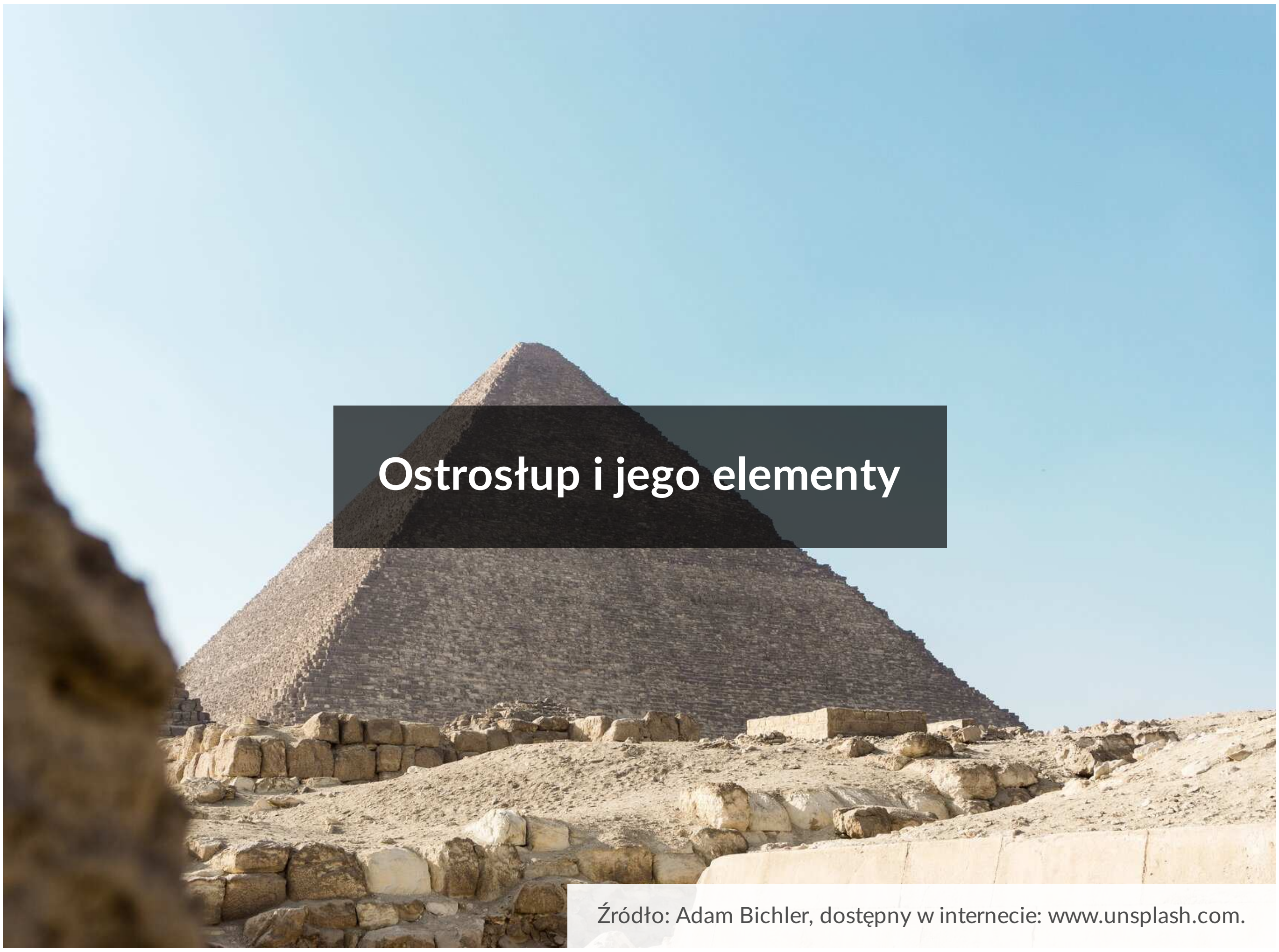
Ostrosłup i jego elementy

Ostrosłup i jego elementy



Źródło: Adam Bichler, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale rozpoczniesz pracę z wielościanami, które nazywamy ostrosłupami. Zauważ, że odpowiednikiem polskiego słowa ostrosłup w języku angielskim jest „a pyramid”, języku francuskim „une pyramide”, w języku niemieckim „der Pyramide” a w czeskim „pyramida”. Jak się domyślasz, nie bez przyczyny akurat ten obiekt starożytnej architektury egipskiej dał nazwę rodzinie ostrosłupów.

