



Pole powierzchni przekroju graniastopu prawidłowego trójkątnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Pole powierzchni przekroju graniastoslupa prawidłowego trójkątnego

Źródło: Hich Saidi, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W technice przekrój przedmiotu wykonuje się w celu pokazania jego wewnętrznej budowy. Wykonując przekrój przecina się dany przedmiot, a następnie odrzuca się część, znajdującą się pomiędzy płaszczyzną a obserwatorem. W matematyce przekroje możemy zaobserwować w bryłach geometrycznych. W wyniku tego otrzymujemy figurę płaską. W tym materiale omówimy, jakie przekroje możemy wyróżnić w graniastoslupie prawidłowym trójkątnym, a następnie wyznaczmy pola powierzchni tych przekrojów.

Zagadnienia w tym materiale wykraczają poza zapisy podstawy programowej, natomiast są ciekawym i stosunkowo łatwym uzupełnieniem zagadnień związanych z przekrojami prostopadłościanów i sześcianów.

Twoje cele

- Określisz, jaką figurą jest przekrój graniastoslupa prawidłowego trójkątnego.
- Obliczysz pola przekrojów graniastoslupa prawidłowego trójkątnego.
- Zastosujesz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję przekroju bryły.

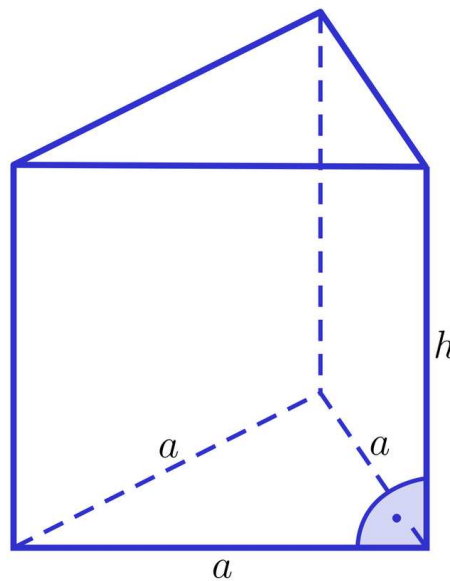
Definicja: Przekrój bryły

Figurę płaską, powstałą w wyniku przecięcia bryły płaszczyzną tnącą nazywamy przekrojem bryły.

Kształt przekroju bryły zależy między innymi od kąta nachylenia płaszczyzny tnącej i rodzaju bryły, przez którą ona przechodzi.

W materiale omówimy, jak obliczać pola przekrojów [garniastoslupa prawidłowego trójkątnego](#).

Garniastoslupem prawidłowym trójkątnym nazywamy garniastoslup prawidłowy, którego podstawą jest trójkąt równoboczny.



Pole powierzchni całkowitej garniastoslupa trójkątnego z rysunku obliczamy ze wzoru:

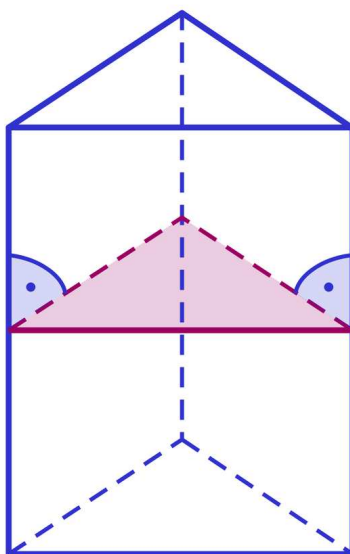
$$P_c = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot h$$

Objętość garniastoslupa prawidłowego trójkątnego z rysunku obliczamy ze wzoru:

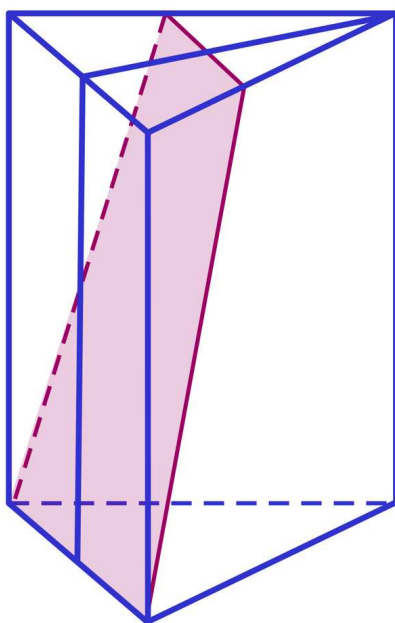
$$V = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Poniżej przedstawimy kilka różnych przekrojów garniastoslupa prawidłowego trójkątnego.

