



Proporcjonalność prosta i jej wykres

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



W tym materiale poznasz wiadomości dotyczące funkcji nazywanej proporcjonalnością prostą. Nie jest to wiedza wyłącznie teoretyczna, ponieważ możesz wykorzystać ją z pewnością chociażby w kuchni, gdy będziesz na przykład przygotowywać się do przyjęcia swoich dwunastu znajomych, mając przed sobą przepis na przyrządzenie trzech brownie (ciasta czekoladowego, typowego dla kuchni amerykańskiej).



Źródło: Toa Heftiba, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Zauważysz, jaki jest związek pomiędzy wielkościami wprost proporcjonalnymi, a tą funkcją. Funkcję określisz dla liczb rzeczywistych dodatnich, naszkicujesz jej wykres oraz dowiesz się, jak znajdować wartości parametrów przy użyciu wzoru tej funkcji. Bazując na wiedzy teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążesz ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zdefiniujesz funkcję, nazywaną proporcjonalnością prostą.
- Naszkicujesz wykres funkcji, będącej proporcjonalnością prostą.
- Obliczysz wartości funkcji, będącej proporcjonalnością prostą dla różnych argumentów.
- Wykorzystasz funkcję, będącą proporcjonalnością prostą do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Już wiesz

Dwie zmienne wielkości nazywamy wprost proporcjonalnymi, jeżeli iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały.

W przypadku dodatnich **wielkości wprost proporcjonalnych**, wzrost lub zmniejszenie jednej wielkości tyle samo razy, powoduje odpowiednio wzrost lub zmniejszenie drugiej wielkości tyle samo razy.

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są na przykład:

- długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód,
- długość średnicy koła i jego obwód,
- droga i czas przy stałej prędkości.

Zdefiniujmy funkcję, która określa zależność pomiędzy dodatnimi wielkościami wprost proporcjonalnymi.

Definicja: proporcjonalność prosta

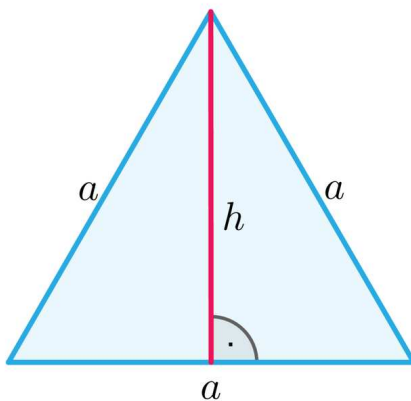
Funkcję f określoną wzorem $f(x) = a \cdot x$, gdzie $a > 0$ na zbiorze \mathbb{R}_+ nazywamy proporcjonalnością prostą.

Gdy będziemy używać zapisu $y = f(x)$, wtedy proporcjonalność prostą wyrazimy wzorem $y = a \cdot x$.

W powyższej definicji określiliśmy funkcję tylko na zbiorze liczb dodatnich, dla potrzeb wykorzystania własności tej funkcji w zadaniach z kontekstem realistycznym.

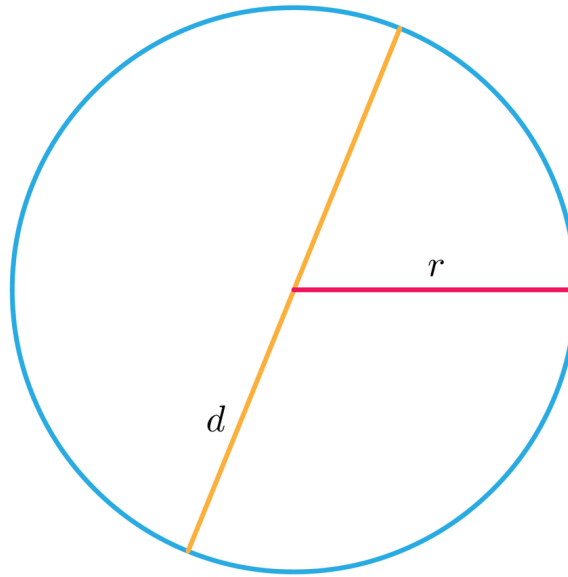
Przykłady zależności wprost proporcjonalnych.