Piramidy Giza

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Piramida Cheopsa jest największym na świecie ostrosłupem prawidłowym czworokątnym. Gdyby z materiału użytego do jej budowy zbudować mur o wysokości 3 metrów i grubości 25 centymetrów, to można by tym murem otoczyć całą Polskę. Przypomnijmy, że budowa tej piramidy, pomimo jej monstrualnych rozmiarów, trwała tylko 20 lat. W tym materiale udoskonalisz umiejętność rozpoznawania brył, które są ostrosłupami, poznasz ich podstawowe własności i konsekwentnie nauczysz się wykorzystywać własności miarowe figur do rozwiązywania zadań o ostrosłupach.

Twoje cele

- Rozpoznasz, które bryły są ostrosłupami.
- Określisz podstawowe elementy, które definiują ostrosłup.
- Zastosujesz umiejętność rzutowania do tworzenia szkicu ostrosłupa, który ułatwi Ci zaplanowanie rozwiązania zadania.

Przeczytaj

Istnieją różne opinie co do matematycznej definicji wielościanu. Jugosłowiański matematyk Branko Grünbaum (1929 - 2018) wyraził następującą opinię: „Grzech pierworodny teorii wielościanów popełniony został już w czasach Euklidesa, i był popełniany przez Keplera, Poinsota, Chauchy'ego i wielu innych. Nigdy nie udało im się określić, czym są wielościany.” Aby nie powtórzyć tego błędu, zacznijmy od definicji ostrosłupa.

> **Definicja: Ostrosłup**
>
> Ostrosłupem nazywamy taki wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku, który nie należy do płaszczyzny podstawy.

Zobacz, jak różne mogą być ostrosłupy. Użyj punktów na suwakach, aby zmieniać rodzaj ostrosłupa, jego wysokość i promień. Poruszając myszką na ilustracji możesz zaobserwować kształt bryły z różnej perspektywy. Przeciągnij myszką, aby bryła zaczęła się obracać. Zwróć uwagę na te elementy brył, które występują w definicji ostrosłupa. Pamiętaj, że nazwa ostrosłupa pochodzi od ilości boków wielokąta podstawy. Stąd na przykład ostrosłup czworokątny, to ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt. Jednocześnie jednak ten sam ostrosłup można nazwać pięciościanem, bo jest to wielościan o pięciu ścianach. Z drugiej strony, nie każdy pięciościan jest ostrosłupem czworokątnym! Uważaj zatem, czytając teksty zadań, by prawidłowo zinterpretować bryłę, której nazwę zamieścił autor.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dou500Gxe

Nazwijmy teraz podstawowe elementy ostrosłupa, aby móc precyzyjnie je charakteryzować i opisywać. Przypomnijmy podstawowe nazewnictwo, którego będziemy używać w przypadku ostrosłupów:

Pracując na lekcjach matematyki w dziale stereometrii, szybko można zauważyć, że analiza treści zadania jest jednym z najważniejszych etapów jego rozwiązania. W zadaniach z geometrii, oprócz umiejętności poprawnej interpretacji pojęć użytych w poleceniu, kluczowe znaczenie dla rozwiązania zadania ma naszkicowanie użytecznego rysunku. Na poniższym przykładzie możesz zauważyć, że ta sama bryła obserwowana i rysowana w rzucie równoległym pod różnymi kątami, może być odebrana przez nas w zupełnie inny sposób. Posługując się poniższym apletem i zmieniając za pomocą myszki kąt obrotu dookoła osi poziomej i osi pionowej, obserwuj, która pozycja jest lepsza, by zauważyć najbardziej charakterystyczne własności bryły na płaskim rysunku. Przeciągnij myszką, aby bryła zaczęła się obracać.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Dou500Gxe

Skupimy się teraz na szkicowaniu ostrosłupów na płaszczyźnie. Należy zaznaczyć, że rysunek nie jest tu celem, jak na przykład w zadaniach konstrukcyjnych, ale jednym ze środków do uzyskania rozwiązania zadania. Dlatego też rysunek sporządzamy tak, aby były w nim możliwie najbardziej uwidocznione te elementy i te zależności, które wykorzystamy rozwiązując problem. Rysujemy więc w rzucie całą bryłę lub tylko jej część. Niekiedy obok rysunku zasadniczego wykonujemy rysunki pomocnicze ścian lub przekrojów ostrosłupa tak, jak wyglądają one w rzeczywistości, to znaczy nie zniekształcone w procesie rzutowania.