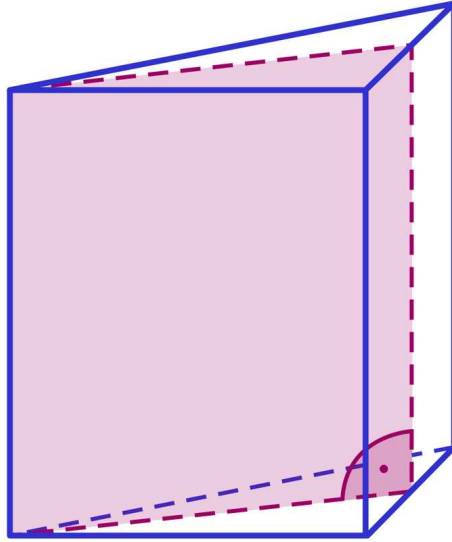
1. Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną równoległą do podstawy.



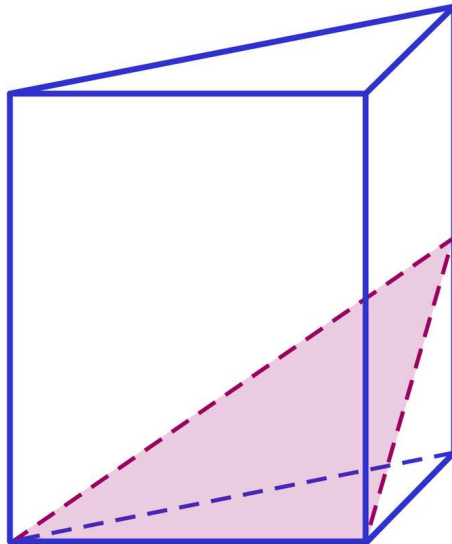
2. Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środek ciężkości górnej podstawy.



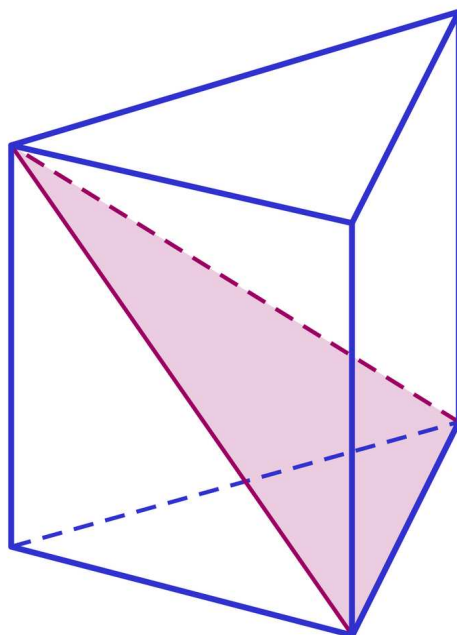
3. Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i krawędź boczną.



4. Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.



5. Przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek przeciwległej podstawy, należący do przeciwległej krawędzi bocznej.

