



Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

Przykładowe obrazy, w których zastosowano perspektywę wywołującą sugestię głębi przestrzennej. Zasady rzutu równoległego. Rysowanie sześcianu zgodnie z zasadami rzutu równoległego.

Przedstawienie płaszczyzny wyznaczonej przez: trzy różne punkty niewspółliniowe, prostą i punkt, który do niej nie należy, dwie proste przecinające się.

Twierdzenie o dwóch różnych płaszczyznach nierównoległych. Trzy przypadki opisujące wzajemne położenie dwóch płaszczyzn.

Definicja prostej równoległej do płaszczyzny. Definicja prostej przebiegającej płaszczyznę. Trzy przypadki, opisujące wzajemne położenie prostej i płaszczyzny.

Dwie proste przecinające się. Dwie różne proste równoległe. Pary prostych, które nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie. Definicja prostych skośnych w przestrzeni. Ilustracja czterech przypadków opisujących wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni.

Definicja prostej prostopadłej do płaszczyzny. Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Określenie dwóch płaszczyzn prostopadłych. Rzut prostokątny punktu na płaszczyznę. Określenie położenia prostej względem płaszczyzny. Definicja kąta nachylenia prostej do płaszczyzny. Przykład: maszt z odciegami.

Reguła o trzech prostych prostopadłych. Określanie trójkątów będących ścianami bocznymi ostrosłupa.

Prezentacja sposobu mierzenia kąta nachylenia płaszczyzny q do płaszczyzny p , gdy te płaszczyzny nie są ani równoległe, ani prostopadłe. Ustalanie miar kątów dwuściennych. Wyznaczanie siatki ostrosłupa.

Określanie krawędzi przecięcia ścian ostrosłupa. Sprawdzanie, czy proste są równoległe.

Twierdzenie o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną. Określanie sześciokątnego przekroju sześcianu.

Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

W tym materiale poznasz pojęcia związane z prostymi i płaszczyznami w przestrzeni. Dowiesz się także, w jaki sposób wyznaczamy kąt między dwoma płaszczyznami. Zapoznaj się z nim przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zawartych w materiałach [Proste równoległe](#), [proste prostopadłe](#) oraz [Ostrosłup i jego własności](#).

Obraz przestrzeni zgodny z tym, jaki tworzy oko ludzkie, jest przedstawiany w malarstwie lub rysunku za pomocą zasad perspektywy. Dzięki temu sposobowi płaskiego odwzorowania jesteśmy w stanie wyobrazić sobie rzeczywisty kształt i wzajemne położenie przedstawianych obiektów przestrzennych.



Źródło: Hendrick Aerts, dostępny w internecie: [wikimedia.commons.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hendrick_Aerts_-_The_Piazza_of_San_Mark_-_WGA01609.jpg), domena publiczna.



Źródło: Patrick Hughes, dostępny w internecie: [wikimedia.commons.org](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Patrick_Hughes_-_The_Flooded_Street_-_WGA01610.jpg), domena publiczna.

Takie kompleksowe podejście do związków między obiektami w przestrzeni nie będzie nam potrzebne. W kilku kolejnych rozdziałach będziemy badać jedynie wybrane własności pewnych figur geometrycznych umieszczonych w przestrzeni trójwymiarowej.

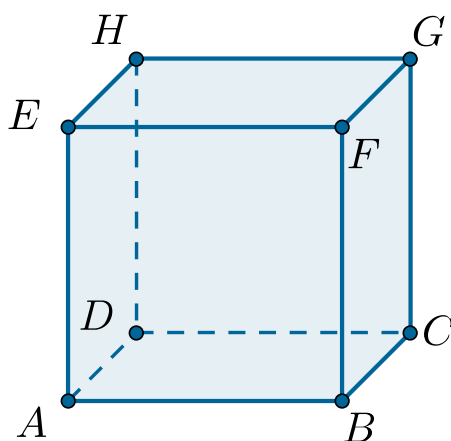
W przedstawionych przykładach będziemy się starali przeprowadzić rozumowanie stosowne do zadanej sytuacji przestrzennej.

Wprowadzimy też niezbędne definicje, a kluczowe zależności między omawianymi obiektami podamy jako twierdzenia.

Związki miarowe w figurach przestrzennych będziemy analizować za pomocą rysunków przedstawionych na płaszczyźnie. Przyjmujemy znaną i stosowaną w praktyce szkolnej umowę, że modele figur przestrzennych (które inaczej nazywamy bryłami) będziemy odwzorowywać na płaszczyźnie według zasad rzutu równoległego.

W ten sposób figury równoległe do kartki będą przystające do ich obrazów narysowanych na kartce, a figury nierównoległe do kartki zmienią kształt.

Poniżej przedstawiony jest model sześcianu $ABCDEFGH$ narysowany według powyższych zasad.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jego ściany $ABFE$ i $CDHG$ leżą w płaszczyźnie równoległej do kartki, więc są narysowane jako kwadraty, a w przypadku pozostałych ścian narysowane są równoległoboki.

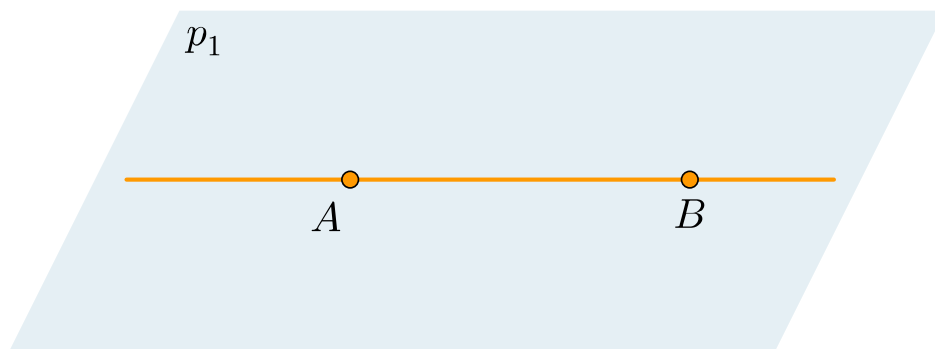
Punkty i proste w przestrzeni

W poniższych przykładach będziemy ilustrowali płaszczyznę w przestrzeni, pokazując jej wybraną część, istotną dla prezentowanych rozważań. Zazwyczaj będzie to prostokąt wycięty z tej płaszczyzny.

Na rysunku przedstawiona jest płaszczyzna p_1 i leżące w niej dwa punkty A i B .

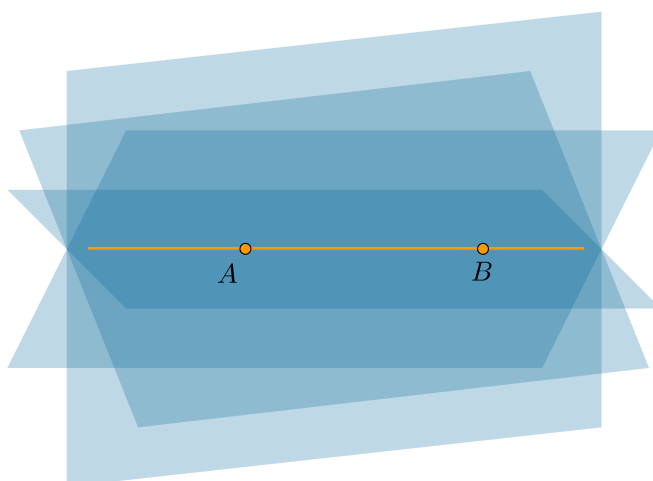
Przykład 1

Rozpatrzmy prostą AB na płaszczyźnie p_1 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że oprócz płaszczyzny p_1 są jeszcze inne, w których leży prosta AB .

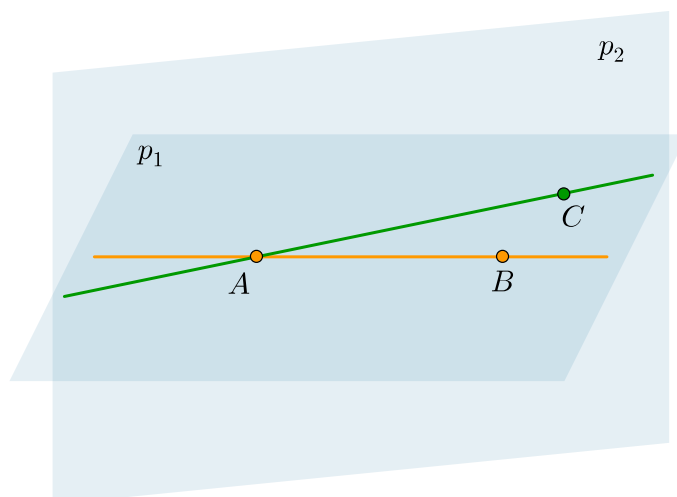


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy teraz płaszczyznę p_2 różną od p_1 , w której leży punkt A , ale nie leży w niej punkt B .

Wtedy poza punktem A nie ma na prostej AB takiego punktu, który leży też w płaszczyźnie p_2 .

Natomiast jeżeli punkt C leżący w płaszczyźnie p_1 leży również w płaszczyźnie p_2 , to wszystkie punkty prostej AC leżą zarówno w płaszczyźnie p_1 , jak i w płaszczyźnie p_2 .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że:

- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należą wszystkie trzy punkty A , B i C ,
- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należy prosta AB oraz punkt C ,
- p_1 jest jedyną płaszczyzną, do której należą proste AB i AC .