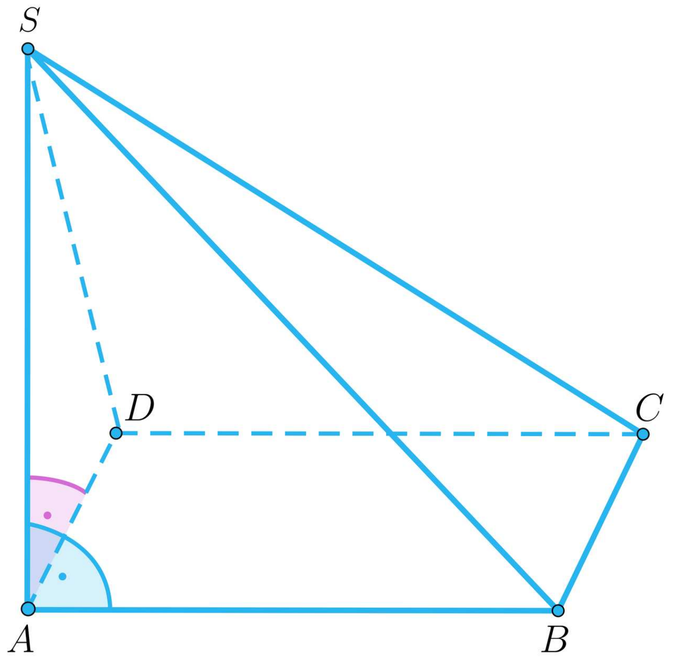
Mając rysunek przeprowadzamy analizę warunków zadania, co powinno doprowadzić do uświadomienia sobie własności danego ostrosłupa i zależności między jego elementami. Powinno również pozwolić na wykrycie nowych związków i zależności między elementami bryły, a czasami również do korekty pierwotnego rysunku.

Przykład 1

Dany jest ostrosłup, którego podstawą jest prostokąt o bokach pozostających w stosunku dwa do jednego, a spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się z jednym z wierzchołków podstawy. Oblicz sumę długości krawędzi bocznych tego ostrosłupa, jeżeli wiadomo, że jego wysokość ma długość 18 cm i jest trzykrotnie dłuższa od krótszego boku prostokąta podstawy.

Rozwiązanie:

Zwróćmy uwagę na fakt, że najbardziej istotnym elementem charakteryzującym nasz ostrosłup jest informacja o jego spodku wysokości. Jeżeli pokrywa się z jednym z wierzchołków podstawy, to jedna z krawędzi bocznych ostrosłupa jest jednocześnie jego wysokością. Wykonujemy odpowiedni szkic do zadania:



Zauważmy, że z definicji prostej prostopadłej do płaszczyzny wynika, że ściany ostrosłupa SAB oraz SAD są trójkątami prostokątnymi. Ponadto z treści zadania mamy dane długości $|SA| = 18$, $|AD| = 18 : 3 = 6$ oraz $|AB| = 2 \cdot |AD| = 12$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa odpowiednio dla ΔSAB oraz ΔSAD otrzymujemy:

$$|BS|^2 = 18^2 + 12^2$$

$$|BS|^2 = 468$$

$$|BS| = 6\sqrt{13}$$

oraz analogicznie

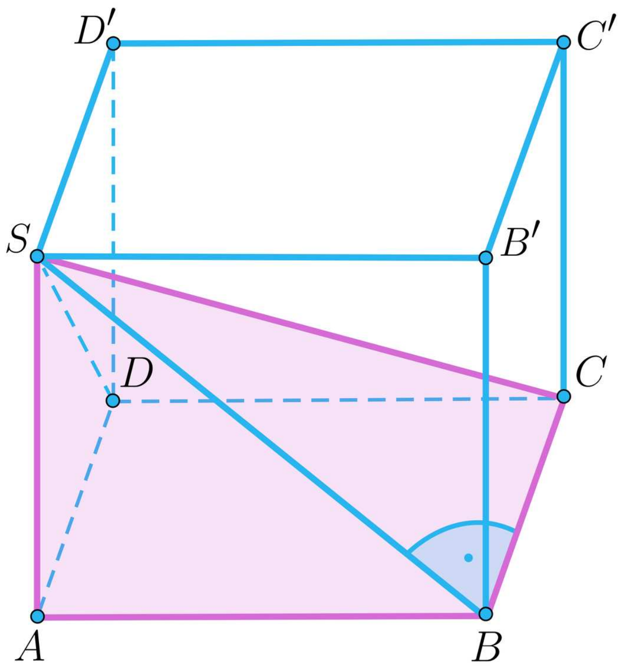
$|DS|^2 = 18^2 + 6^2$

$|DS|^2 = 360$

$|DS| = 6\sqrt{10}$

Pozostaje obliczenie długości krawędzi SC ostrosłupa. W tym celu wróćmy do analizy własności bryły. Zauważmy, że rzutem prostokątnym prostej SB na płaszczyznę podstawy jest prosta AB oraz kąt ABC jest prosty. Z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych wynika zatem, że kąt SBC jest prosty, czyli ΔSBC jest prostokątny

Inaczej uzasadnić tę samą własność można, dorysowując prostopadłościan zawierający nasz ostrosłup.



