Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych

Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych

Źródło: dostępny w internecie: Obraz ememEmy z Pixabay.

Umiemy wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych – badamy wtedy stosunki długości odpowiednich boków trójkąta prostokątnego, w którym jeden z kątów ostrych to interesujący nas kąt. Jak wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych?

W tym materiale wyznaczymy wartości funkcji trygonometrycznych kątów 120°, 135° i 150°.

Twoje cele

- Wykorzystasz definicje funkcji sinus, cosinus i tangens do obliczania wartości kątów rozwartych.
- Zastosujesz wyliczone wartości funkcji trygonometrycznych do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

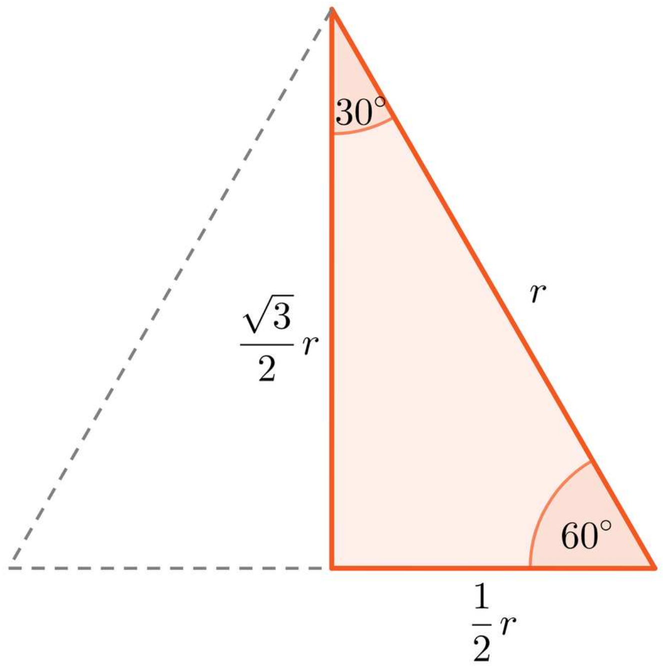
Definicje funkcji trygonometrycznych

Rozważmy dowolny kąt skierowany. Rysujemy go w układzie współrzędnych w taki sposób, że jedno z jego ramion pokrywa się z dodatnią półosią X. Niech punkt $P = (x; y)$ będzie dowolnym punktem leżącym na końcowym ramieniu wybranego kąta. Odległość punktu P od środka układu współrzędnych nazywamy promieniem wodzącym punktu P i oznaczamy jako r.

Przyjrzyj się poniższej galerii zdjęć i przypomnij sobie definicje funkcji trygonometrycznych kątów w układzie współrzędnych.

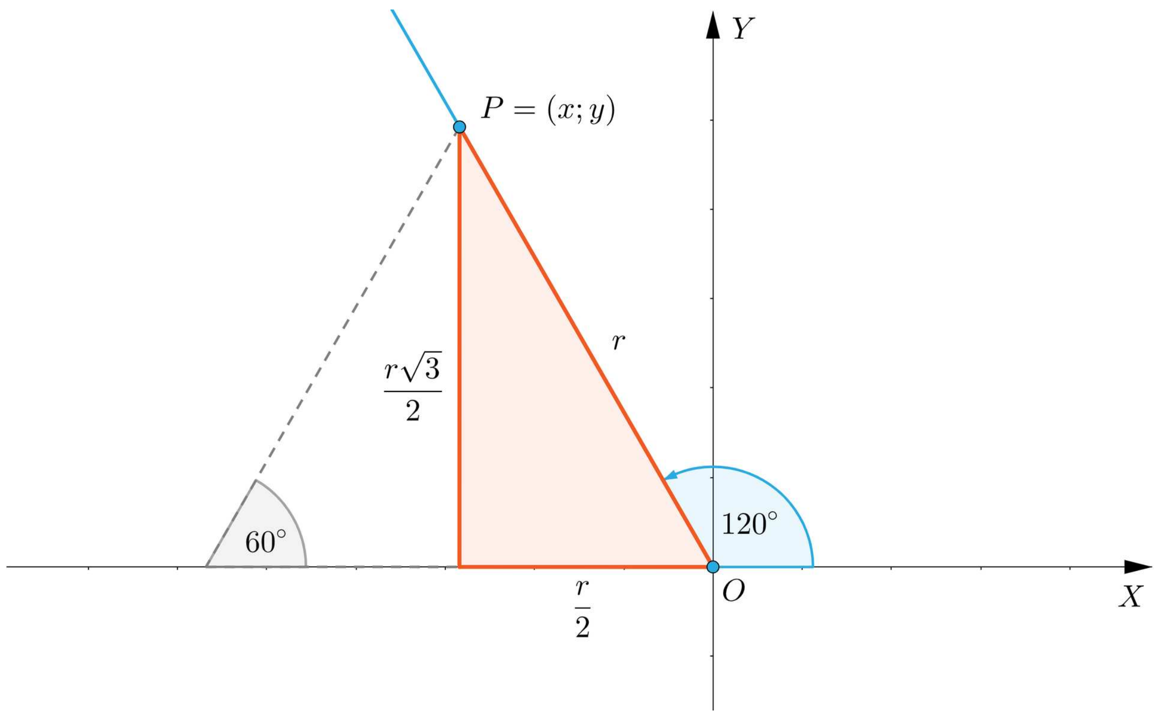
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/Db69JEScL

Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 120° i 150°, wykorzystamy trójkąt równoboczny o boku r:



Wartości funkcji trygonometrycznych kąta 120°

Umieszczamy trójkąt równoboczny odpowiednio w układzie współrzędnych, wykorzystując fakt, że: $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$:



Punkt P o promieniu wodzącym równym r, leżący na ramieniu końcowym kąta 120° ma współrzędne: $x = \frac{-r}{2}$ i $y = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, tj. $P = \left(\frac{-r}{2}; \frac{r\sqrt{3}}{2}\right)$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy, że:

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-r}{2}}{r} = -\frac{1}{2}$$

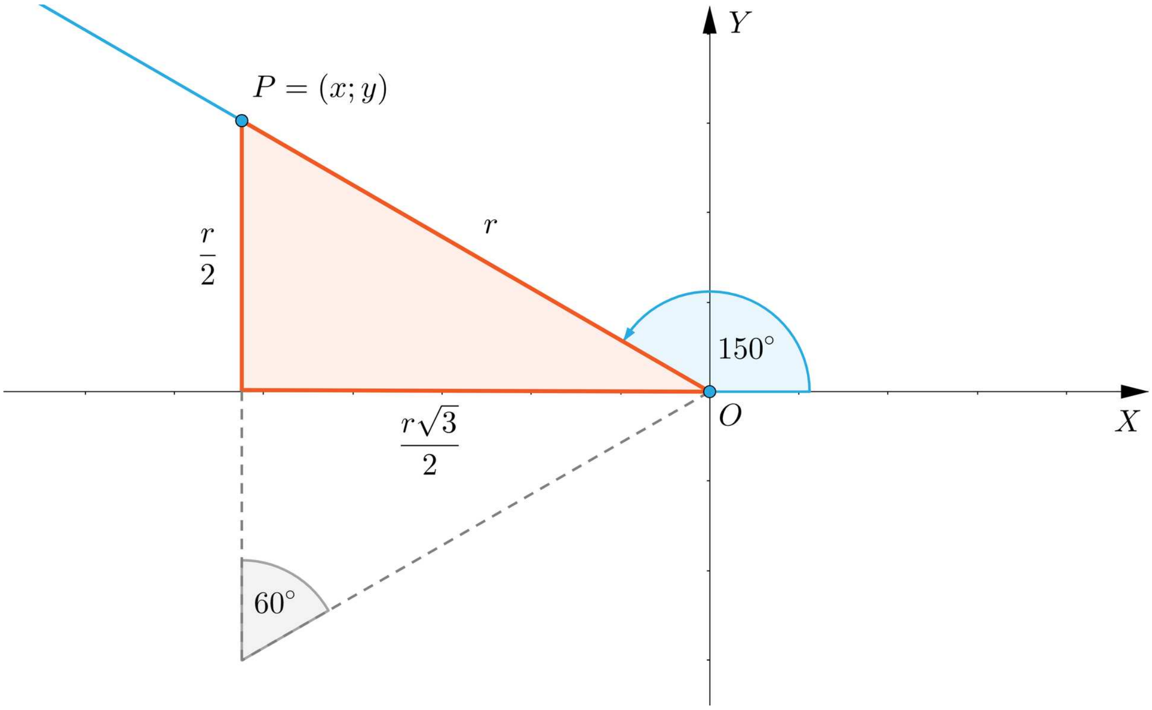
$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{-r}{2}} = -\sqrt{3}$$