Uogólniając to spostrzeżenie, stwierdzimy, że płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie przez:

- trzy różne punkty niewspółliniowe (zatem stół na trzech nogach postawiony na podłodze jest stabilny - nie będzie się chwiały),
- prostą i punkt, który do niej nie należy,
- dwie proste przecinające się.

Dwie płaszczyzny

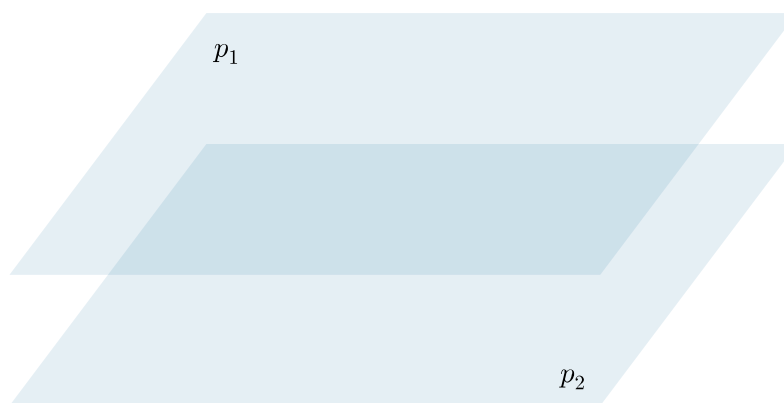
Twierdzenie: o dwóch różnych płaszczyznach nierównoległych

Jeżeli dwie różne płaszczyzny p_1 i p_2 mają wspólne dwa różne punkty A i B , to prosta AB leży zarówno w płaszczyźnie p_1 , jak i w płaszczyźnie p_2 . Mówimy wtedy, że prosta AB jest krawędzią przecięcia tych płaszczyzn.

W przestrzeni istnieją również pary płaszczyzn, które nie mają punktów wspólnych.

Definicja: Różne płaszczyzny równoległe

Dwie różne płaszczyzny, które nie mają punktów wspólnych, nazywamy płaszczyznami równoległymi.

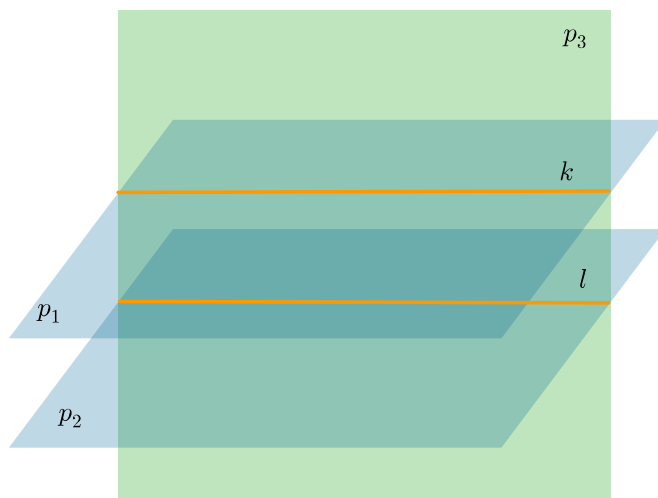


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Możliwe są zatem trzy przypadki, opisujące wzajemne położenie dwóch płaszczyzn:

- dwie płaszczyzny pokrywają się (każdy punkt jednej płaszczyzny należy również do drugiej płaszczyzny),
- dwie płaszczyzny przecinają się (ich częścią wspólną jest wtedy prosta),
- dwie płaszczyzny nie mają punktów wspólnych (są równoległe).

Uwaga. Rozpatrzmy dwie płaszczyzny równoległe p_1 i p_2 oraz płaszczyznę p_3 , która nie jest do nich równoległa. Wówczas płaszczyzna p_3 przecina każdą z płaszczyzn p_1 oraz p_2 wzdłuż prostej – odpowiednio k lub l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Te proste leżą w jednej płaszczyźnie p_3 , ale nie mają punktów wspólnych, ponieważ leżą w płaszczyznach równoległych p_1 oraz p_2 . Oznacza to, że proste k i l są także równoległe.

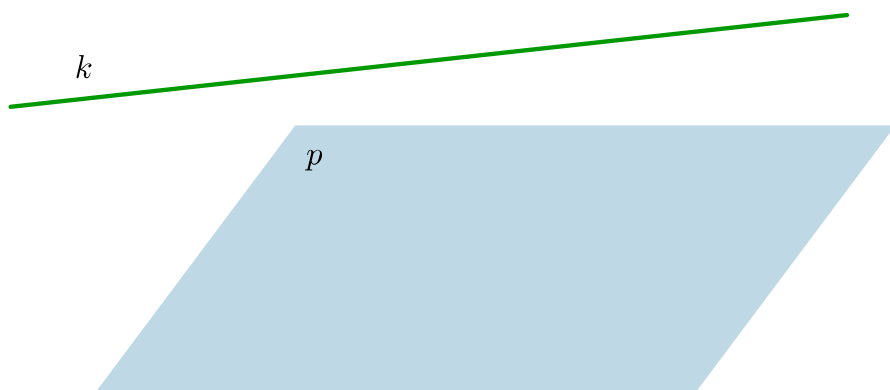
Z drugiej strony: jeżeli w każdej z dwóch płaszczyzn równoległych p_1 oraz p_2 wybierzemy proste równoległe odpowiednio k i l , to przez te proste przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Zatem płaszczyzna jest wyznaczona jednoznacznie również przez dwie proste równoległe.

Prosta i płaszczyzna

Definicja: prosta równoległa do płaszczyzny

Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie ma z tą płaszczyzną punktów wspólnych, jest równoległa do tej płaszczyzny.

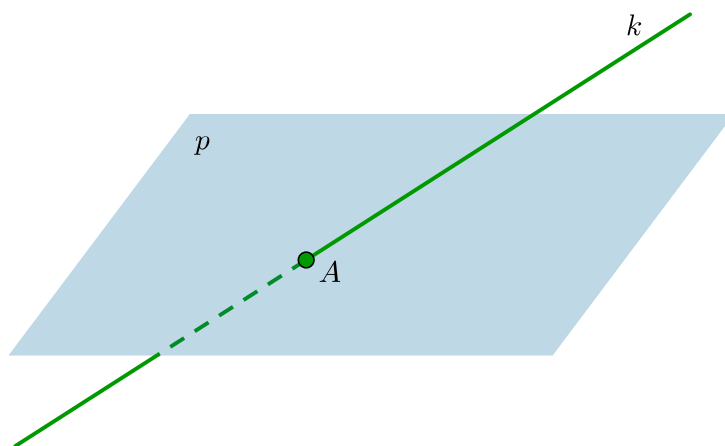


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda prosta leżąca w płaszczyźnie jest także równoległa do tej płaszczyzny (jak np. prosta AB z poprzedniego przykładu, która leży w płaszczyźnie p_1).

Definicja: prosta przebijająca płaszczyznę

Prosta, która nie leży w płaszczyźnie i nie jest do tej płaszczyzny równoległa, ma dokładnie jeden punkt wspólny z tą płaszczyzną. Mówimy, że prosta przebija płaszczyznę w tym punkcie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

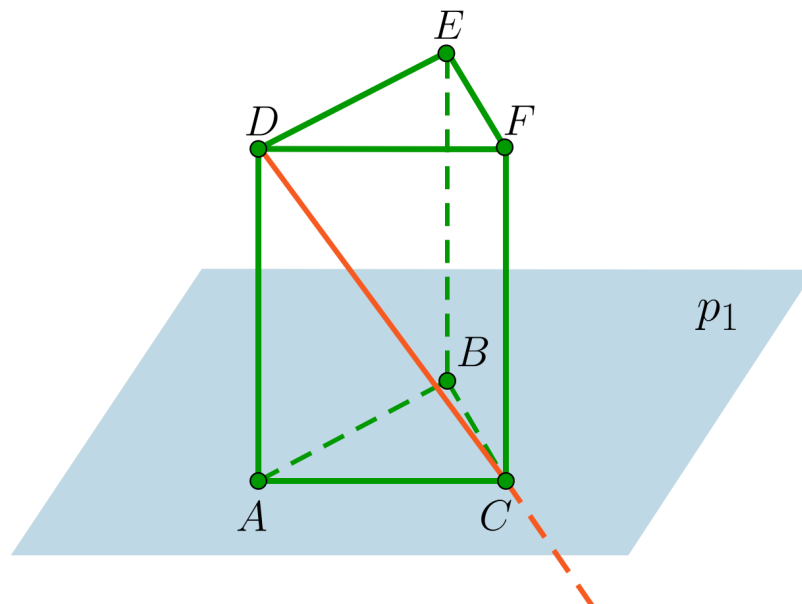
Możliwe są zatem trzy przypadki opisujące wzajemne położenie prostej i płaszczyzny:

- prosta leży na płaszczyźnie (każdy punkt prostej jest również punktem płaszczyzny),
- prosta przebija płaszczyznę (prosta ma dokładnie jeden punkt wspólny z płaszczyzną),
- prosta jest równoległa do płaszczyzny (prosta i płaszczyzna nie mają punktów wspólnych).

Przykład 2

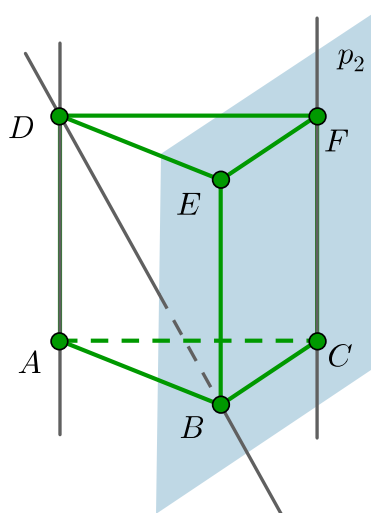
Na rysunku przedstawiony jest graniastosłup trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF .

1. Rozpatrzmy płaszczyznę p_1 , w której leży podstawa ABC . Prosta AB leży w tej płaszczyźnie, prosta DE jest do niej równoległa, a prosta DC przebija płaszczyznę p_1 w punkcie C .



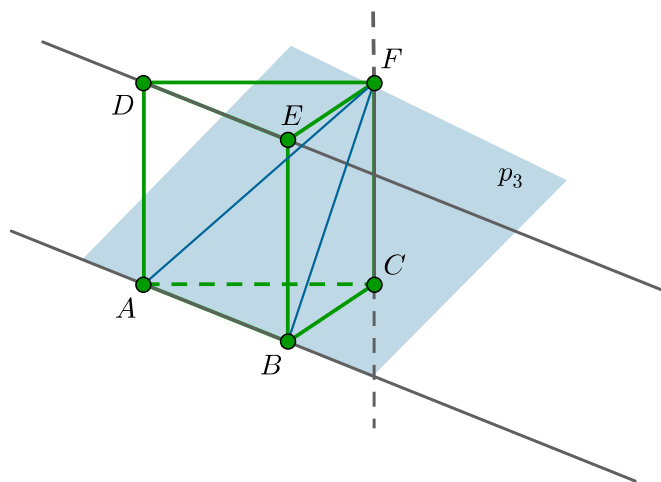
Źródło: GroMar, licencja: CC BY 3.0.

2. Rozpatrzmy płaszczyznę p_2 , w której leży ściana boczna $BCFE$. Prosta FC leży w tej płaszczyźnie, prosta DA jest do niej równoległa, a prosta DB przebija płaszczyznę p_2 w punkcie B .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. Rozpatrzmy płaszczyznę p_3 , w której leżą punkty A , B oraz F . Trójkąt ABF jest płaskim przekrojem graniastoslupa $ABCDEF$ płaszczyzną p_3 . Prosta AB leży w tej płaszczyźnie, prosta CF przebija ją w punkcie F , a prosta DE jest do płaszczyzny p_3 równoległa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dwie proste w przestrzeni

Przypomnijmy, że dwie proste przecinające się oraz dwie różne proste równoległe leżą w jednej płaszczyźnie.

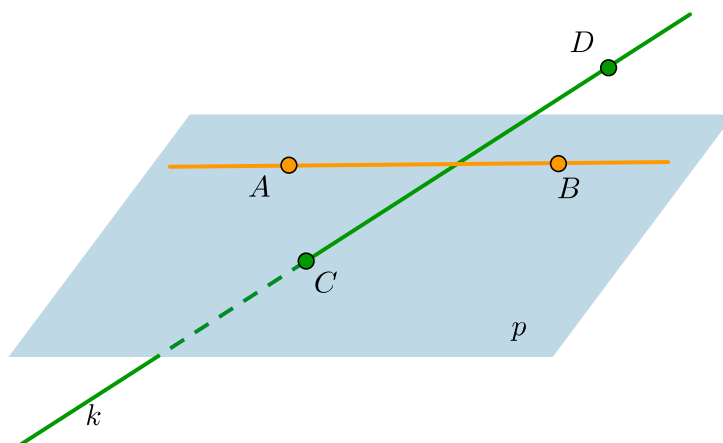
Istnieją w przestrzeni pary prostych, które nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Przykład 3

Wybermy w przestrzeni punkty A i B oraz taki trzeci punkt C , który nie leży na prostej AB .

Płaszczyznę, którą wyznaczyły punkty A , B , C , oznaczmy przez p .

Rozpatrzmy teraz prostą k , która przebija płaszczyznę p w punkcie C i wybierzmy na prostej k punkt D różny od C .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Pokażemy, że proste AB i CD nie mają punktów wspólnych.

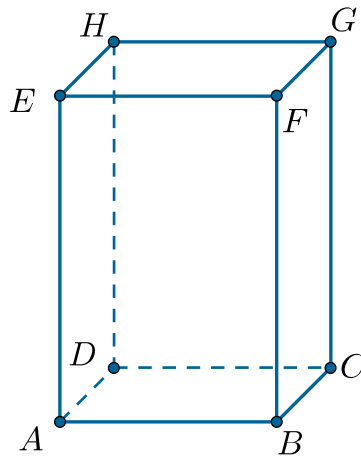
Gdyby proste AB i CD miały punkt wspólny, to te dwie proste wyznaczałyby płaszczyznę. Ponieważ punkty A , B oraz C leżą w płaszczyźnie p , więc to właśnie p byłaby płaszczyzną wyznaczoną przez proste AB i CD . Jednakże punkt D nie leży w płaszczyźnie p , co oznacza, że proste AB i CD nie mają punktów wspólnych i nie leżą w jednej płaszczyźnie. Proste AB i CD są tak zwanymi prostymi skośnymi.

Definicja: proste skośne w przestrzeni

Dwie proste w przestrzeni, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy prostymi skośnymi.

Przykład 4

Na rysunku przedstawiony jest prostopadłościan $ABCDEFGH$.



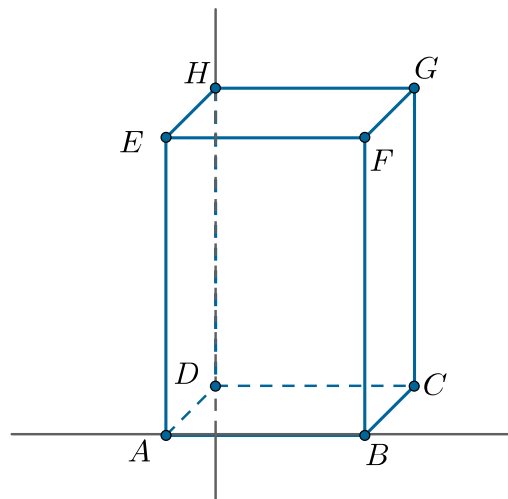
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wykażemy, że:

1. Proste AB i DH są skośne.

Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $ADHE$. W tej płaszczyźnie leżą punkty A , D i H , natomiast punkt B w niej nie leży.

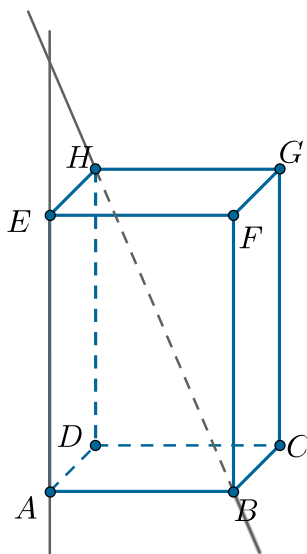
Zatem proste AB i DH są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

2. Proste AE i BH są skośne.

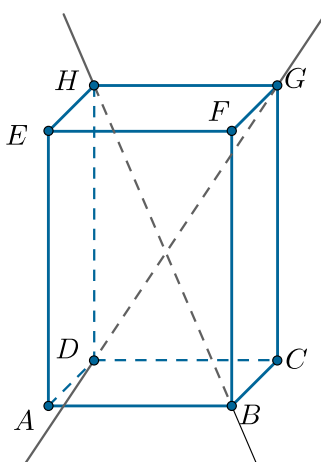
Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $ABFE$. W tej płaszczyźnie leżą punkty A , B i E , natomiast punkt H w niej nie leży. Zatem proste AE i BH są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

3. Proste BH i DG są skośne.

Rozpatrzmy płaszczyznę ściany $DCGH$, w której leżą punkty D , G i H . Punkt B nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty D , G i H . Zatem proste BH i DG są skośne.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Możliwe są zatem cztery następujące przypadki opisujące wzajemne położenie dwóch prostych w przestrzeni:

- proste pokrywają się (każdy punkt jednej prostej należy również do drugiej),
- proste leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie,
- proste leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych (są równoległe),
- proste nie leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych (są skośne).

Prosta prostopadła do płaszczyzny. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Omówimy teraz pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny.

W wielu sytuacjach praktycznych użytkujemy sprzęty, w których działaniu widać zastosowanie modelu pojęcia prostej prostopadłej do płaszczyzny. Każde skrzydła drzwi, okna (o ile nie są uchylne), bramy czy furtki muszą być zamocowane na zawiasach do pionowego, nieruchomego słupka ościeżnicy (nazywanej też futryną). Fachowiec, który montuje taką ościeżnicę, musi sprawdzić, czy słupek jest umocowany w pionie. Za pomocą odpowiednich narzędzi (np. poziomicy) weryfikuje ustawienie słupka, korzystając z następującej zasady: słupek jest ustawiony pionowo, gdy zostało ustalone, że jest on prostopadły do poziomu w dwóch różnych kierunkach.

Kiedy słupek ościeżnicy jest zamocowany pionowo, to niezależnie od tego, jak odchylimy zamocowane do niego skrzydła drzwi, zawsze będziemy mieli pewność, że są one ustawione właściwie (czyli prostopadle do poziomemu).

Formalnie pojęcie prostej prostopadłej do płaszczyzny wprowadzamy za pomocą następującej definicji.

Definicja: prostej prostopadłej do płaszczyzny

Prostą k , przebijającą płaszczyznę p w punkcie O , nazywamy prostopadłą do tej płaszczyzny, gdy prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

Twierdzenie: o prostej prostopadłej do płaszczyzny

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz dwie zawarte w tej płaszczyźnie proste l i m , które przecinają się w punkcie O . Jeżeli prosta k przebija płaszczyznę p w punkcie O tak, że jest prostopadła zarówno do prostej m , jak i do prostej l , to jest ona prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt O .