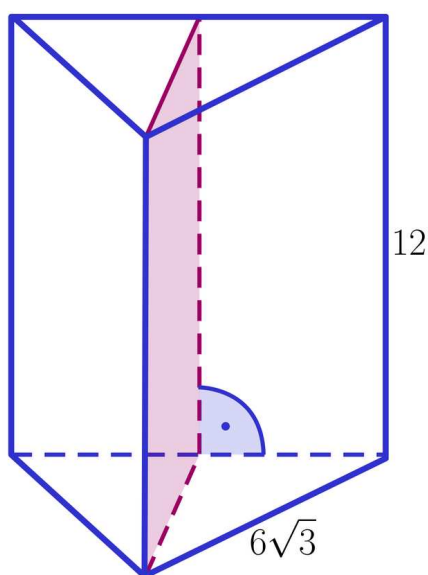


Przykład 1

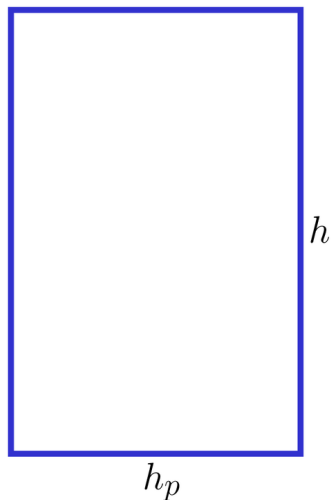
Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy $6\sqrt{3}$ i wysokości 12 przecięto płaszczyzną zawierającą wysokość podstawy i jedną z krawędzi bocznych. Obliczmy pole powierzchni otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie:

Narysujmy graniastosłup prawidłowy trójkątny, omawiany przekrój i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Zauważmy, że omawiany przekrój jest prostokątem o bokach będących wysokością podstawy h_p i krawędzią boczną h .



Wobec tego:

$$h_p = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$$

$$h = 12$$

Zatem pole przekroju jest równe:

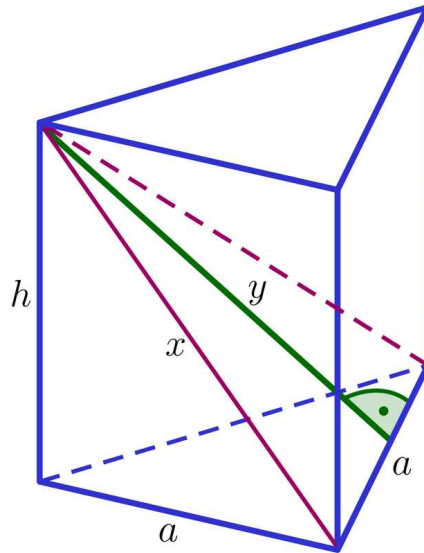
$$P = 9 \cdot 12 = 108.$$

Przykład 2

Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i wierzchołek przeciwległej krawędzi bocznej, nienależący do tej podstawy. Obliczymy pole tego przekroju, jeżeli krawędź podstawy graniastosłupa ma długość 8, a wysokość $4\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy graniastosłup prawidłowy trójkątny z opisaną płaszczyzną przekroju i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Otrzymany przekrój jest trójkątem równoramiennym.

Z treści zadania mamy następujące dane:

$$a = 8$$

$$h = 4\sqrt{2}$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$a^2 + h^2 = x^2$$

$$x^2 = 8^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$x^2 = 64 + 32 = 96$$

$$x = 4\sqrt{6}$$

Do wyznaczenia wysokości trójkąta, korzystamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + y^2 = x^2$$

$$4^2 + y^2 = (4\sqrt{6})^2$$

$$16 + y^2 = 96$$

$$y^2 = 80$$

$$y = 4\sqrt{5}$$

Wobec tego pole przekroju jest równe:

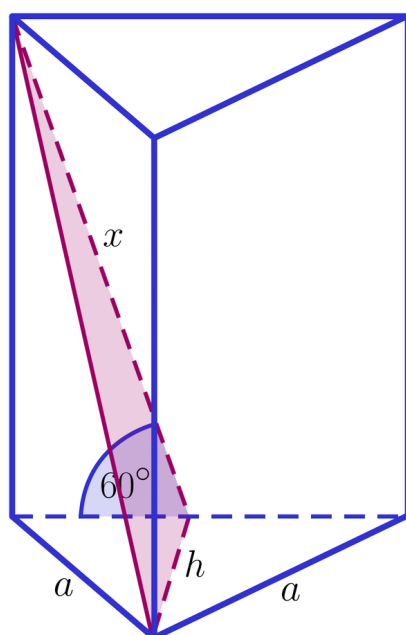
$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5}.$$

Przykład 3

W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędzi podstawy równej 8, poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez wysokość dolnej podstawy oraz wierzchołek górnej podstawy. Obliczmy pole otrzymanego przekroju wiedząc, że płaszczyzna ta tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 60° .