1. Zależność pomiędzy wysokością h trójkąta równobocznego, a długością boku a .



Odpowiednią funkcję w tym przypadku określamy za pomocą wzoru $h(a) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$, gdzie $a > 0$. Współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Zależność pomiędzy długością średnicy okręgu, a długością promienia.



Odpowiednią funkcję określamy za pomocą wzoru $d(r) = 2 \cdot r$, gdzie $r > 0$. Wtedy współczynnik proporcjonalności wynosi 2.

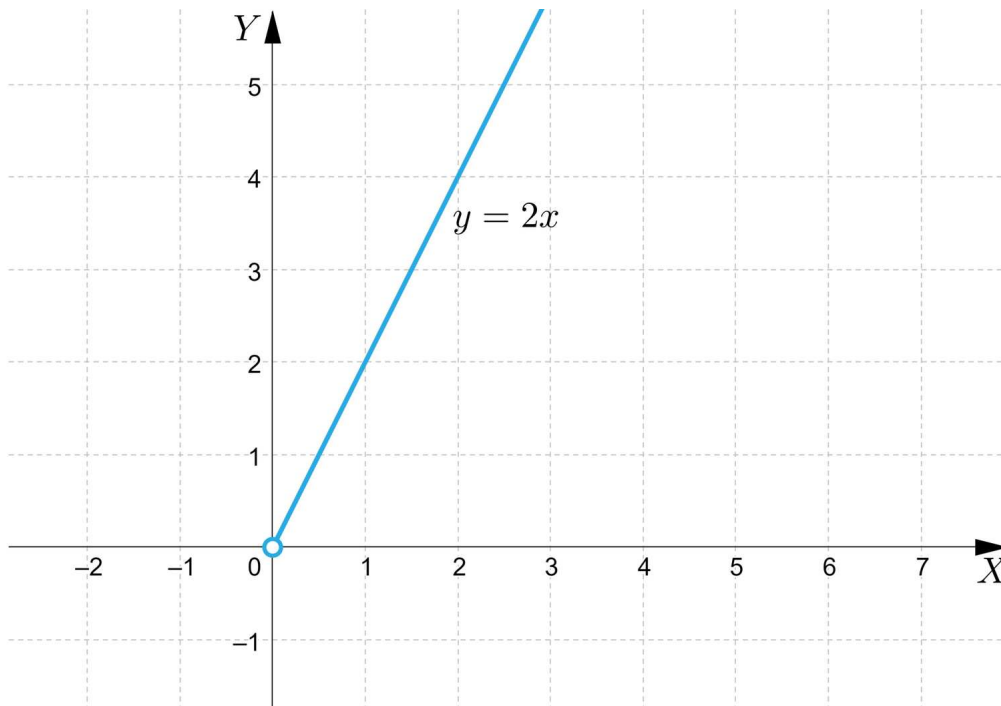
3. Zależność pomiędzy obwodem L n -kąta foremnego, a długością boku x . Odpowiednią funkcję określamy za pomocą wzoru $L(x) = n \cdot x$, gdzie $x > 0$. Wtedy współczynnik proporcjonalności jest równy n . Wykresem proporcjonalności prostej (w przypadku, gdy funkcja określona jest tylko w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich) jest półprosta o początku w punkcie o współrzędnych $(0, 0)$ – bez tego punktu – leżąca w I ćwiartce układu współrzędnych.

Naszkuje wykresem proporcjonalności prostej określonej wzorem $y = 2 \cdot x$.

W tym celu w tabeli przedstawimy wartości tej funkcji dla kilku argumentów:

x	1	2	3
y	2	4	6

Wykres tej funkcji przedstawia się następująco:

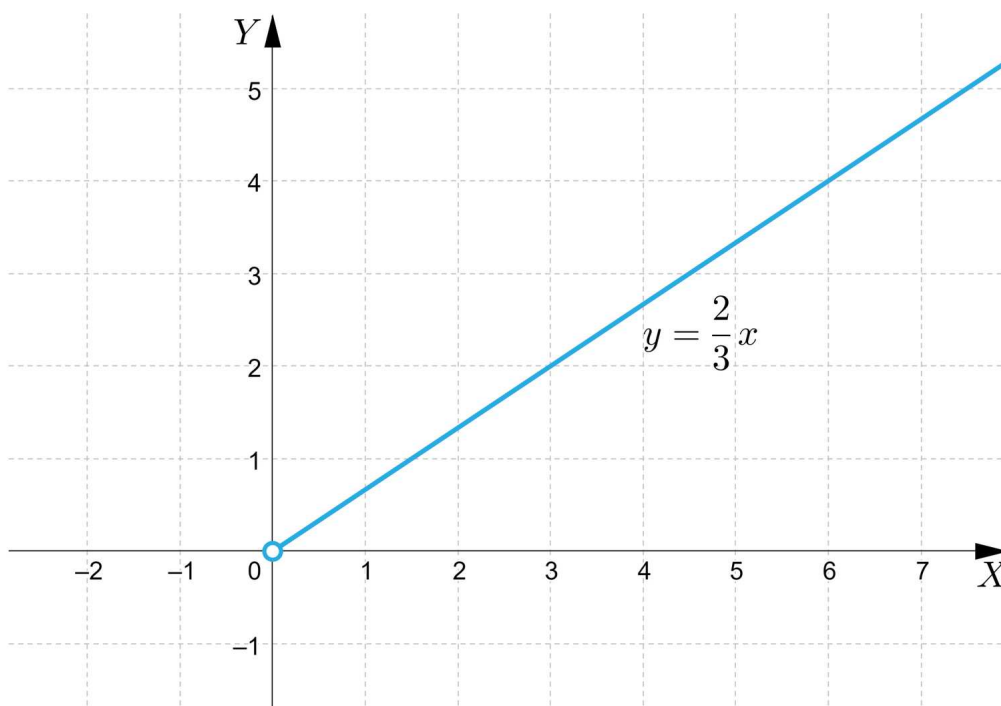


Naszukujemy wykres funkcji, będącej proporcjonalnością prostą określoną wzorem $y = \frac{2}{3} \cdot x$.

W tym celu przedstawimy w tabeli wartości tej funkcji dla kilku argumentów:

x	3	6	9
y	2	4	6

Wykres tej funkcji przedstawia się następująco:



Przykład 1

Wyznamy wartość parametru m , jeżeli punkty o współrzędnych $A = (\frac{2}{3}, 4)$ i $B = (3, m)$ należą do wykresu tej samej proporcjonalności prostej.

Rozwiązanie

Wzór funkcji, będącej proporcjonalnością prostą zapisujemy w postaci $y = a \cdot x$.

Do wyznaczenia wartości a podstawiamy współrzędne punktu A i rozwiązujemy równanie:

$$4 = a \cdot \frac{2}{3}, \text{ zatem } a = 6.$$

Funkcja, będąca proporcjonalnością prostą wyraża się wzorem $y = 6 \cdot x$.

Do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy równanie

$$m = 6 \cdot 3, \text{ zatem } m = 18.$$

Przykład 2

W tabeli przedstawiono argumenty oraz odpowiadające im wartości funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, określonej wzorem $y = a \cdot x$. Wyznamy wartości m , n , p .

x	3	5	n	9
y	4,5	m	12	p

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie

$$4,5 = a \cdot 3, \text{ zatem } a = \frac{3}{2}.$$

Zatem funkcja wyraża się wzorem $y = \frac{3}{2} \cdot x$.

Wyznamy wartości m , n , p .

$$m = \frac{3}{2} \cdot 5, \text{ zatem } m = \frac{15}{2}$$

$$12 = \frac{3}{2} \cdot n, \text{ zatem } n = 8$$

$$p = \frac{3}{2} \cdot 9, \text{ zatem } p = \frac{27}{2}.$$

Przykład 3

Sprawdzimy, czy do wykresu tej samej funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, mogą należeć punkty P i Q o współrzędnych $P = (\frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ oraz $Q = (4, 10)$.

Rozwiązanie

Funkcja, będąca **proporcjonalnością prostą** wyraża się wzorem $y = a \cdot x$.

Do wyznaczenia wartości a do wzoru funkcji $y = a \cdot x$ podstawiamy współrzędne punktu P i rozwiązujemy równanie:

$$\frac{5}{6} = a \cdot \frac{1}{3}, \text{ zatem } a = \frac{5}{2}.$$

Zatem funkcja, będąca proporcjonalnością prostą wyraża się wzorem $y = \frac{5}{2} \cdot x$.

