



# Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej

Źródło: dostępny w internecie: maxpixel.net, domena publiczna.

W tym materiale nauczymy się wyznaczać zbiór rozwiązań nierówności wymiernych. Koniecznie przypomnij sobie, w jaki sposób rozwiązuje się nierówności wielomianowe.

### Twoje cele

- Wyznaczysz zbiór rozwiązań nierówności wymiernej.
- Sformułujesz stosowne założenia.
- Rozwiążesz nierówności wymierne metodą nierówności równoważnych.
- Rozwiążesz nierówność wymierną, określając zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności wielomianowej.

# Przeczytaj

---

Wyznaczając zbiór rozwiązań nierówności wymiernej, będziemy korzystać z poniższego twierdzenia.

## Twierdzenie: o równoważności nierówności

1.  $\frac{a}{b} < 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab < 0$  i  $b \neq 0$ ,
2.  $\frac{a}{b} > 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab > 0$  i  $b \neq 0$ ,
3.  $\frac{a}{b} \leq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab \leq 0$  i  $b \neq 0$   
( $\frac{a}{b} \leq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab < 0$  lub  $a = 0$ ),
4.  $\frac{a}{b} \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab \geq 0$  i  $b \neq 0$   
( $\frac{a}{b} \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab > 0$  lub  $a = 0$ ).

Przypomnijmy algorytm rozwiązywania nierówności wymiernych

## I sposób

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Sprowadzamy nierówność do postaci ogólnej- przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę nierówności.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Nierówność wymierną rozwiązujemy doprowadzając ją do równoważnej postaci wielomianowej przy wyznaczonej dziedzinie nierówności wymiernej (zastępujemy iloraz iloczynem z uwzględnieniem założeń).
5. Wyznaczamy **pierwiastki wielomianu** oraz szkicujemy wykres.
6. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
7. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

## II sposób

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Mnożymy obustronnie nierówność przez kwadrat mianownika lub przez inne wyrażenia, których znak jest jednoznacznie określony.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Wyznaczamy pierwiastki wielomianu oraz szkicujemy wykres.
5. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
6. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

Rozwiążmy kilka przykładów.

### Przykład 1

Wyznaczamy **zbiór rozwiązań danej nierówności**  $\frac{2x+10}{5-x} \leq 0$ .

Rozwiązanie:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{5\}.$$

Korzystamy z twierdzenia

$$\frac{a}{b} \leq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } ab \leq 0 \text{ i } b \neq 0.$$

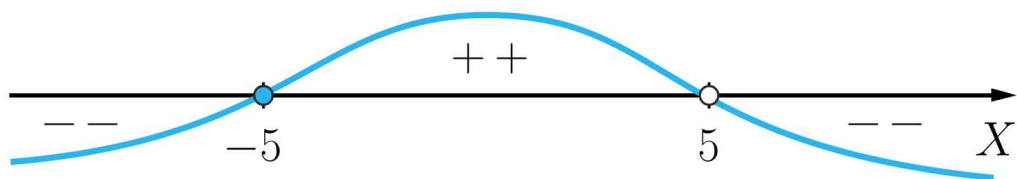
Możemy zapisać nierówność wymierną  $\frac{2x+10}{5-x} \leq 0$  w postaci równoważnej nierówności iloczynowej

$$(2x + 10)(5 - x) \leq 0 \text{ i } x \neq 5,$$

$$-2(x + 5)(x - 5) \leq 0 \text{ i } x \neq 5.$$

Wielomian  $W(x) = -2(x + 5)(x - 5)$  ma dwa jednokrotne pierwiastki:  $(-5), 5$ .

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej  $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$  szcicujemy wykres.



Zbiorem rozwiązań nierówności jest zbiór  $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$ .

Następny przykład rozwiążemy na kilka sposobów.

### Przykład 2

Podajmy zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{x^2}{-x^2-9} > 3x$ .

Określamy dziedzinę nierówności wymiernej:

$$-x^2 - 9 \neq 0,$$

$$x^2 \neq -9,$$

$$\text{czyli } D = \mathbb{R}.$$

I sposób rozwiązania nierówności wymiernej

Przekształcamy nierówność do postaci ogólnej

$$\frac{x^2}{-x^2-9} - 3x > 0,$$

$$\frac{x^2-3x(-x^2-9)}{-x^2-9} > 0,$$

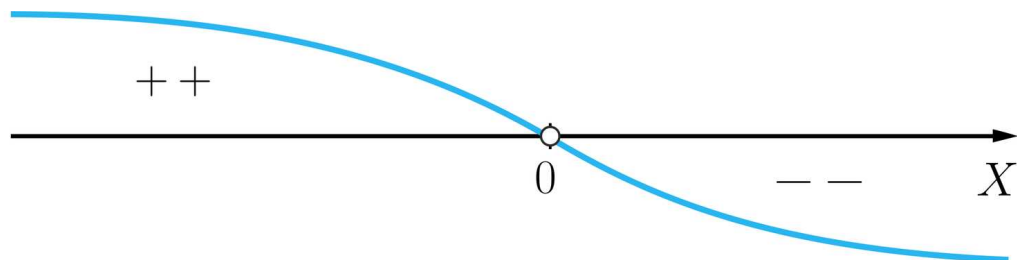
$$\frac{x^2+3x^3+27x}{-x^2-9} > 0,$$

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej nierówności iloczynowej

$$(x^2 + 3x^3 + 27x)(-x^2 - 9) > 0,$$

$$-x(3x^2 + x + 27)(x^2 + 9) > 0.$$

Jedynym jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = -x(3x^2 + x + 27)(x^2 + 9)$  jest liczba 0.



Na podstawie fragmentu wykresu nierówności wielomianowej odczytujemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartości dodatnie. Zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej jest przedział  $(-\infty; 0)$ .

II sposób rozwiązania nierówności wymiernej

$$\frac{x^2}{-x^2-9} > 3x \quad | \cdot (-x^2 - 9)$$

Daną nierówność wymierną możemy pomnożyć obustronnie przez  $(-x^2 - 9)$ , ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność  $(-x^2 - 9) < 0$ .

Zwrot nierówności zmienia się na przeciwny, ponieważ nierówność mnożymy obustronnie przez wyrażenie ujemne.

Stąd

$$x^2 < 3x \cdot (-x^2 - 9),$$

$$x^2 < -3x^3 - 27x,$$

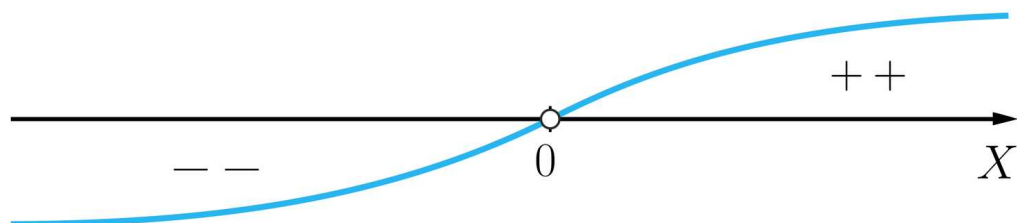
$$3x^3 + 27x + x^2 < 0,$$

$$x(3x^2 + x + 27) < 0.$$

Wielomian  $R(x) = x(3x^2 + x + 27)$  ma jeden pierwiastek jednokrotny: 0.

Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej  $x$  jest dodatni.

Szkicujemy fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = R(x)$ .



Zbiorem rozwiązań nierówności  $\frac{x^2}{-x^2-9} > 3x$  jest przedział  $(-\infty; 0)$ .

III sposób rozwiązania nierówności wymiernej

$$\frac{x^2}{-x^2-9} > 3x \quad | \cdot (-x^2 - 9)^2$$

Daną nierówność możemy pomnożyć obustronnie przez  $(-x^2 - 9)^2$ .

Wyrażenie  $(-x^2 - 9)^2$  jest dodatnie dla każdej liczby ze zbioru  $D = \mathbb{R}$ .

Zwrot nierówności pozostanie bez zmiany, ponieważ nierówność mnożymy obustronnie przez wyrażenie dodatnie.

Wówczas

$$\frac{x^2}{-x^2-9} \cdot (-x^2 - 9)^2 > 3x \cdot (-x^2 - 9)^2,$$

$$x^2 \cdot (-x^2 - 9) > 3x \cdot (-x^2 - 9)^2.$$

Przenieśmy wszystkie wyrażenia na jedną stronę nierówności

$$x^2 \cdot (-x^2 - 9) - 3x \cdot (-x^2 - 9)^2 > 0.$$

Wyłączmy  $x \cdot (-x^2 - 9)$  przed nawias.