Rozwiązanie:

Narysujmy graniastosłup prawidłowy trójkątny, omawiany przekrój i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Krawędź podstawy graniastosłupa ma długość $a = 8$ oraz $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Zatem:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{x} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = a = 8$$

Zauważmy, że trójkąt otrzymany w wyniku przekroju jest prostokątny.

Wobec tego pole trójkąta jest równe:

$$P = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

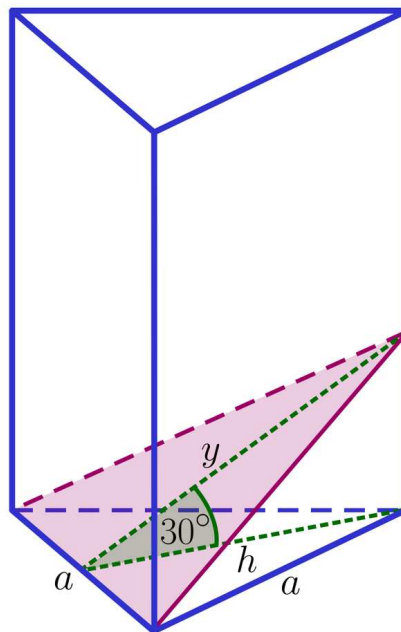
Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i pewien punkt należący do przeciwległej krawędzi bocznej tak, że płaszczyzna jest nachylona do podstawy pod kątem 30° . Obliczmy pole powierzchni otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź podstawy ma długość $2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy graniastosłup trójkątny, omawiany przekrój oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.

Przekrój jest trójkątem równoramiennym.



Ponieważ płaszczyzna jest nachylona do podstawy pod kątem 30° , więc:

$$\frac{h}{y} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wobec tego $y = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Ponieważ $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $a = 2\sqrt{2}$, to:

$$y = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2}$$

Zatem pole powierzchni przekroju jest równe:

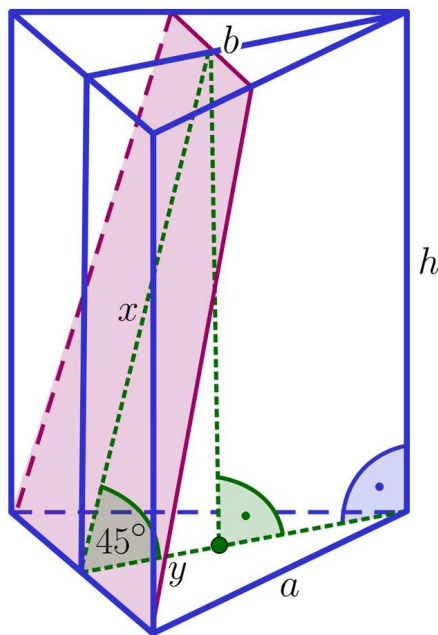
$$P = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$$

Przykład 5

Graniastosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środek ciężkości górnej podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe $15\sqrt{6}$, a płaszczyzna jest nachylona do dolnej podstawy pod kątem 45° . Wyznamy długości krawędzi tego graniastosłupa.

Rozwiązanie:

Narysujmy graniastosłup prawidłowy trójkątny wraz z odpowiednim przekrojem i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Wiadomo, że środek ciężkości dzieli wysokość podstawy graniastosłupa w stosunku 2 : 1 .

Otrzymany przekrój jest trapezem równoramiennym.