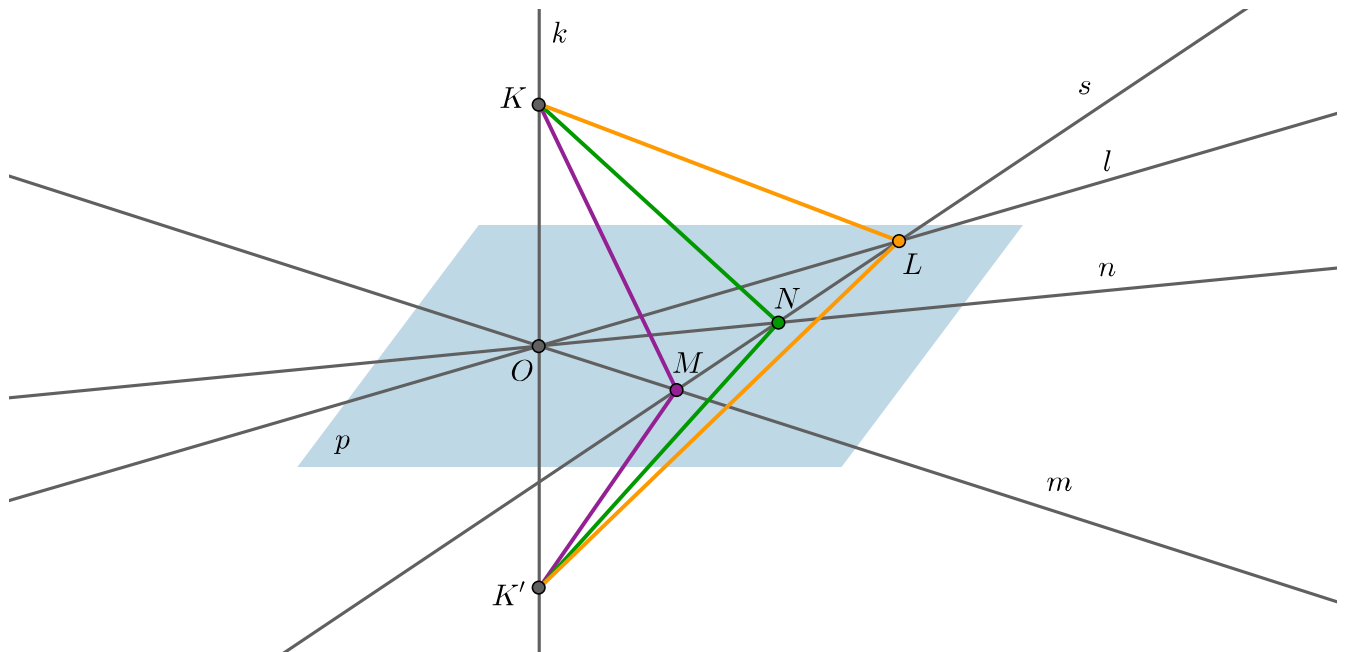
Dowód

Wyberzmy na prostej k punkt K różny od O . Przez K' oznaczmy punkt symetryczny do K względem O .

Rozpatrzmy w płaszczyźnie p dwie proste:

- dowolną prostą n , która przechodzi przez punkt O i jest różna od każdej z prostych k i l ,
- dowolną prostą s , która leży w płaszczyźnie p i nie przechodzi przez punkt O .

Przez L , M oraz N oznaczmy punkty, w których prosta s przecina proste odpowiednio l , m i n .



Wtedy:

- w trójkącie $KK'M$ prosta OM jest prostopadła do KK' i przechodzi przez środek O tego boku, zatem jest symetralną boku KK' . Oznacza to, że $|MK| = |MK'|$.
- w trójkącie $KK'L$ prosta OL jest prostopadła do KK' i przechodzi przez środek O tego boku, zatem jest symetralną boku KK' . Oznacza to, że $|LK| = |LK'|$.

Ponieważ $|MK| = |MK'|$ oraz $|LK| = |LK'|$, więc na mocy cechy bok – bok – bok stwierdzamy, że trójkąty MKL i $MK'L$ są przystające. Stąd wynikają równości kątów: $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle K'ML|$ oraz $|\sphericalangle KLM| = |\sphericalangle K'LM|$.

Ponieważ $|MK| = |MK'|$ oraz $|\sphericalangle KMN| = |\sphericalangle K'MN|$, więc na mocy cechy bok – kąt – bok stwierdzamy, że trójkąty MKN i $MK'N$ są przystające. Stąd $|NK| = |NK'|$, co oznacza, że trójkąt KNK' jest równoramienny. W tym trójkącie środkowa ON poprowadzona z wierzchołka między ramionami jest prostopadła do podstawy KK' . Oznacza to, że prosta n jest prostopadła do prostej k . To spostrzeżenie kończy dowód.

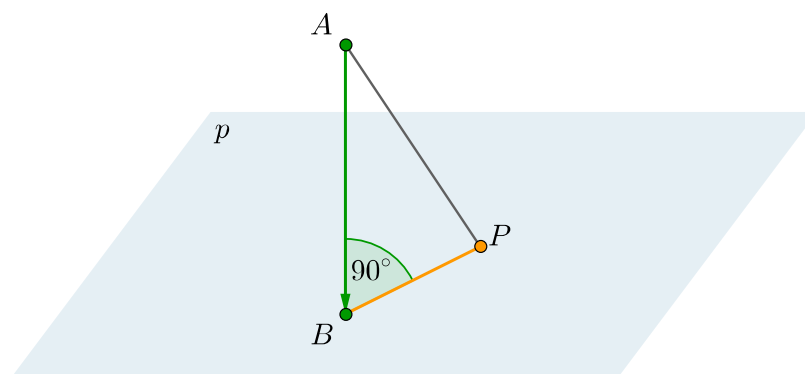
Uwaga. Ponieważ prosta KK' jest prostopadła do płaszczyzny p , więc każda z płaszczyzn przechodzących przez prostą KK' :

- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz M ,
- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz N ,
- płaszczyzna wyznaczona przez punkty K , K' oraz L

jest prostopadła do płaszczyzny p .

Zatem dwie płaszczyzny nazywamy prostopadłymi, jeśli jedna przechodzi przez prostą prostopadłą do drugiej.

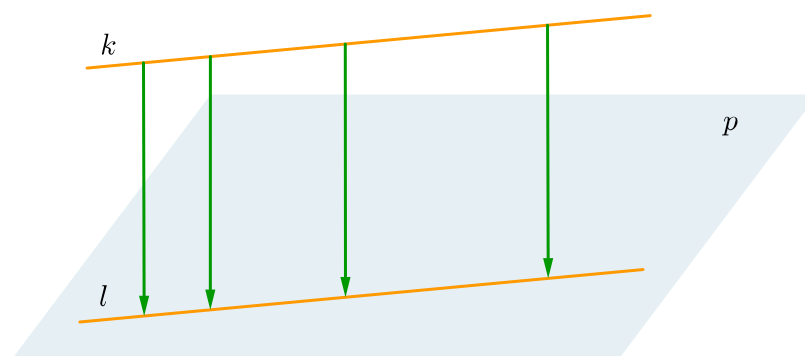
Prowadząc prostopadłą na płaszczyznę p z punktu A leżącego poza tą płaszczyzną, przebijamy płaszczyznę p w punkcie B . Długość odcinka AB wyznacza odległość punktu A od płaszczyzny p . Jeżeli wybierzemy na płaszczyźnie p dowolny punkt P różny od B , to jego odległość od A jest większa od długości odcinka AB , co natychmiast wynika z zastosowania twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABP .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

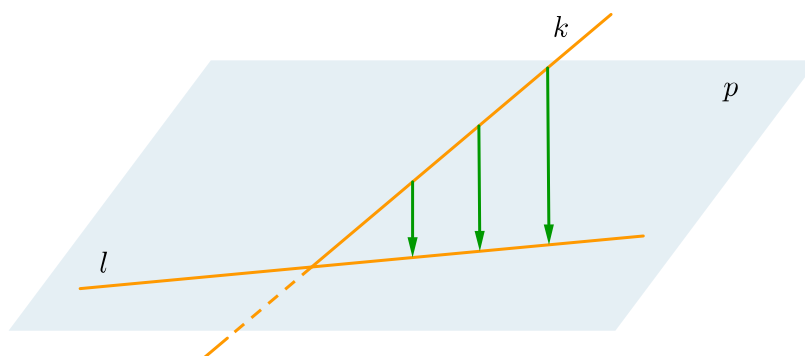
Punkt B nazywamy też rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę p .

Równie oczywiste jest spostrzeżenie, że wszystkie punkty prostej równoległej do danej płaszczyzny są równoodległe od tej płaszczyzny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli natomiast dla pewnych dwóch punktów prostej odległości od płaszczyzny są różne, to ta prosta przebija płaszczyznę.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że rzutem prostokątnym dowolnej prostej k na płaszczyznę p jest prosta l , którą niekiedy nazywa się śladem prostej k na płaszczyźnie p .