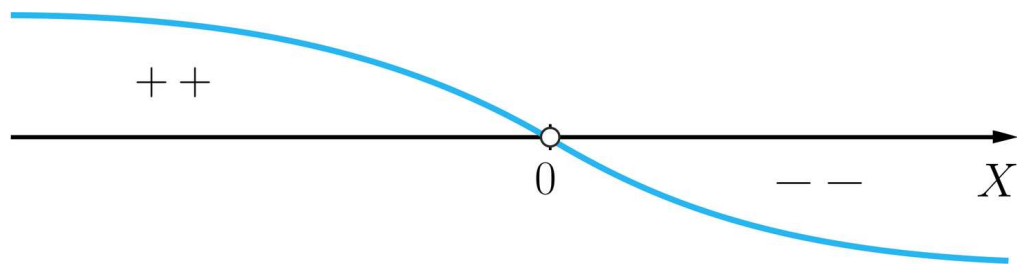
Zatem

$$x \cdot (-x^2 - 9) [x - 3(-x^2 - 9)] > 0$$

$$x \cdot (-x^2 - 9) (3x^2 + x + 27) > 0.$$

Jedynym jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu  $S(x) = x \cdot (-x^2 - 9)(3x^2 + x + 27)$  jest liczba 0.

Poniżej przedstawmy fragment wykresu funkcji wielomianowej  $y = S(x)$ .



Odczytujemy zbiór tych wszystkich argumentów, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartości dodatnie.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział  $(-\infty; 0)$ .

Warto zauważyć, że zbiór rozwiązań danej nierówności jest taki sam, mimo zastosowania kilku sposobów rozwiązania zadania.

### Przykład 3

Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{2x-1}{x^3-3x^2} \geq \frac{x-2}{x^3+x^2}$ .

Założenie:  $x^3 - 3x^2 \neq 0$ ,  $x^3 + x^2 \neq 0$

$$x^2(x-3) \neq 0, x^2(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 0, x \neq 3, x \neq -1.$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 3\}.$$

Rozkładamy na czynniki wyrażenia występujące w mianowniku

$$\frac{2x-1}{x^2(x-3)} \geq \frac{x-2}{x^2(x+1)}.$$

Pomnóżmy obie strony nierówności przez  $x^2$ .

Wyrażenie  $x^2$  jest dodatnie dla każdej liczby ze zbioru  $D$ .

Zwrot nierówności pozostaje bez zmiany

$$\frac{2x-1}{x-3} \geq \frac{x-2}{x+1}.$$

Sprowadźmy nierówność do postaci ogólnej

$$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{x-2}{x+1} \geq 0,$$

$$\frac{(2x-1)(x+1)-(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2+x-1-(x^2-5x+6)}{(x-3)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{2x^2+x-1-x^2+5x-6}{(x-3)(x+1)} \geq 0,$$

$$\frac{x^2+6x-7}{(x-3)(x+1)} \geq 0.$$

Korzystamy z twierdzenia

$\frac{a}{b} \geq 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $ab \geq 0$  i  $b \neq 0$ .

Inaczej zapisujemy nierówność w postaci równoważnej nierówności iloczynowej

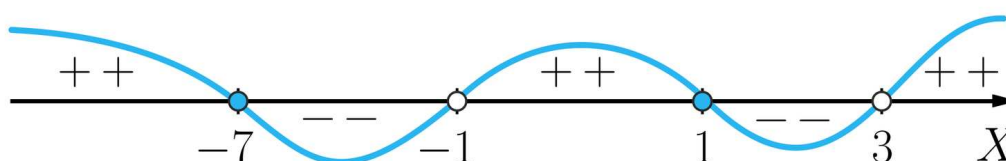
$$(x^2 + 6x - 7)(x - 3)(x + 1) \geq 0,$$

$$(x + 7)(x - 1)(x - 3)(x + 1) \geq 0.$$

Wielomian  $W(x) = (x + 7)(x - 1)(x - 3)(x + 1)$  ma cztery pierwiastki jednokrotne:  $(-7), (-1), 1, 3$ .

Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej  $x$  jest dodatni.

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 3\}$  szkicujemy wykres.



Odczytujemy zbiór argumentów, dla których funkcja wielomianowa przyjmuje wartości nieujemne.

Zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej  $\frac{2x-1}{x^3-3x^2} \geq \frac{x-2}{x^3+x^2}$  jest zbiór  $(-\infty; -7) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$ .

## Słownik

**zbiór rozwiązań nierówności z jedną niewiadomą**

każda liczba rzeczywista, która spełnia tę nierówność.