Ponieważ w tym prostopadłościanie krawędź BC jest prostopadła do płaszczyzny ABS, to jest prostopadła do każdego odcinka zawartego w tej płaszczyźnie, w szczególności do odcinka BS. Ponownie możemy zatem wykorzystać twierdzenie Pitagorasa w ΔSBC:

$|SC|^2 = |BS|^2 + |BC|^2$

$$|SC|^2 = 468 + 36$$

$$|SC| = 6\sqrt{14}$$

Ostatecznie suma długości krawędzi bocznych danego ostrosłupa jest równa

$$|AS| + |BS| + |CS| + |DS| = 18 + 6\sqrt{13} + 6\sqrt{14} + 6\sqrt{10} =$$
$$= 6 \cdot \left(3 + \sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{14}\right)$$

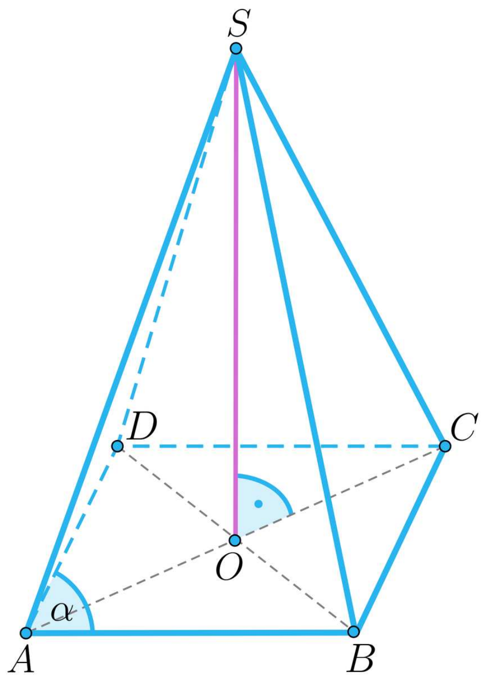
Zauważmy, że w rozwiązaniu tego zadania najbardziej istotnym krokiem było zauważenie, że ściana SBC jest trójkątem prostokątnym. Warto zapamiętać, że w takim ostrosłupie również ściana SDC jest trójkątem prostokątnym, czego dowodzimy analogicznie, jak w przypadku trójkąta SBC.

Przykład 2

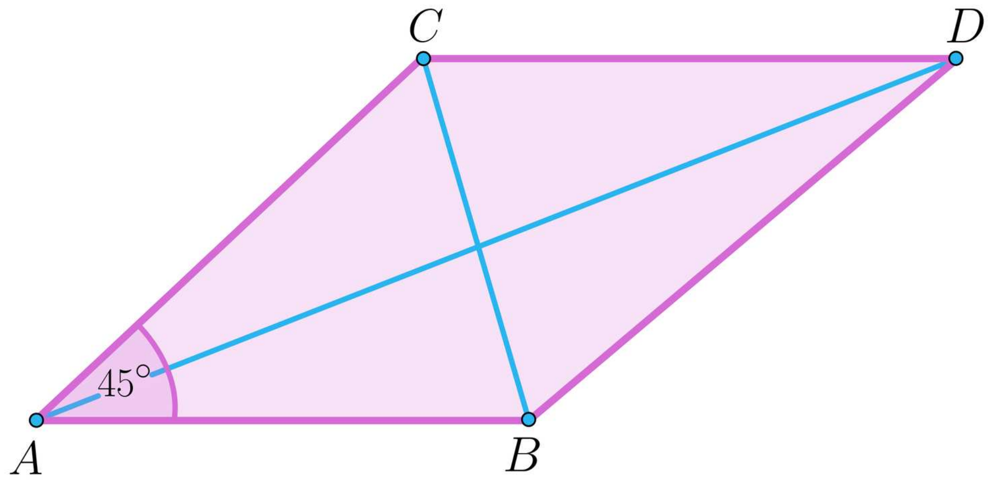
Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 16 i kącie ostrym $\alpha = 45^\circ$. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia się przekątnych podstawy. Wiedząc, że długość wysokości ostrosłupa jest równa długości dłuższej przekątnej podstawy ostrosłupa, oblicz pole jednej ściany bocznej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Podstawą ostrosłupa jest romb, a więc jego boki są równej długości, przekątne zaś dzielą się na połowy, są do siebie wzajemnie prostopadłe i są dwusiecznymi kątów wewnętrznych rombu.