Przykład 5

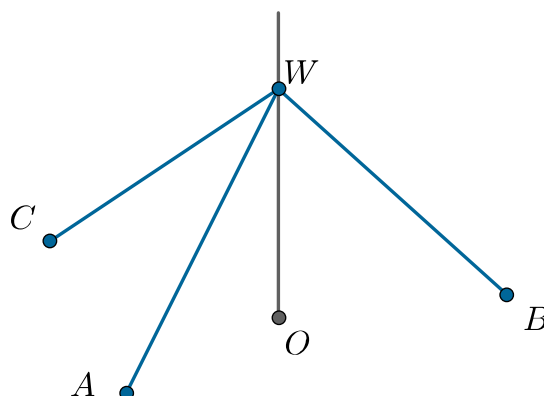
Przy montażu terenowego masztu antenowego stosuje się tzw. odciąg. Są to zazwyczaj linki stalowe o odpowiedniej wytrzymałości. Jeden koniec odciagu jest połączony z konstrukcją masztu, a drugi – z podłożem. Do mocowania odciagu w praktyce stosuje się regulowane połączenia przegubowe zarówno od strony podłoża, jak i masztu. Odciąg rozmieszcza się równomiernie wokół osi masztu, w grupach po trzy lub cztery.

Żeby odciąg te jednakowo przenosiły obciążenia poziome, należy zadbać również o to, aby były nachylone do płaszczyzny podłoża pod takim samym kątem.



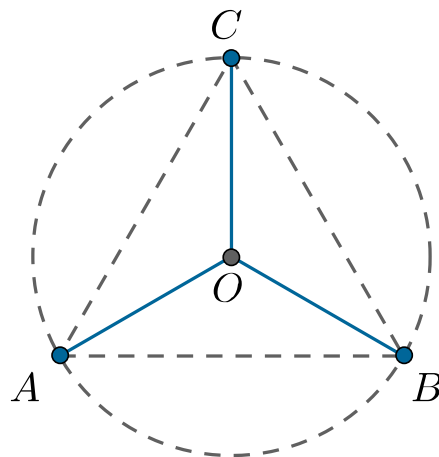
Źródło: Ratsbew, dostępny w internecie: <https://commons.wikimedia.org/>, licencja: CC BY-SA 3.0.

Pokażemy, że wszystkie te warunki są zrealizowane, gdy miejsca połączeń odciągów z fundamentem znajdują się w wierzchołkach wielokąta foremnego, wpisanego w okrąg o środku znajdującym się w punkcie mocowania masztu do podłoża. Rozpatrzmy model masztu z trzema odciągami (jak na rysunku).



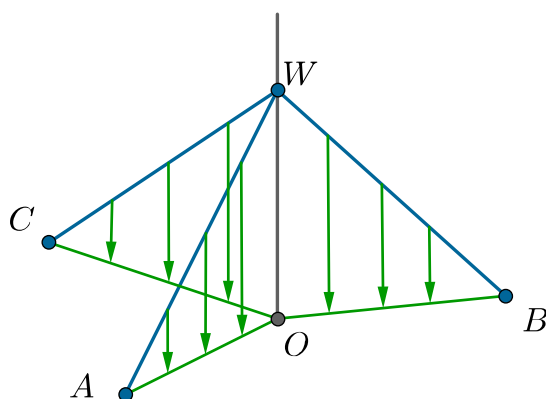
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Spójrzmy na płaszczyznę p , w której leżą punkty A, B, C i O . Punkty A, B, C znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego, wpisanego w okrąg o środku O .



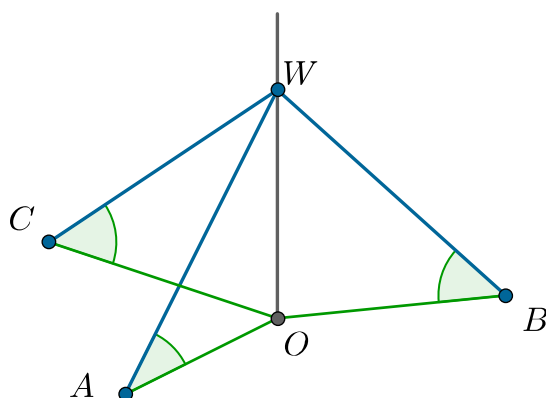
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każdy z odcinków: OA, OB, OC jest rzutem prostokątnym odcinka odpowiednio: AW, BW oraz CW na płaszczyznę p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ $|AO| = |BO| = |CO|$, więc na mocy cechy bok-kąt-bok trójkąty prostokątne: AOW, BOW, COW są przystające. Oznacza to, że odcinki AW, BW oraz CW są równe, a także równe są kąty: OAW, OBW, OCW .



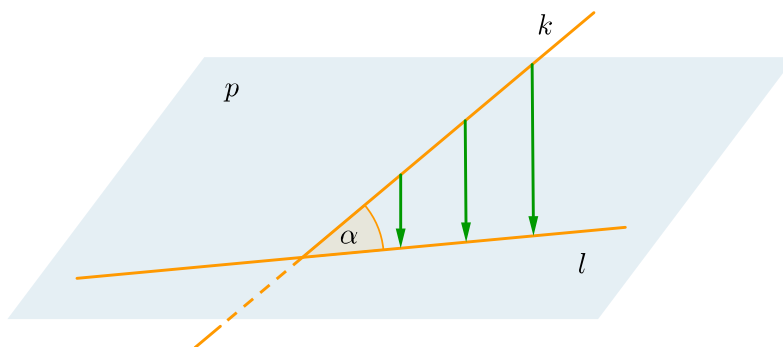
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Każdy z kątów: OAW , OBW , OCW uznajemy za kąt nachylenia prostej odpowiednio: AW , BW oraz CW do płaszczyzny p .

Przyjmujemy bowiem następującą umowę.

Definicja: kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k , która nie jest ani równoległa, ani prostopadła do płaszczyzny p . Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny p nazywamy kąt ostry między tą prostą i jej rzutem prostokątnym l na płaszczyznę p .

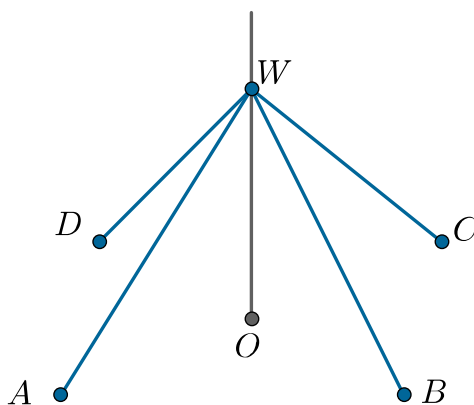


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

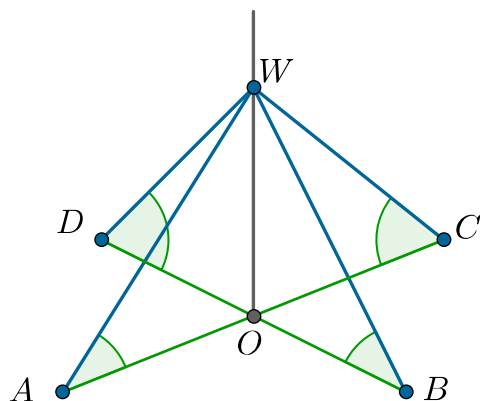
Rozpatrzmy model masztu OW z czterema odciągami AW , BW , CW oraz DW .

Przy opisanych wcześniej założeniach: czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, którego przekątne przecinają się w punkcie O .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

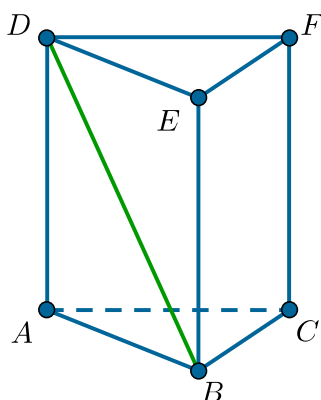
Ponieważ $|AO| = |BO| = |CO| = |DO|$, więc na mocy cechy bok – kąt – bok trójkąty prostokątne: AOW , BOW , COW oraz DOW są przystające. Oznacza to, że równe są kąty nachylenia odcinków AW , BW , CW oraz DW do płaszczyzny, w której leży kwadrat $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

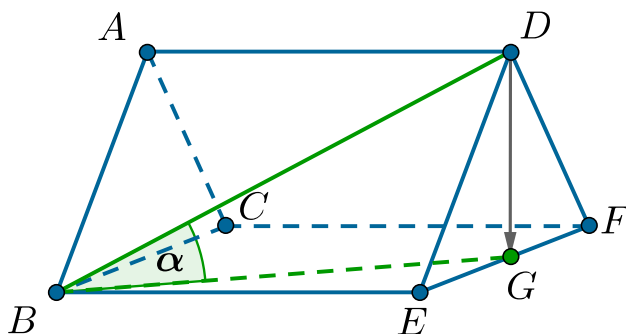
W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym $ABCDEF$ podstawami są trójkąty ABC i DEF . Zaznaczmy kąt, pod jakim przekątna DB ściany bocznej $ABED$ jest nachylona do ściany bocznej $BCFE$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wyznamy rzut prostokątny prostej BD na ścianę $BCFE$. Postawmy w tym celu graniastosłup na tej ścianie.

Zauważmy, że prosta BD przebija ścianę $BCFE$ w punkcie B . Dany graniastosłup jest prosty, zatem płaszczyzny ścian DEF i $BCFE$ są prostopadłe. Ponadto trójkąt DEF jest równoboczny, więc rzutem prostokątnym punktu D na ścianę $BCFE$ jest punkt G – środek krawędzi EF . Zatem kątem α , pod jakim prosta DB jest nachylona do ściany $BCFE$, jest kąt DBG .