### **dziedzina nierówności wymiernej**

dziedzina nierówności wymiernej są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem pierwiastków wielomianu  $W_2(x)$  znajdującego się w mianowniku danego wyrażenia  $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x : W_2(x) = 0\}$$

### **pierwiastek wielomianu**

pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  nazywamy liczbę rzeczywistą  $a$ , dla której  $W(a) = 0$

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją, a następnie wykonaj polecenie 2 i 3.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DZ6qtXVpT>

Film nawiązujący do treści materiału

---

## Polecenie 2

Rozwiązaniem nierówności  $\frac{x+7}{x-7} \leq 0$  jest zbiór

☐  $x \in \langle -7; 7 \rangle$

☐  $x \in (-\infty; -7) \cup \langle 7; +\infty \rangle$

☐  $x \in (-\infty; -7] \cup (7; +\infty)$

☐  $x \in \langle -7; 7 \rangle$

## Polecenie 3

Połącz w pary nierówność i jej zbiór rozwiązań

$\frac{1}{x-7} \geq \frac{2}{x+7}$

$x \in (-\infty; -7) \cup (7; 21]$

$\frac{x-7}{x+7} \geq 0$

$x \in (-\infty; -7) \cup \langle 7; +\infty \rangle$

$\frac{5x^2+35x}{x^2-49} \geq -2$

$x \in (-\infty; -7) \cup (-7; 2) \cup (7; +\infty)$

$\frac{x^2-49}{x-7} \geq 0$

$x \in \langle -7; 7 \rangle \cup (7; +\infty)$

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Rozwiązaniem nierówności  $\frac{x+3}{x^2+6x+9} \leq \frac{1}{x+3}$  jest zbiór

☐  $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

☐  $\mathbb{R}$

☐  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

☐  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

## Ćwiczenie 2



Wskaż liczby należące do zbioru rozwiązań nierówności wymiernej postaci  $\frac{x^2-5x+9}{x^2-6x+5} < 1$

☐ 0

☐ -10

☐ 2

☐ -4

### Ćwiczenie 3



Każdej nierówności przyporządkuj jej zbiór rozwiązań.

Zbiór pusty

$$\frac{x^2+4x+6}{5x^2+6} < 0$$

$$\frac{2}{x^2+2x+6} \leq \frac{3}{x^2+5x+7}$$

$$\frac{-3}{x^2+\pi} < 0$$

$$\frac{-2x^2-8}{x^2+4} > 0$$

$$\frac{2x-3}{x^2+9} \geq 2$$

$$\frac{4x^2}{x^2+5} \geq 4$$

$$\frac{6x^2+4x+10}{4x^2-2x+8} \geq 0$$

Zbiór liczb rzeczywistych

### Ćwiczenie 4



Zbiorem rozwiązań nierówności wymiernej

|                                             |      |                                                 |
|---------------------------------------------|------|-------------------------------------------------|
| $\frac{x^2-9}{x-1} \leq \frac{-5}{x-1}$     | jest | $x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2)$               |
| $\frac{x^2-2}{x^2-1} \leq \frac{x}{x-1}$    | jest | $x \in \langle -2; 1) \cup \langle 2; +\infty)$ |
| $\frac{x}{x-1} \geq \frac{x^2-2}{x^2-2x+1}$ | jest | $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$                |
| $\frac{x^2-4}{x-1} \geq 0$                  | jest | $x \in \langle -2; -1) \cup (1; +\infty)$       |

### Ćwiczenie 5



Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność

$$\frac{-(-x^2+15625)(x+125)(x-144)^2(x-125)}{(x^2-24x+144)(x+125)^2(x-144)} \leq 0$$

W poniższe pole wpisz kolejno-od lewej do prawej- cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

### Ćwiczenie 6



Rozwiąż nierówność:  $\frac{x-15}{x+5} \leq 0$ .

### Ćwiczenie 7



Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{x+1}{2x-4} > \frac{3}{2x-4} - \frac{1}{4}$ .

### Ćwiczenie 8



Wyznacz zbiór rozwiązań nierówności  $\frac{x+3}{x^2+6x+9} \geq \frac{2}{x+5}$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Monika Dudek

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wyznacza zbiór rozwiązań nierówności wymiernych;
- formułuje stosowne założenia;
- rozwiązuje nierówności wymierne metodą nierówności równoważnych;
- rozwiązuje złożone nierówności wymierne.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- praca z tekstem;
- dyskusja;
- burza mózgów.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z animacją dołączoną do materiału.

#### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają sposoby rozwiązania nierówności wymiernych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
3. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe lub 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione twierdzenie, przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują w grupach ćwiczenie nr 3,5,8 z sekcji „Sprawdź się”.
3. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
4. Wytypowane grupy prezentują swoje rozwiązania na tablicy. Nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie realizują indywidualnie kolejne ćwiczenia 1- 4 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

**Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
- Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie.

**Praca domowa:**

- Uczniowie rozwiązują zadania 5-8 z sekcji „Sprawdź się”.

**Materiały pomocnicze:**

- [Rozwiązywanie nierówności wymiernych](#)
- [Nierówności wielomianowe](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Fragment animacji można wykorzystać na lekcji jako wprowadzenie do tematu lekcji.

Animacja może być też pomocna na lekcji pokazującej zastosowania nierówności wielomianowych.