Zauważmy jednak, że szkic takiej bryły jest identyczny ze szkicem ostrosłupa o podstawie kwadratu. Aby lepiej zapamiętać, że podstawa jest rombem o kącie 45°, narysujmy obok ten czworokąt bez zniekształceń rzutowych.



Ważna jest dla nas dłuższa przekątna rombu, bo równa jest wysokości ostrosłupa. Zauważmy, że długość odcinka AC można obliczyć korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ACD, którego kąt rozwarty ma miarę 135°.

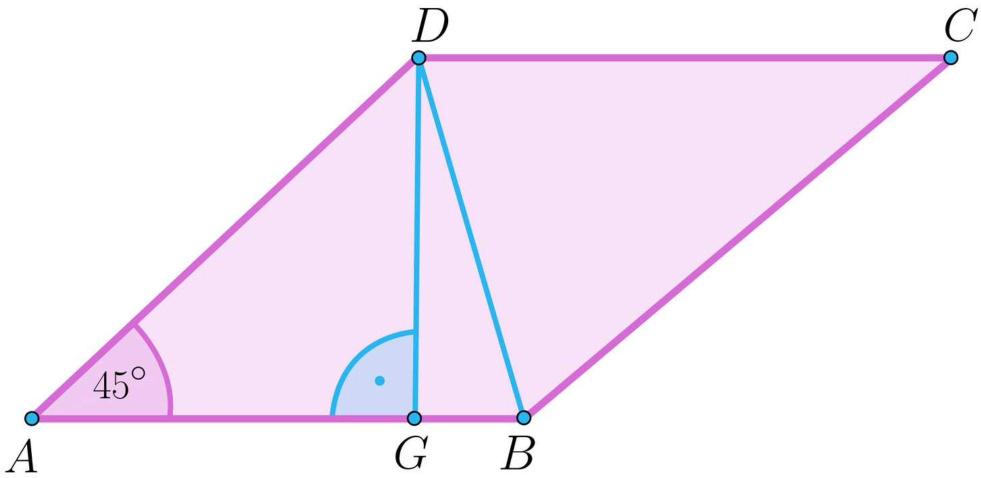
$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 - 2|AD| \cdot |DC| \cdot \cos 135^\circ$$

$$|AC|^2 = 256 + 256 - 2 \cdot 16 \cdot 16 \cdot (-\cos 45^\circ)$$

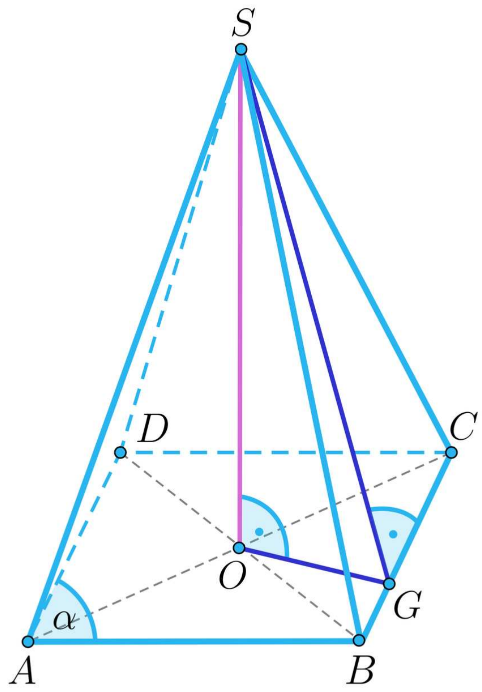
$|AC|^2 = 512 + 512 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|AC| = \sqrt{512 + 256\sqrt{2}}$

Wysokość SO ostrosłupa jest zatem równa $\sqrt{512 + 256\sqrt{2}}$ i tworzy kąty proste z każdą prostą podstawy przechodząca przez punkt O. Aby obliczyć wysokość ściany bocznej ostrosłupa (potrzebną do wyznaczenia jej pola), wystarczy zatem obliczyć długość promienia okręgu wpisanego do rombu. Możemy to zrobić wyznaczając połowę wysokości rombu.