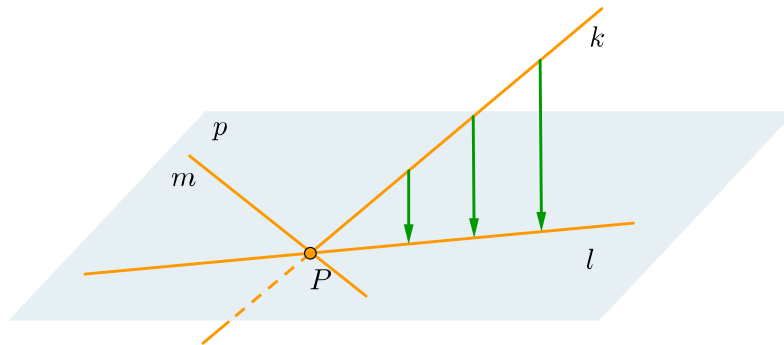
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Reguła: o trzech prostych prostopadłych

Rozpatrzmy płaszczyznę p oraz prostą k , która przebija tę płaszczyznę w punkcie P . Oznaczmy przez l prostą, która jest rzutem prostokątnym prostej k na płaszczyznę p .

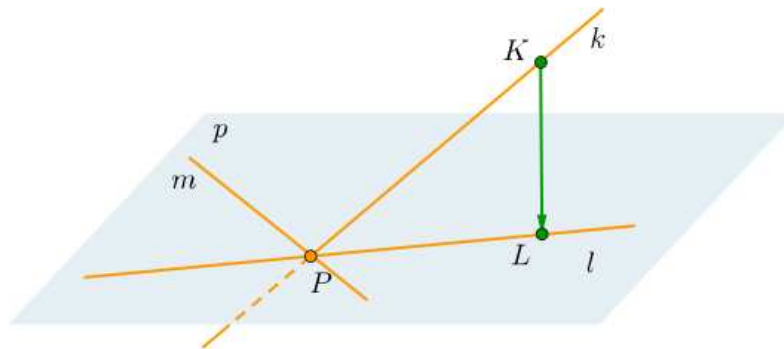
Wówczas dowolna prosta m leżąca w płaszczyźnie p jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dowód

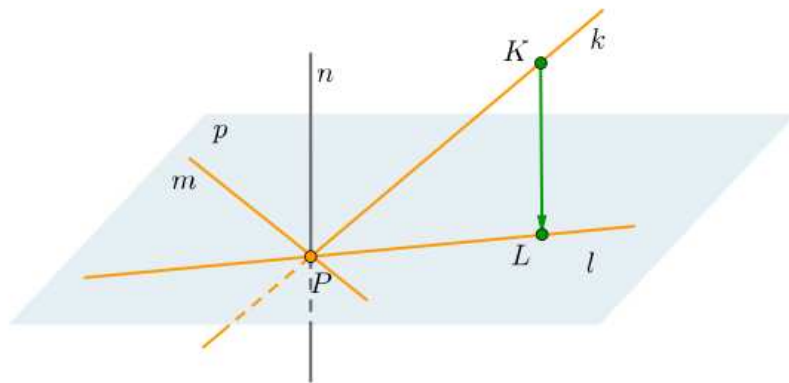
Rozpatrzmy na prostej k punkt K różny od P . Jego rzutem prostokątnym jest punkt L , który leży na prostej l .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wtedy prosta KL jest prostopadła do płaszczyzny p , a więc każda płaszczyzna, która zawiera prostą KL , jest prostopadła do p . Jedną z takich płaszczyzn jest ta, którą wyznaczają proste k i l . Nazwijmy tę płaszczyznę p' .

Rozpatrzmy prostą n leżącą w płaszczyźnie p' , przechodzącą przez punkt P i równoległą do KL .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ prosta n jest prostopadła do płaszczyzny p , więc jest również prostopadła do prostej m .

Zatem:

- jeżeli m jest także prostopadła do k , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz k), zatem i do prostej l ,
- jeżeli m jest także prostopadła do l , to jest prostopadła do płaszczyzny p' (bo jest prostopadła do dwóch prostych leżących w tej płaszczyźnie: n oraz l), zatem i do prostej k .

Oznacza to, że prosta m jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l .

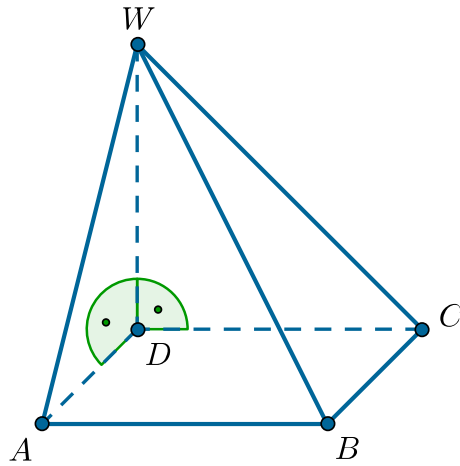
To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 8

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest prostokąt $ABCD$. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Wykażemy, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi.

Ponieważ krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa, więc prosta DW jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$ danego ostrosłupa.

W szczególności DW jest prostopadła do prostych DA oraz DC , zatem trójkąty ADW i CDW są prostokątne.



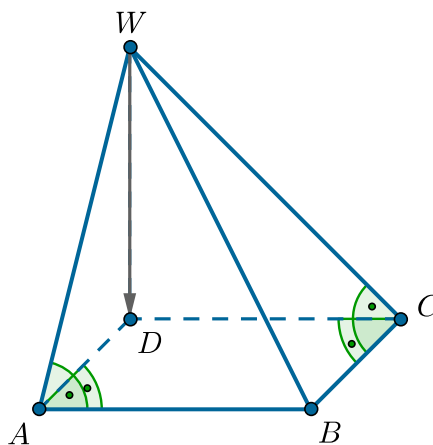
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy ponadto, że:

- prosta AW przebija płaszczyznę podstawy ostrosłupa w punkcie A , a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę jest prosta DA ,
- prosta CW przebija płaszczyznę podstawy ostrosłupa w punkcie C , a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę jest prosta DC .

Ponieważ $ABCD$ jest prostokątem, więc prosta DA jest prostopadła do prostej AB , a prosta DC jest prostopadła do prostej CB . Korzystając zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, stwierdzamy, że:

- prosta AW jest prostopadła do prostej AB , co oznacza, że trójkąt ABW jest prostokątny,
- prosta CW jest prostopadła do prostej CB , co oznacza, że trójkąt BCW jest prostokątny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

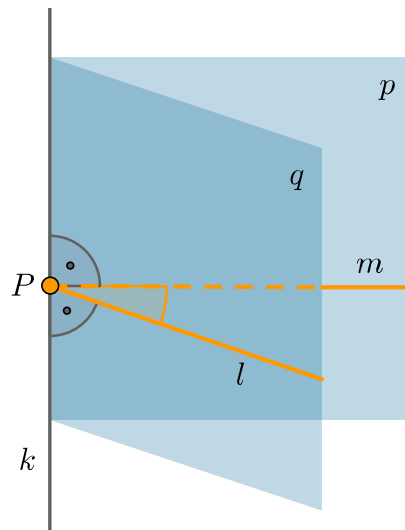
W ten sposób wykazaliśmy, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa $ABCDW$ są trójkątami prostokątnymi.

Podamy teraz sposób, według którego mierzymy kąt nachylenia płaszczyzny q do płaszczyzny p , gdy te płaszczyzny nie są ani równoległe, ani prostopadłe.

W tym celu z dowolnego punktu P wybranego na krawędzi k tych płaszczyzn (czyli na prostej, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny p i q) prowadzimy w każdej z tych płaszczyzn prostą prostopadłą do krawędzi k – oznaczmy te proste przez l i m .

Mniejszy z kątów utworzonych przez proste l i m nazywamy kątem nachylenia płaszczyzny p do płaszczyzny q .

Praktycznie dla zmierzenia takiego kąta nachylenia wystarczy zatem zaznaczyć dwie prostopadłe do krawędzi półproste w stosownych do sytuacji półpłaszczyznach i zmierzyć kąt między nimi.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąt między dwiema płaszczyznami

W tej sytuacji warto przypomnieć pomysł z wcześniejszego przykładu – po otwarciu drzwi zamocowanych do pionowego słupka ościeżnicy możemy, stosując powyższy przepis, bez kłopotu zmierzyć kąt, o jaki skrzydła tych drzwi odchyliły się od płaszczyzny, w której zamocowana jest ościeżnica.

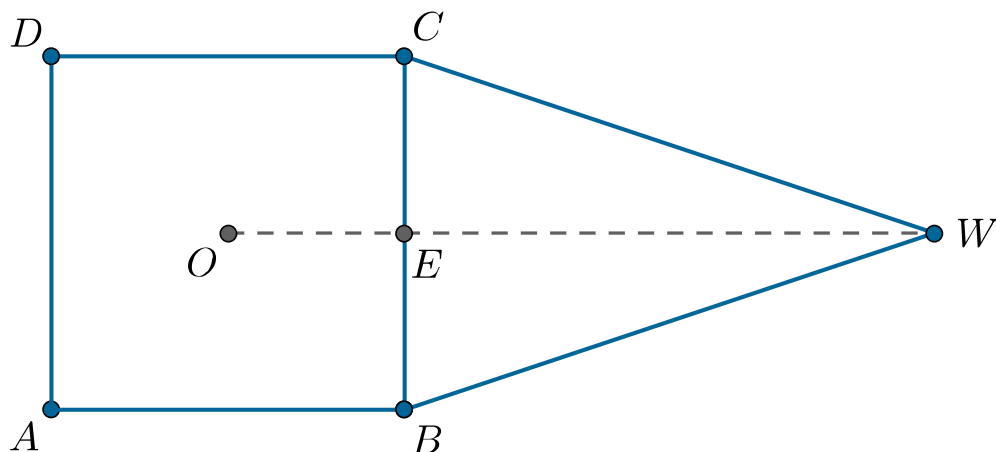
Przykład 9

Wróćmy do modelu, rozpatrywanego w przykładzie 6. Wykażemy, że każda z czterech płaszczyzn ścian bocznych ostrosłupa $ABCDW$ jest nachylona pod tym samym kątem do płaszczyzny podstawy $ABCD$.