Sprawdźmy, czy punkt Q należy do wykresu tej funkcji. W tym celu rozwiążemy równanie:

$$10 = \frac{5}{2} \cdot 4, \text{ zatem } 10 = 10.$$

Wobec tego podane punkty należą do wykresu funkcji tej samej proporcjonalności prostej.

Przykład 4

Wiadomo, że do wykresu funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, określonej wzorem $f(x) = a \cdot x$ należy punkt o współrzędnych $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Wyznamy:

- wartość współczynnika proporcjonalności a ,
- wartość tej funkcji dla $x = 4$.

Rozwiązanie

a) Jeżeli punkt o współrzędnych $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ należy do wykresu funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

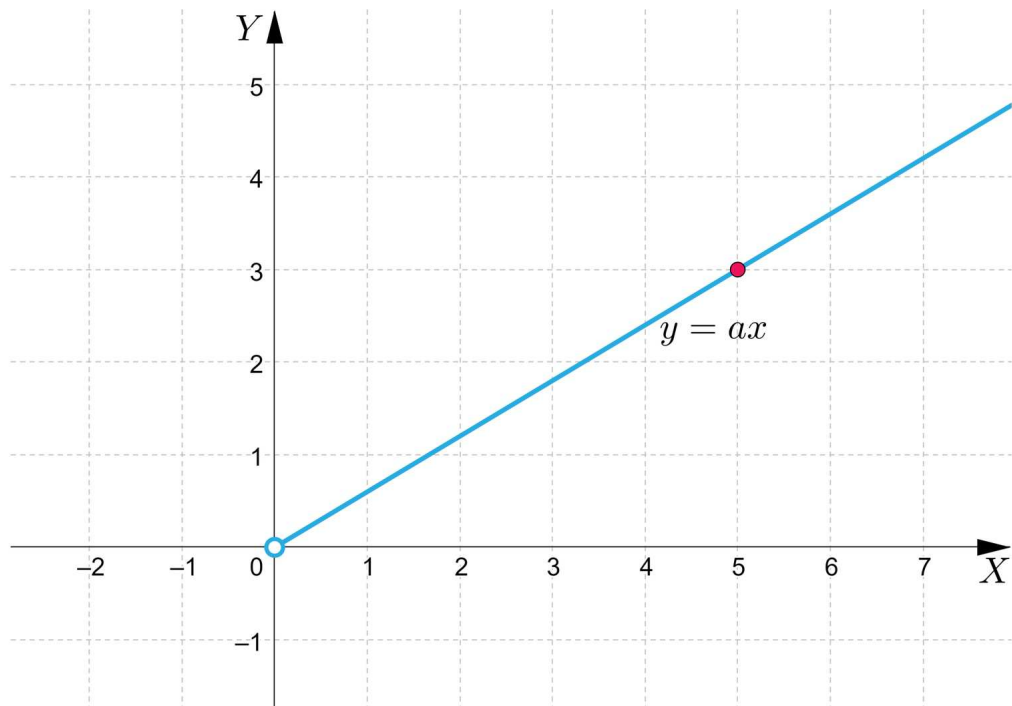
$$\frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{3}, \text{ zatem } a = \frac{3}{2}$$

b) Zapišemy wzór proporcjonalności prostej $f(x) = \frac{3}{2} \cdot x$.

Wobec tego $f(4) = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$.

Przykład 5

Na rysunku przedstawiono wykres proporcjonalności prostej określonej wzorem $y = a \cdot x$. Wyznamy wzór tej funkcji.



Rozwiązanie

Z rysunku możemy odczytać, że do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(5, 3)$.

Jeżeli podstawimy współrzędne tego punktu do wzoru $y = a \cdot x$, to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie

$$3 = a \cdot 5, \text{ zatem } a = \frac{3}{5}.$$

Funkcję można opisać wzorem $y = \frac{3}{5} \cdot x$.

Przykład 6

Wykażemy, że funkcja, będąca proporcjonalnością prostą, zadana wzorem $f(x) = a \cdot x$, określona na zbiorze \mathbb{R}_+ jest zawsze rosnąca.