Korzystamy z wartości sinusa kąta 45° w ΔAGD, pamiętając, że bok rombu ma długość 16. Promień okręgu wpisanego w romb jest równy
$r = \frac{1}{2} \cdot 16 \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ Korzystamy teraz z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie SOG.



$$|SG|^2 = |SO|^2 + |OG|^2$$

$$|SG|^2 = \left(512 + 256\sqrt{2}\right) + \left(4\sqrt{2}\right)^2$$

$$|SG|^2 = 512 + 256\sqrt{2} + 32$$

$$|SG| = \sqrt{544 + 256\sqrt{2}}$$

Teraz możemy już obliczyć pole ściany bocznej.
$P = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{544 + 256\sqrt{2}} = 32\sqrt{34 + 16\sqrt{2}}$

Zauważmy, że tym razem kluczowym elementem rozwiązania zadania było obliczenie wysokości ściany bocznej ostrosłupa. Niestety częstym błędem jest założenie, że ściana boczna jest trójkątem równoramiennym, a co za tym idzie, że punkt G jest środkiem odcinka BC. Wynika to właśnie z niejednoznaczności rysunku rzutowego ostrosłupa o podstawie rombu i „utożsamianiu” go z rysunkiem ostrosłupa o podstawie kwadratu.

Słownik

wielościan

wielościanem nazywamy bryłę przestrzenną, której wszystkie ściany są wielokątami

twierdzenie cosinusów

twierdzenie określające związek między kątem wewnętrznym trójkąta i bokami tego trójkąta. W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego z boków jest równy sumie kwadratów długości pozostałych dwóch boków pomniejszonej o podwojony iloczyn tych boków i cosinusa kąta między nimi zawartego

twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Twierdzenie pozwalające ustalić prostopadłość prostych w przestrzeni. Jeżeli prosta b jest rzutem prostokątnym prostej a na daną płaszczyzną, to prosta c leżąca w tej płaszczyźnie jest prostopadła do prostej a wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej b.

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym filmem edukacyjnym. Ukazuje on matematykę w naszym otoczeniu, o której wszyscy wiedzą, ale nie wszyscy ją dostrzegają. Zwróć uwagę na różne kształty brył, które potocznie nazywamy piramidami. Czy w swoim codziennym otoczeniu też potrafisz wskazać obiekty, które mają podobne kształty? Zrób zdjęcia takich obiektów i przedstaw je kolegom i koleżankom na lekcji o ostrosłupach.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Df6pQJSlK

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego ostrosłupa i jego elementów.

Polecenie 2

Konstrukcja ze stali i szkła ozdabiająca wejście do Muzeum Luwr w Paryżu powstała w 1989 roku. Jest to ostrosłup czworokątny o podstawie kwadratu, zaprojektowany przez architekta Ieoh Ming Pei. Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma około 36 metrów a wszystkie jego krawędzie boczne mają po około 33 metry. Oblicz, jaką powierzchnię ma szkło tworzące ściany boczne tej charakterystycznej dla Francji piramidy.