Tangens 120° możemy również wyliczyć stosując poznany wcześniej związek między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°

Umieszczamy trójkąt równoboczny odpowiednio w układzie współrzędnych, wykorzystując fakt, że: $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$:



Punkt P o promieniu wodzącym równym r, leżący na ramieniu końcowym kąta 150° ma współrzędne: $x = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$ i $y = \frac{r}{2}$, tj. $P = \left(\frac{-r\sqrt{3}}{2}; \frac{r}{2}\right)$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy, że:

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-r\sqrt{3}}{2}}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

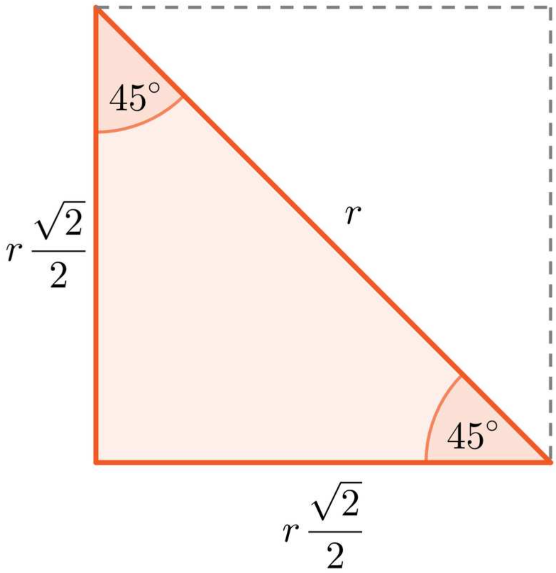
$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{-r\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tangens 150° możemy również wyliczyć korzystając ze wzoru: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135°

Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych kąta 135° wykorzystamy kwadrat o przekątnej długości „r”. Bok takiego kwadratu ma długość $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy bowiem:

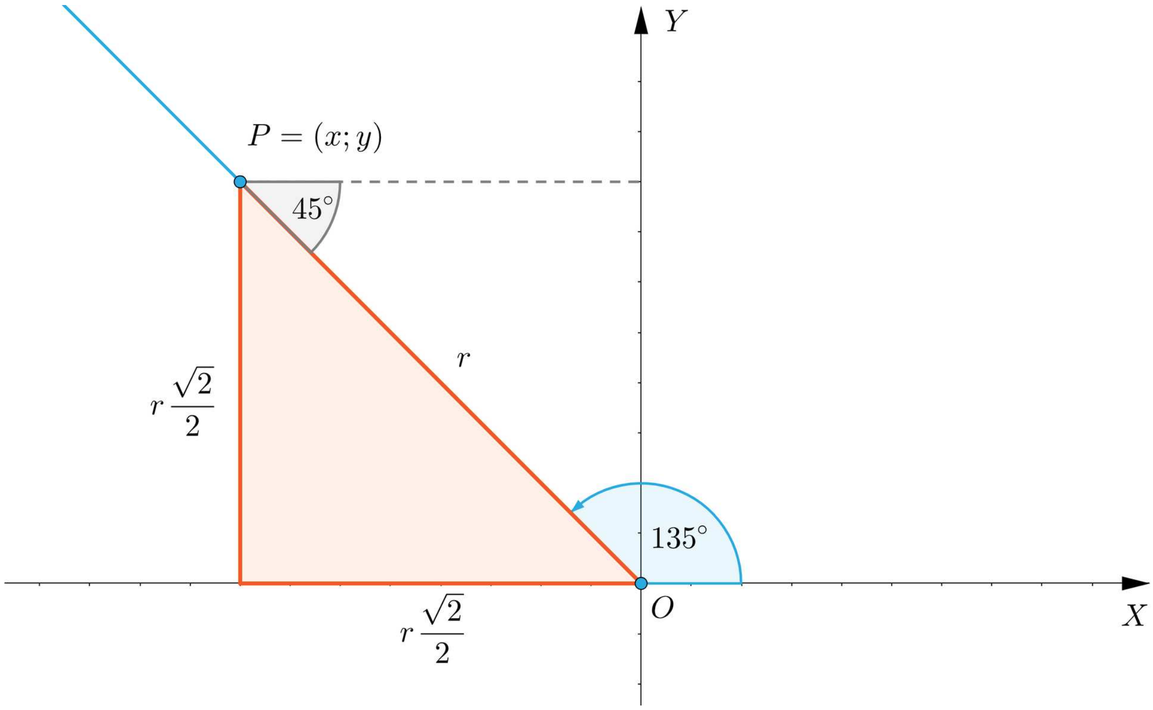
$$a^2 + a^2 = r^2$$

$$2a^2 = r^2$$

$$a^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$\text{więc } a = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Umieszczamy kwadrat odpowiednio w układzie współrzędnych, wykorzystując fakt, że: $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$:



Punkt P o promieniu wodzącym równym r, leżący na ramieniu końcowym kąta 135° ma współrzędne: $x = -\frac{r\sqrt{2}}{2}$ i $y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, tj. $P = \left(\frac{-r\sqrt{2}}{2}; \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy:

$$\sin 135^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-r\sqrt{2}}{2}}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{r\sqrt{2}}{2}}{\frac{-r\sqrt{2}}{2}} = -1$$

Tangens 135° możemy również wyliczyć korzystając ze wzoru: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

Zbierzmy wyliczone wartości funkcji w tabeli:

α	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Przykład 1

Punkt $P=(-1;y)$ leży na końcowym ramieniu kąta 120°. Obliczymy drugą współrzędną tego punku.

Rozwiązanie

Oznaczymy przez r długość promienia wodzącego punktu P.

Ponieważ znamy wartość odciętej punktu P, to korzystamy z definicji cosinusa: $\cos 120^\circ = \frac{x}{r}$.

Mamy więc $\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$ i $x=-1$, zatem $\frac{-1}{r}=-\frac{1}{2}$, więc $r=2$.

Do wyznaczenia wartości rzędnej punktu P wykorzystamy definicję sinusa kąta: $\sin 120^\circ = \frac{y}{r}$.

Mamy więc $\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $r=2$, co daje: $\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, stąd $y=\sqrt{3}$.

Współrzędną „y” możemy wyznaczyć także ze wzoru: $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Po jego przekształceniu otrzymamy: $y^2=r^2-x^2$. Podstawiając $x=-1$ i $r=2$ otrzymamy:

$y^2=2^2-(-1)^2=3$.

Są dwie liczby których kwadrat wynosi 3:

$\sqrt{3}$ i $-\sqrt{3}$

a ponieważ punkt P znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, gdzie $y>0$, więc $y=\sqrt{3}$.

Odpowiedź:

Druga współrzędna punktu P wynosi $\sqrt{3}$.

Przykład 2

Punkt $P=(x;y)$ leży na końcowym ramieniu kąta 135°. Wiedząc, że promień wodzący tego punktu: $r=3\sqrt{2}$, obliczymy współrzędne punktu P.

Rozwiązanie

Ponieważ znamy długość promienia wodzącego punktu P, to do wyznaczenia wartości rzędnej tego punktu wykorzystamy definicję funkcji sinus: $\sin 135^\circ = \frac{y}{r}$.

Skoro $r=3\sqrt{2}$, to zachodzi równość $\frac{y}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Po przekształceniu otrzymujemy, że $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3\sqrt{2}$, czyli $y=\frac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$.

Do wyznaczenia wartości odciętej punktu P wykorzystamy definicję cosinusa: $\cos 135^\circ = \frac{x}{r}$.

Mamy zatem $\frac{x}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, więc po przekształceniu otrzymujemy, że:

$$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2}=-\frac{3\cdot 2}{2}=-3$$

Ostatecznie: $P=(-3;3)$.