Rozwiązanie:

Założmy, że $x_1, x_2 \in D_f$ oraz $x_1 < x_2$.

$$\text{Wtedy } f(x_2) - f(x_1) = a \cdot x_2 - a \cdot x_1 = a \cdot (x_2 - x_1).$$

Ponieważ $a > 0$ oraz $x_1 < x_2$, zatem $a \cdot (x_2 - x_1) > 0$, czyli

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Stąd, wobec dowolności x_1, x_2 wnioskujemy, że funkcja jest rosnąca.

Słownik

wielkości wprost proporcjonalne

dwie zmienne wielkości dodatnie, przy założeniu, że iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały

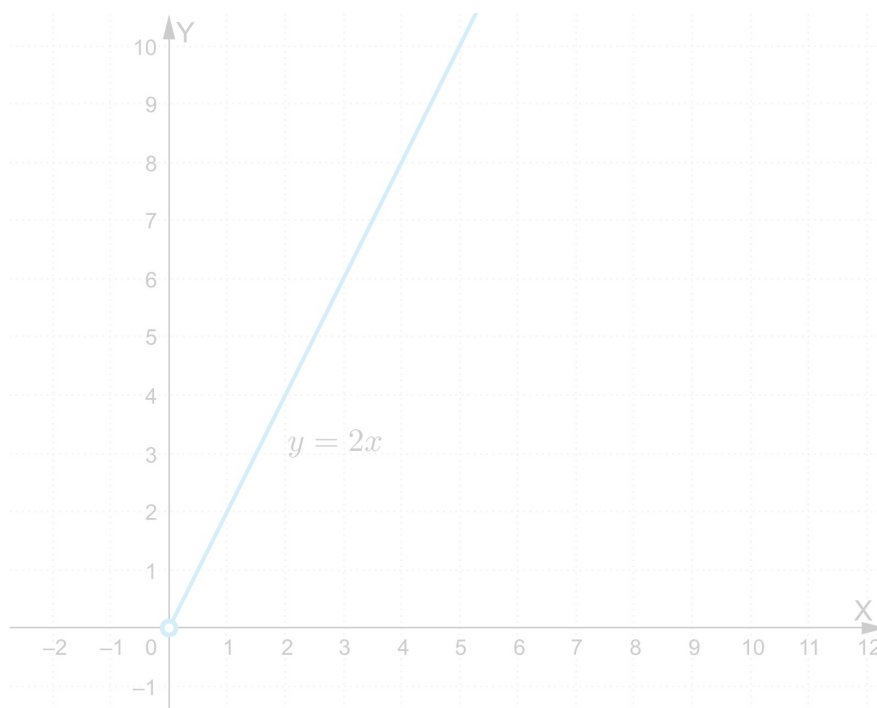
proporcjonalność prosta

funkcja określona wzorem $f(x) = ax$, gdzie $a > 0$ na zbiorze \mathbb{R}_+

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem, a następnie przeanalizuj zmiany położenia wykresu funkcji, będącej proporcjonalnością prostą w zależności od wartości współczynnika a .






Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpGqY545I>

Polecenie 2

Wiadomo, że do wykresu funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, określonej wzorem $f(x) = a \cdot x$ należy punkt o współrzędnych $(4, \frac{1}{2})$.

Wyznamy wartość współczynnika a , a następnie naszkicujemy wykres tej funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wiadomo, że do wykresu funkcji, będącej proporcjonalnością prostą, określonej wzorem $y = a \cdot x$ należy punkt o współrzędnych $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3})$. Wyznacz wartość współczynnika a oraz naszkicuj wykres tej funkcji.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Proporcjonalność prosta i jej wykres

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje funkcję nazywaną proporcjonalnością prostą,
- szkicuje wykres proporcjonalności prostej,
- oblicza wartości proporcjonalności prostej dla różnych argumentów,
- wykorzystuje proporcjonalność prostą do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Proporcjonalność prosta i jej wykres” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Ekspersi proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się treścią materiału w sekcji „Aplet”, wykonują zawarte w tej części polecenia, a następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
5. Uczniowie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne 6-8 w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Proporcjonalność prosta i jej wykres”).

Materiały pomocnicze:

- [Proporcjonalność prosta.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można wykorzystać jako powtórzenie i utrwalenie wiadomości w zakresie proporcjonalności prostej i jej wykresu.
- „Aplet” można zastosować podczas lekcji dotyczącej szkicowania wykresów funkcji liniowej.