Polecenie 3

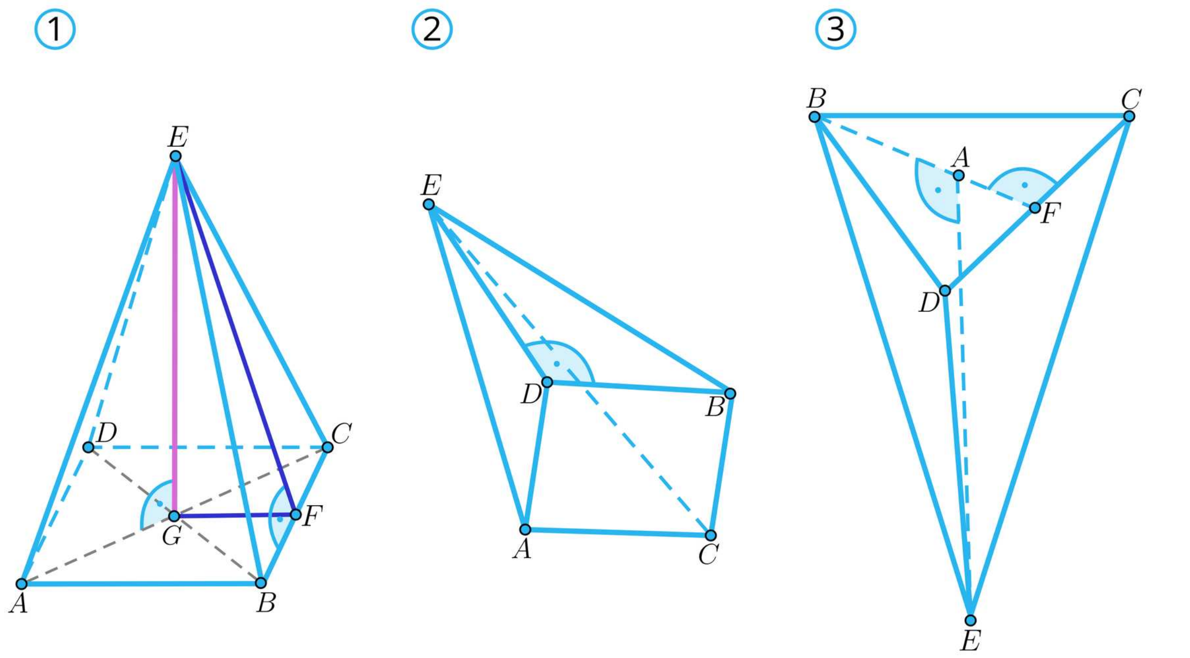
Wykorzystując informacje z filmu i z innych źródeł dotyczące piramidy Cheopsa, oblicz jakim procentem pola powierzchni bocznej tej piramidy jest powierzchnia piramidy w Paryżu omawianej w poprzednim pytaniu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dane są trzy ostrosłupy. Uzupełnij poniższą tabelę, przeciągając poprawne odpowiedzi w puste komórki. Pamiętaj, że każdej odpowiedzi możesz użyć tylko raz.

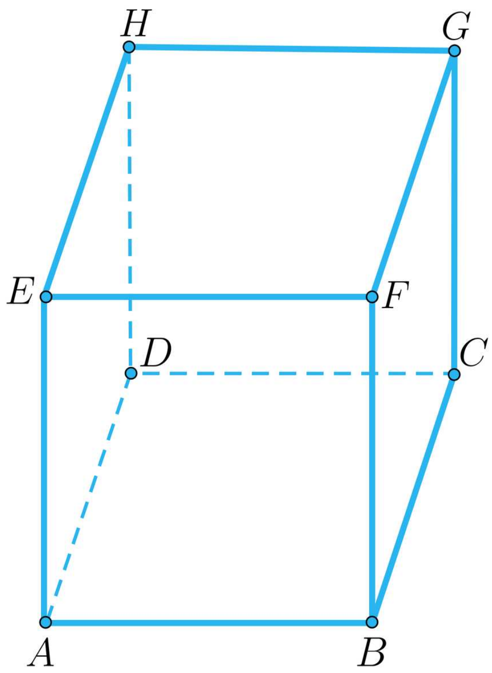


Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

$ABCDEFGH$ jest sześcianem o krawędzi długości 4.

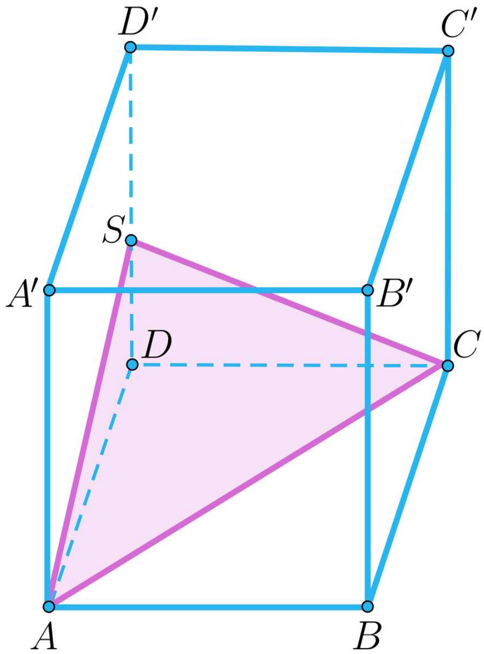


Ćwiczenie 5

Udowodnij, że dla dowolnego ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$, którego wspólnym wierzchołkiem wszystkich ścian bocznych jest wierzchołek S, prawdą jest, że suma długości wszystkich jego krawędzi bocznych jest większa od sumy długości przekątnych podstawy tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 6

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o długości krawędzi 12. Rozpatrzmy ostrosłup $ACDS$, gdzie punkt S jest środkiem krawędzi DD'. Oblicz pole ściany ACS tego ostrosłupa.