- sposób I

Rozpatrzmy dwie płaszczyzny: płaszczyznę p , w której leży kwadrat $ABCD$, oraz płaszczyznę q_1 , w której leżą punkty B , C i W . Oznaczmy przez E środek odcinka BC .

Narysujmy trójkąt BCW na płaszczyźnie, na której leży kwadrat $ABCD$.



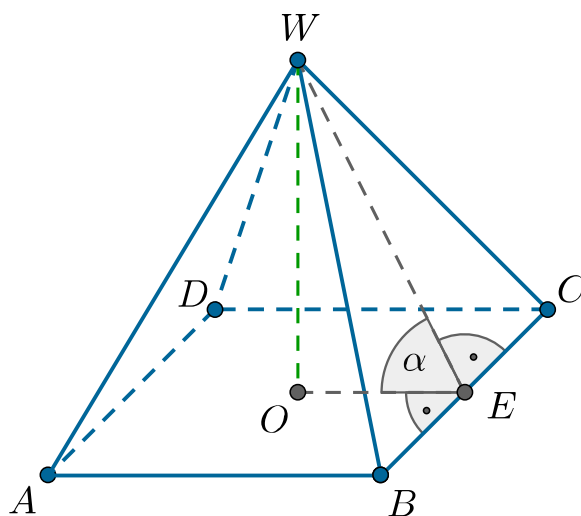
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że

- ponieważ punkty B i C są równo oddalone od punktu O , więc O leży na symetralnej odcinka BC ,
- ponieważ punkty B i C są równo oddalone od punktu W , więc W leży na symetralnej odcinka BC .

Zatem w punkcie E , symetralna OW przecina pod kątem prostym odcinek BC .

Oznacza to, że mierząc kąt OEW (oznaczony na rysunku jako α), dowiemy się, pod jakim kątem płaszczyzna q_1 jest nachylona do płaszczyzny p .



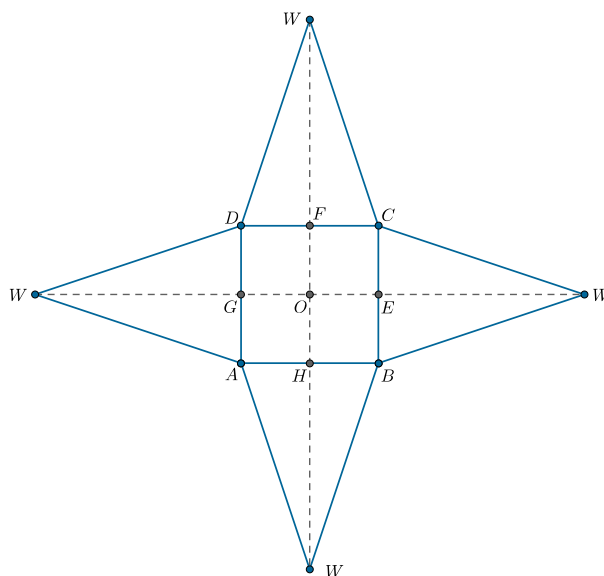
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozpatrzmy z kolei płaszczyzny:

- q_2 – w której leżą punkty C , D i W ,
- q_3 – w której leżą punkty D , A i W ,
- q_4 – w której leżą punkty A , B i W .

Oznaczmy też środki odcinków CD , DA oraz AB przez odpowiednio F , G oraz H .

Narysujmy teraz każdy z trójkątów: ABW , BCW , CDW i DAW na płaszczyźnie, na której leży kwadrat $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozumując podobnie jak w przypadku płaszczyzn p i q_1 , stwierdzamy, że:

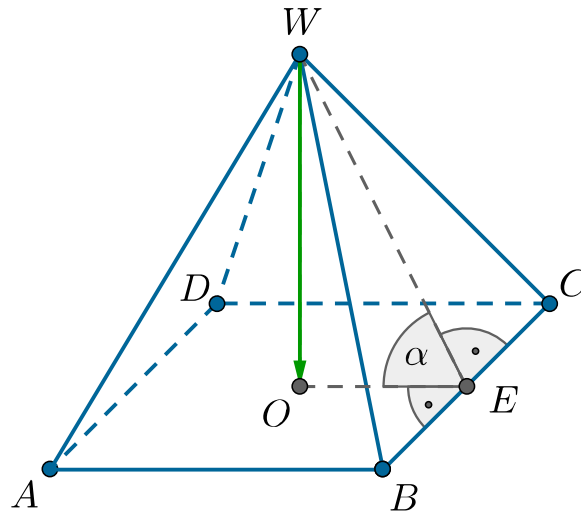
- kąt nachylenia płaszczyzny q_2 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OFW ,
- kąt nachylenia płaszczyzny q_3 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OGW ,
- kąt nachylenia płaszczyzny q_4 do płaszczyzny p ma miarę taką, jak kąt OHW .

Ponieważ trójkąty OEW , OFW , OGW oraz OHW mają równe przyprostokątne (są to wysokości przystających trójkątów równoramiennych ABW , BCW , CDW oraz DAW), a także równe są odcinki OE , OF , OG , oraz OH to te trójkąty są przystające. Zatem kąty OEW , OFW , OGW i OHW są równe. Stąd równe są kąty nachylenia płaszczyzn q_1 , q_2 , q_3 oraz q_4 do płaszczyzny p .

- sposób II

Tym razem pokażemy, że przy ustalaniu miar omawianych kątów dwuściennych można skorzystać z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych.

Zauważmy, że prosta OW jest prostopadła do płaszczyzny p , w której leży kwadrat $ABCD$. Prosta WE przebija płaszczyznę p w punkcie E . Rzutem prostokątnym prostej WE na płaszczyznę p jest prosta OE . Ponieważ prosta WE jest prostopadła do prostej BC (bo WE jest wysokością w trójkącie równoramiennym BCW), więc na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych prosta OE jest również prostopadła do prostej BC . Zatem kąt OEW opisuje kąt nachylenia płaszczyzny q_1 do płaszczyzny p .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

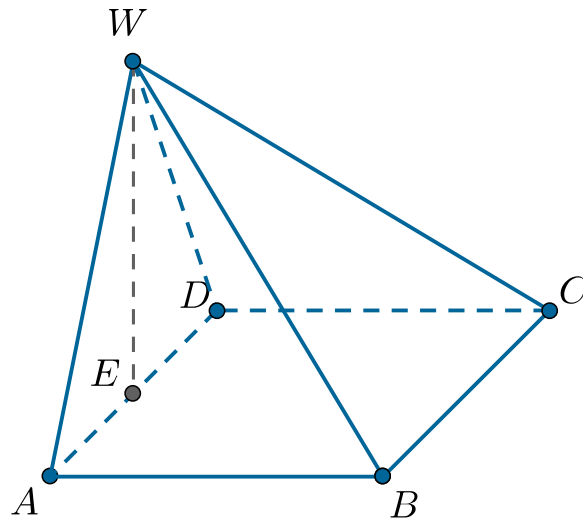
Korzystając z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych, opisujemy kąty nachylenia płaszczyzn q_2, q_3, q_4 do płaszczyzny p jako kąty OFW, OGW i OHW . W trójkątach OEW, OFW, OGW i OHW przyprostokątna OW jest wspólna, a przeciwprostokątne EW, FW, GW i HW są równe, więc te trójkąty są przystające. Stąd równe są kąty nachylenia płaszczyzn q_1, q_2, q_3 oraz q_4 do płaszczyzny p .

Uwaga.

Podobne rozumowanie pozwala stwierdzić, że w dowolnym ostrosłupie prawidłowym równe są kąty, pod jakimi każda ze ścian bocznych jest nachylona do płaszczyzny podstawy. W każdym takim ostrosłupie spodek O wysokości poprowadzonej z wierzchołka W ostrosłupa na podstawę jest bowiem środkiem okręgu opisanego na tej podstawie. Równe są także wysokości ścian bocznych takiego ostrosłupa. Zatem z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych otrzymujemy przystawanie trójkątów, w których jeden z kątów ostrych ma miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy. Stąd te kąty nachylenia są równe.

Przykład 10

Podstawą ostrosłupa $ABCDW$ jest kwadrat $ABCD$. Punkt E jest środkiem krawędzi AD , odcinek EW jest wysokością ostrosłupa.



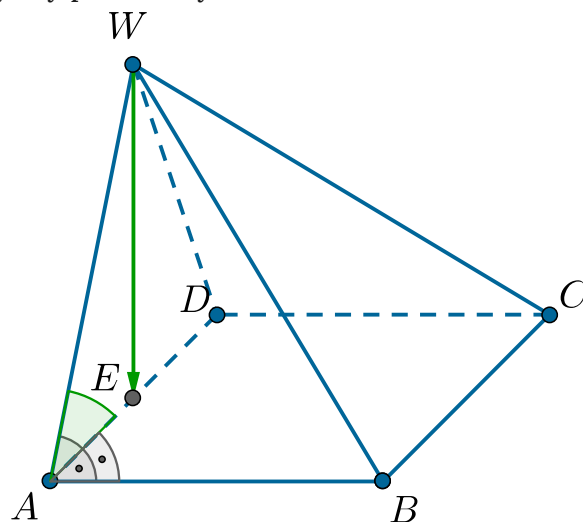
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczmy kąty nachylenia ścian bocznych: ABW , BCW , CDW oraz DAW tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $ABCD$.