Zatem:

$$b = \frac{2}{3}a$$

$$\frac{h}{y} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow h = y$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$x = y\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Ponieważ pole przekroju jest równe $15\sqrt{6}$, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{2}{3}a\right) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = 15\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = 15\sqrt{6}$$

$$\frac{5a^2\sqrt{6}}{36} = 15\sqrt{6}$$

$$a^2 = 108 \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$$

Zatem

$$h = y = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{6} = 3$$

Wobec tego krawędź podstawy graniastosłupa ma długość $6\sqrt{3}$, a wysokość 3.

Słownik

graniastosłup prawidłowy trójkątny

graniastosłup prosty, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

Animacja 3D

Polecenie 1

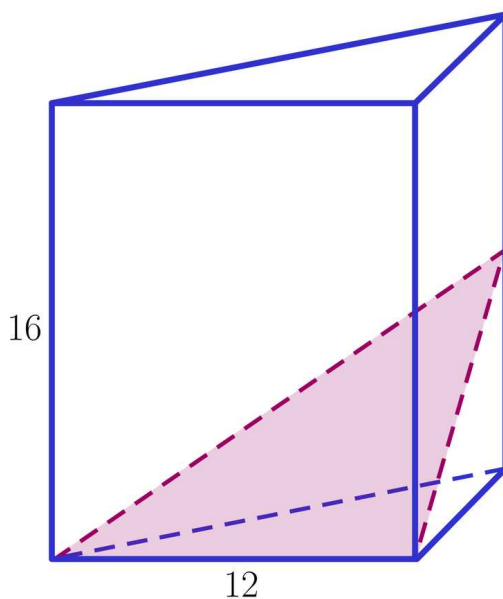
Obejrzyj animację 3D, dotyczącą wyznaczania pola przekroju graniastopuła prawidłowego czworokątnego, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DBsdlowmG>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący pola powierzchni przekroju graniastopuła prawidłowego trójkątnego.

Polecenie 2

Oblicz pole przekroju graniastopuła prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przedstawioną na poniższym rysunku, jeżeli wiadomo, że wierzchołek trójkąta jest środkiem krawędzi bocznej.



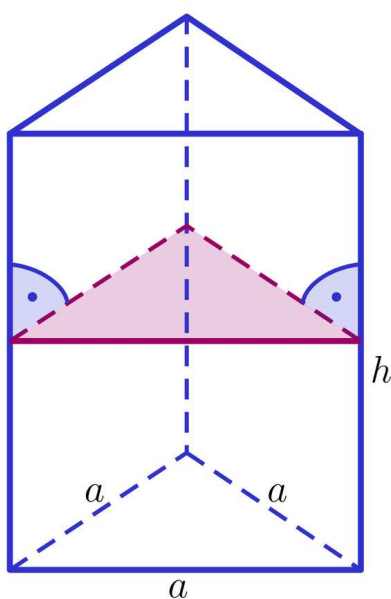
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na rysunku przedstawiono przekrój graniastopu prawidłowego trójkątnego płaszczyzną równoległą do podstawy. Jeżeli pole powierzchni całkowitej tego graniastopu jest równe $80\sqrt{3}$, a krawędź boczna ma długość $2\sqrt{3}$, to pole powierzchni przekroju jest równe:



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $32\sqrt{3}$

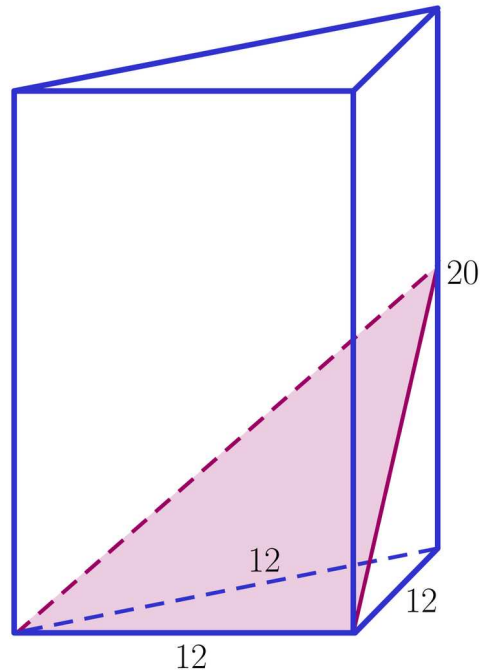
☐ $48\sqrt{3}$

☐ $16\sqrt{3}$

Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono przekrój graniastopu prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Przekrój przedstawiony na rysunku jest trójkątem równobocznym.

