Rozwiązaniem równania jest } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Słownik

sinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

cosinus podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x

tangens podwojonego kąta

tożsamość trygonometryczna: $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$ i $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Zagraj w grę, a następnie rozwiąż polecenia poniżej.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie: $8 \cos^4 x = 11 \cos 2x - 1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wszystkimi rozwiązaniami równania $3 \cos x = \sin 2x$ są:

☐ $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $\frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 2



W puste pole wstaw takie wyrażenie, aby powstało zdanie prawdziwe.

$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 2x$ wtedy i tylko wtedy, gdy , gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Ćwiczenie 3



W puste pole wstaw takie wyrażenie, aby powstało zdanie prawdziwe.

$1 - \cos \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ wtedy i tylko wtedy, gdy , gdzie $k \in \mathbb{Z}$

$x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = 4k\pi$ lub $x = \pi + 4k\pi$

$x = 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ćwiczenie 4



Wszystkimi rozwiązaniami równania $\cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8 \sin x}$ są liczby postaci:

☐ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = -\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ lub $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 5



Wskaż równania, które nie mają rozwiązań.

☐ $\cos 2x + \cos x + 2 = 0$

☐ $\cos 2x - 2 \sin x = \frac{1}{2}$

☐ $\cos 2x - \cos x + 2 = 0$

☐ $\cos 2x + \sin x = 1$

☐ $2 \cos 2x + 2 \cos x + 3 = 0$

☐ $\cos 2x + \sin x = \frac{3}{2}$

Ćwiczenie 6



Wszystkimi rozwiązaniami równania $\cos 4x - 8 \cos^2 x + 7 = 0$ są liczby postaci:

☐ $4k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $3k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 7



Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania równań

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5. korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
6. rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

- rozwiązuje równania typu: $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$,
- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens podwojonego argumentu do rozwiązywania równań trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda kosza i walizki;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania równań” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują kolejne ćwiczenia nr 6 i 7 z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Zastosowanie funkcji trygonometrycznych podwojonego kąta do rozwiązywania równań”.