Ćwiczenie 7

Podstawą ostrosłupa jest romb o boku 6 i kącie ostrym $\alpha = 60^{\circ}$. Spodek wysokości ostrosłupa jest punktem przecięcia się przekątnych podstawy. Wiedząc, że długość wysokości ostrosłupa jest równa długości krótszej przekątnej podstawy ostrosłupa, oblicz pole jednej ściany bocznej ostrosłupa.

Ćwiczenie 8

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt o bokach długości 8 i $8\sqrt{2}$, $|CD| > |BC|$. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają długość 8. Niech punkty M oraz N będą odpowiednio środkami krawędzi CS oraz CD ostrosłupa. Oblicz obwód trójkąta BMN.

Dla nauczyciela

Autor: Bożena Koprowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ostrosłup i jego elementy

Grupa docelowa: III etap edukacyjny: liceum ogólnokształcące, technikum. Zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria. Uczeń:

6) Oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje w grupie brył (w szczególności wielościanów) te, które są ostrosłupami
- rozpoznaje w ostrosłupach podstawowe jego elementy (np. wysokość ostrosłupa, wysokość ściany bocznej ostrosłupa, spodek wysokości ostrosłupa)
- przeprowadza proste rozumowanie pomagające ustalić strategię rozwiązania zadania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- formułowanie wniosków w oparciu o modele brył, aplety geogebry przedstawiające ostrosłupy w rzucie,
- dyskusja,
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- modele ostrosłupów
- komputer z głośnikami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- projektor multimedialny/tablica interaktywna

Przebieg lekcji:

Faza wstępna:

Przed lekcją nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie sobie definicji ostrosłupa i jego podstawowych elementów. Uczniowie mogą się przygotować do lekcji korzystając z pierwszych trzech apletów z części „Przeczytaj".

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel rozpoczyna lekcję od prezentacji filmu edukacyjnego, z części multimedialnej materiału. Uczniowie wspólnie rozwiązują zadania, przypominając podstawowe definicje. Nauczyciel ewentualnie koryguje postrzeganie elementów charakteryzujących ostrosłup. Pomaga również szybko odnaleźć brakujący wymiar z zadania drugiego. Nauczyciel poleca, by po lekcji uczniowie wyszukali w swoim otoczeniu modele ostrosłupów, zrobili ich zdjęcia i przygotowali autorskie zadanie dla kolegów z klasy, wzorowane na zadaniach z części multimedialnej lekcji.
2. Nauczyciel poleca uczniom zapisanie w zeszycie tekstu przykładu pierwszego z części „Przeczytaj". Uczniowie łączą się w grupach 3-osobowych i pracują nad opracowaniem czytelnego szkicu bryły w rzucie. Wybrany uczeń prezentuje swój rysunek, argumentując, dlaczego ukazał ostrosłup z takiej perspektywy. Uczniowie wyróżniają na tym szkicu elementy ostrosłupa występujące w tekście zadania.
3. Metodą burzy mózgów uczniowie ustalają strategię rozwiązania zadania i zapisują ją w zeszytach. Następnie w grupach 3-osobowych rozwiązują przykład zgodnie z opracowaną procedurą.

4. Nauczyciel zapoznaje uczniów z drugim przykładem z części „Przeczytaj”. Tym razem uczniowie w grupach opracowują samodzielnie sposób naszkicowania bryły, strategię rozwiązania i wykonują polecenie. Nauczyciel pomaga poszczególnym grupom. Jeśli są grupy pracujące sprawniej od pozostałych, nauczyciel deleguje jej członków do pomocy tym uczniom, którzy nie radzą sobie z pracą.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel w dyskusji z uczniami ustala, które etapy rozwiązywania zadania ze stereometrii są najistotniejsze, które sprawiły uczniom największy kłopot. Podkreśla najistotniejsze uwagi dotyczące strategii rozwiązywania zadań.
2. Nauczyciel prosi uczniów, którzy nie otrzymali prawidłowego wyniku w rozwiązywanym przykładzie, o uzupełnienie rozwiązania tego zadania przy pomocy części „Przeczytaj”.

Praca domowa:

1. Nauczyciel poleca uczniom powrót do części multimedialnej lekcji. Prosi ponownie o stworzenie własnego zadania wykorzystującego pewien ostrosłup z otoczenia uczniów. Na następnych zajęciach uczniowie będą mieli możliwość zaprezentowania wyników swojej pracy.
2. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Ostrosłup i jego własności

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:

Film edukacyjny uczniowie mogą wykorzystać przed lekcją jako wprowadzenia do tematu „Ostrosłupy i jego elementy”.