☐ Pole powierzchni przekroju z rysunku jest równe $48\sqrt{13}$.

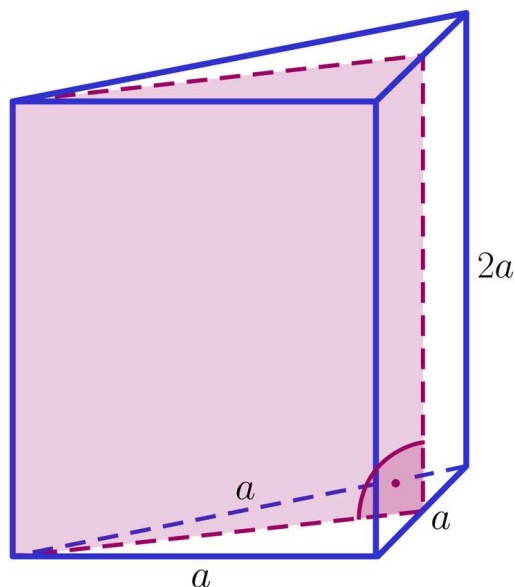
☐ Pole powierzchni przekroju z rysunku jest równe $24\sqrt{13}$.

☐ Przekrój przedstawiony na rysunku jest trójkątem równoramiennym.

Ćwiczenie 3

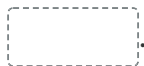


Na rysunku przedstawiono przekrój graniastopu prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez wysokość podstawy i krawędź boczną.

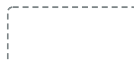


Przeciągnij i upuść.

Przekrój graniastopu prawidłowego trójkątnego z rysunku jest prostokątem o bokach $2a$ i



Pole narysowanego przekroju graniastopu jest równe



Przekątna przekroju graniastopu ma długość



- $a^2\sqrt{3}$
- $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
- $2a$
- $\frac{a\sqrt{19}}{2}$
- $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $a\sqrt{3}$

Ćwiczenie 4

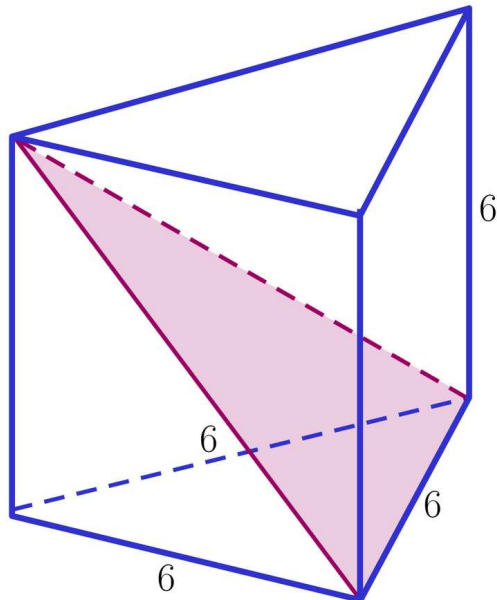


Oblicz pole przekroju graniastopu prawidłowego trójkątnego, jeżeli płaszczyzna przekroju przechodzi przez krawędź dolnej podstawy i środki krawędzi górnej podstawy oraz krawędź podstawy ma długość 8, a krawędź boczna 12.

Ćwiczenie 5



Na rysunku przedstawiono przekrój graniastostupa prawidłowego trójkątnego pewną płaszczyzną.