Inne sposoby wyznaczenia współrzędnej „x”:

Znając wartość y możemy wyliczyć wartość x również ze wzoru: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Po przekształceniu wzoru otrzymamy: $x^2=r^2-y^2$, a podstawiając $y=3$ i $r=3\sqrt{2}$ otrzymujemy:

$$x^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-(3)^2=18-9=9$$

Są dwie liczby, których kwadrat wynosi 9: 3 i (-3), a ponieważ w drugiej ćwiartce układu współrzędnych $x<0$, więc $x=-3$.

Możemy również wykorzystać fakt, że przyprostokątne w trójkącie prostokątnym równoramiennym są równe, więc $x=-y$ (bo w II ćwiartce układu współrzędnych $x<0$), czyli $x=-3$.

Odpowiedź:

$P=(-3;3)$.

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia: $\frac{\sqrt{3}\cos 150^\circ+\sqrt{2}\sin 135^\circ}{\operatorname{tg}^2 150^\circ}$.

Rozwiązanie

$$\frac{\sqrt{3}\cos 150^\circ+\sqrt{2}\sin 135^\circ}{\operatorname{tg}^2 150^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\frac{-3}{2}+\frac{2}{2}}{\frac{3}{9}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}\cdot 3=-\frac{3}{2}$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia wynosi $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Przykład 4

Obliczymy wartość ułamka: $\frac{9\sin 150^\circ+4\cos 120^\circ}{3\sin 150^\circ-2\cos 120^\circ}$.

Rozwiązanie

$$\frac{9\sin 150^\circ+4\cos 120^\circ}{3\sin 150^\circ-2\cos 120^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}{3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{4}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=1$$

Odpowiedź:

Wartość ułamka wynosi 1.

Słownik

kąt skierowany

para uporządkowanych półprostych o wspólnym początku, z których pierwszą nazywamy ramieniem początkowym, a drugą ramieniem końcowym kąta skierowanego

ramię końcowe kąta skierowanego

drugie ramię kąta skierowanego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą wyznaczanie z definicji wartości funkcji trygonometrycznych kątów 120°, 135°, 150°. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DgiOKB567

Animacja nawiązująca do treści lekcji dotyczącej wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych.

Polecenie 2

Punkt $P = (x, y)$ leży na końcowym ramieniu kąta 150°. Wiedząc, że długość promienia wodzącego $r = 4$, oblicz współrzędne punktu P.

Polecenie 3

Oblicz bez użycia tablic: $\frac{\sin^2 120^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Połącz w pary wyrażenia sobie równe.

<math><mo>-</mo><mi>sin</mi><mfenced><mrow><mn>180</mn><mo>°</mo><mo>-</mo><mn>45</mn><mo>°</mo></mrow></mfenced></math>, <math><mfrac><mn>1</mn><mrow><mi>tg</mi><mfenced><mrow><mn>180</mn><mo>°</mo><mo>-</mo><mn>60</mn><mo>°</mo></mrow></mfenced></mrow></mfrac></math>, <math><mo>-</mo><mi>cos</mi><mfenced><mrow><mn>180</mn><mo>°</mo><mo>-</mo><mn>30</mn><mo>°</mo></mrow></mfenced></math>

$\sin(180^\circ - 60^\circ)$	
$\mathrm{tg}(180^\circ - 30^\circ)$	
$\cos(180^\circ - 45^\circ)$	

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podgórna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wylicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów 120°, 135°, 150° korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych;
- stosuje związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- wykorzystuje wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60° do wyznaczania długości odcinków w trójkątach prostokątnych;
- analizuje metody obliczania wartości kątów 120°, 135°, 150° oraz wybiera najefektywniejszą.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny;
- burza mózgów;
- pokaz multimedialny;
- praca pod kontrolą nauczyciela.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- rzutnik multimedialny;
- e–podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicje funkcji trygonometrycznych (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna :

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w grupach analizują wyznaczanie wartości kątów 120°, 135°, 150° oraz przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
4. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
5. Po dyskusji zapisują w formie tabeli wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych.
6. Uczniowie oglądają animację i omawiają ją wraz z nauczycielem.
7. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela; uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą obejrzeć animację w celu przypomnienia sobie wiadomości przed sprawdzianem.