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Ramię trójkąta będącego przekrojem graniastostupa prawidłowego trójkątnego ma długość

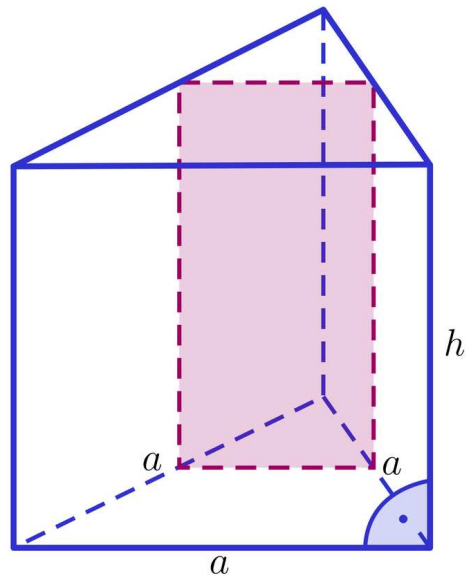
Wysokość trójkąta będącego przekrojem graniastostupa prawidłowego trójkątnego z rysunku, opuszczona na najkrótszy bok trójkąta ma długość

Pole rozpatrywanego przekroju wynosi

Ćwiczenie 6



Jeżeli wierzchołki prostokąta są środkami krawędzi podstaw graniastopu prawidłowego trójkątnego z rysunku, to:



Zaznacz poprawną odpowiedź.



pole powierzchni bocznej graniastopu jest trzy razy większe od pola powierzchni narysowanego przekroju



pole powierzchni przekroju jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni jednej ściany bocznej graniastopu

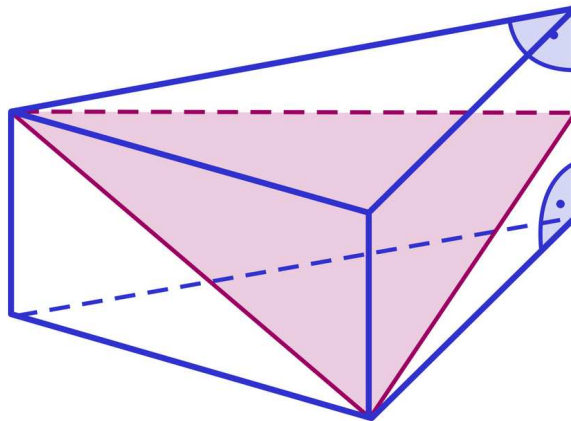


dla $h = a$ przekrój jest kwadratem

Ćwiczenie 7



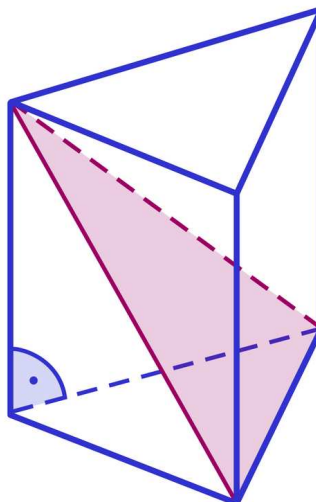
Gnaniastół prawidóły trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez dwa wierzchołki oraz środek przeciwległej krawędzi bocznej, tak jak na poniższym rysunku. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź podstawy gnaniastółu ma długość 6, a krawędź boczna ma długość 4.



Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono przekrój gnaniastółu prawidółego trójkątnego pewną płaszczyzną. Oblicz obwód oraz pole tego przekroju, jeżeli wszystkie krawędzie gnaniastółu mają długość a .



Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni przekroju graniastosłupa prawidłowego trójkątnego

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

Zakres rozszerzony 2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa, jaką figurą jest przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego;
- oblicza pola przekrojów graniastosłupa prawidłowego czworokątnego;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- metoda krokodyla;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Pole powierzchni przekroju graniastosłupa prawidłowego trójkątnego” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów na obliczanie pola powierzchni przekroju graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja 3D”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Pole powierzchni przekroju graniastosłupa prawidłowego trójkątnego”).

Materiały pomocnicze:

- [Przekrój bryły – graniastosłup prawidłowy trójkątny](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Animacja 3D” do pracy przed lekcją lub do realizacji lekcji „Wybrane przekroje graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.” Uczniowie zapoznają się z jej treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązywać zaproponowane zadania.