Ponieważ prosta WE jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$, więc ściana DAW jest również prostopadła do tej płaszczyzny.

Prosta EA jest rzutem prostokątnym prostej WA na płaszczyznę podstawy $ABCD$.

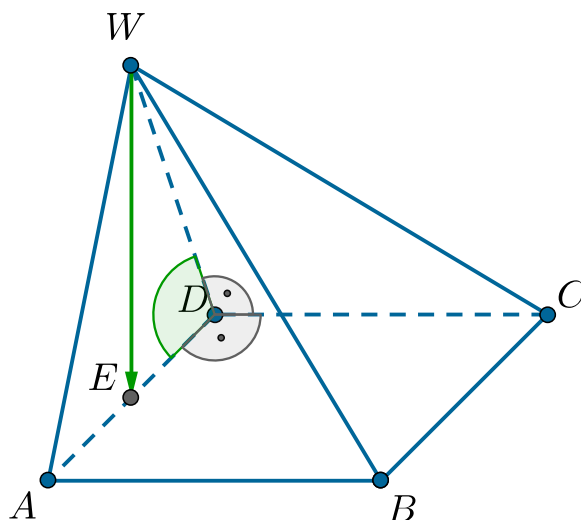
Ponieważ podstawą jest kwadrat $ABCD$, więc prosta EA jest prostopadła do prostej AB . Zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych także prosta WA jest prostopadła do prostej AB . Oznacza to, że kąt WAE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WAB do płaszczyzny podstawy $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Prosta ED jest rzutem prostokątnym prostej WD na płaszczyznę podstawy $ABCD$. Proste ED i DC są prostopadłe, zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych również prosta WD jest prostopadła do prostej DC . Oznacza to,

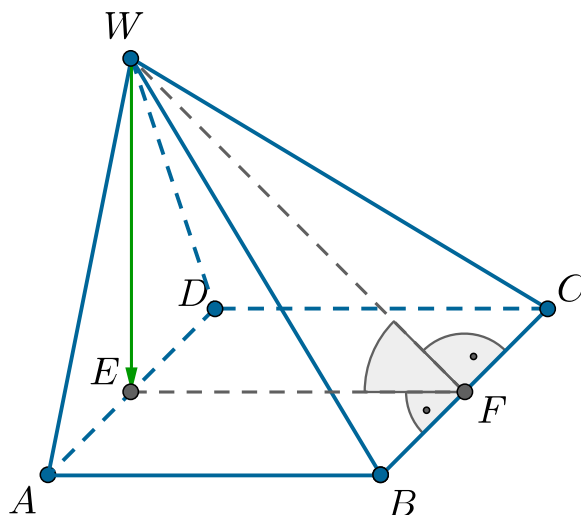
że kąt WDE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WDC do płaszczyzny podstawy $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

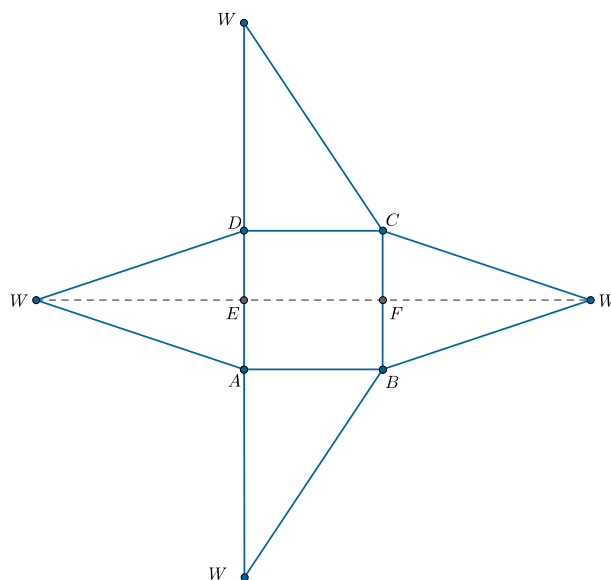
Zauważmy, że w przypadku tego ostrosłupa kąty nachylenia dwóch ścian: ABW oraz CDW do płaszczyzny podstawy $ABCD$ zmierzaliśmy za pomocą kątów płaskich odpowiednio: WAD i WDA w ścianie DAW .

Oznaczamy środek krawędzi BC przez F . Wtedy prosta EF jest rzutem prostokątnym prostej WF na płaszczyznę podstawy $ABCD$. Proste EF i BC są prostopadłe, zatem na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych również prosta WF jest prostopadła do prostej BC . Oznacza to, że kąt WFE jest kątem nachylenia płaszczyzny ściany WBC do płaszczyzny podstawy $ABCD$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

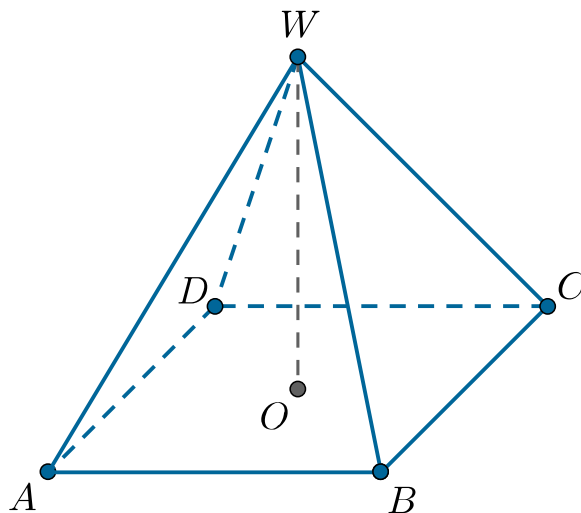
Odkładając każdy z trójkątów: ABW , BCW , CDW oraz DAW na płaszczyznę kwadratu $ABCD$, otrzymamy następującą siatkę ostrosłupa $ABCDW$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 11

Rozpatrzmy ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDW$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

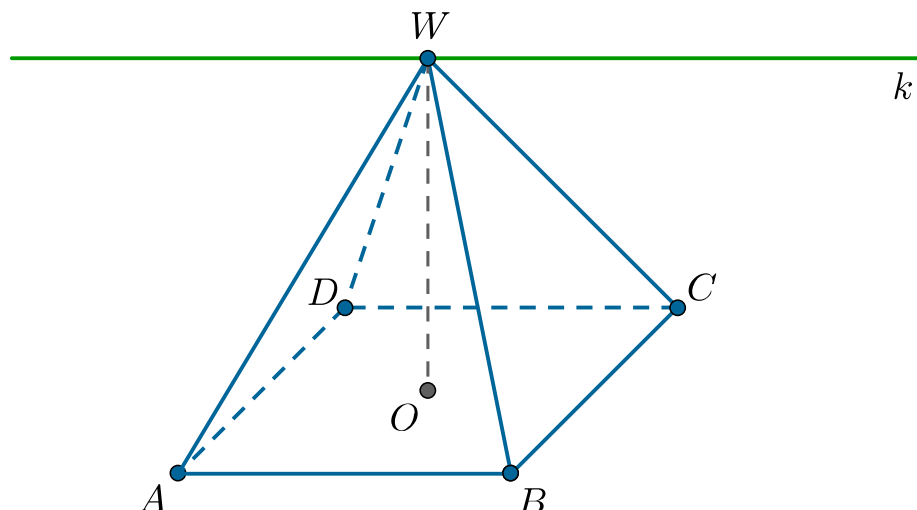
Płaszczyzny ścian ABW oraz CDW mają punkt wspólny W , zatem przecinają się wzdłuż pewnej prostej przechodzącej przez W . Zaznaczmy krawędź k przecięcia tych płaszczyzn.

Zauważmy, że proste AB i CD są równoległe. Zatem prosta k przechodząca przez W i równoległa do jednej z nich jest równoległa także do drugiej.

Oznacza to, że prosta k

- jest równoległa do prostej AB i przechodzi przez punkt W , zatem leży w płaszczyźnie ściany ABW ,
- jest równoległa do prostej CD i przechodzi przez punkt W , zatem leży w płaszczyźnie ściany CDW .

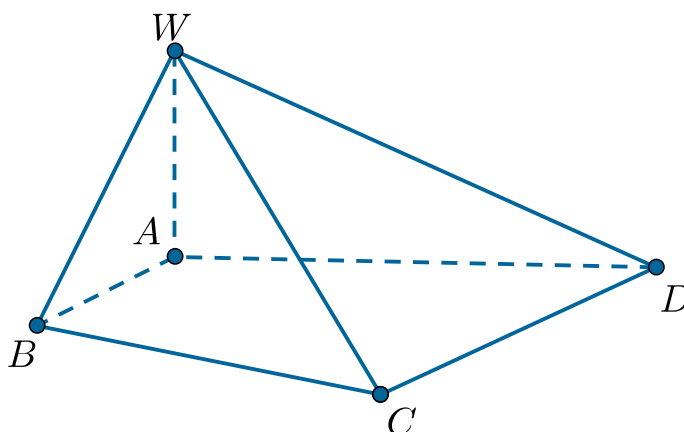
Płaszczyzny tych ścian nie są, oczywiście, równoległe, zatem prosta k jest szukaną krawędzią przecięcia płaszczyzn ścian ABW i CDW .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 12

Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDW$ jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym podstawa AB jest krótsza od podstawy CD .

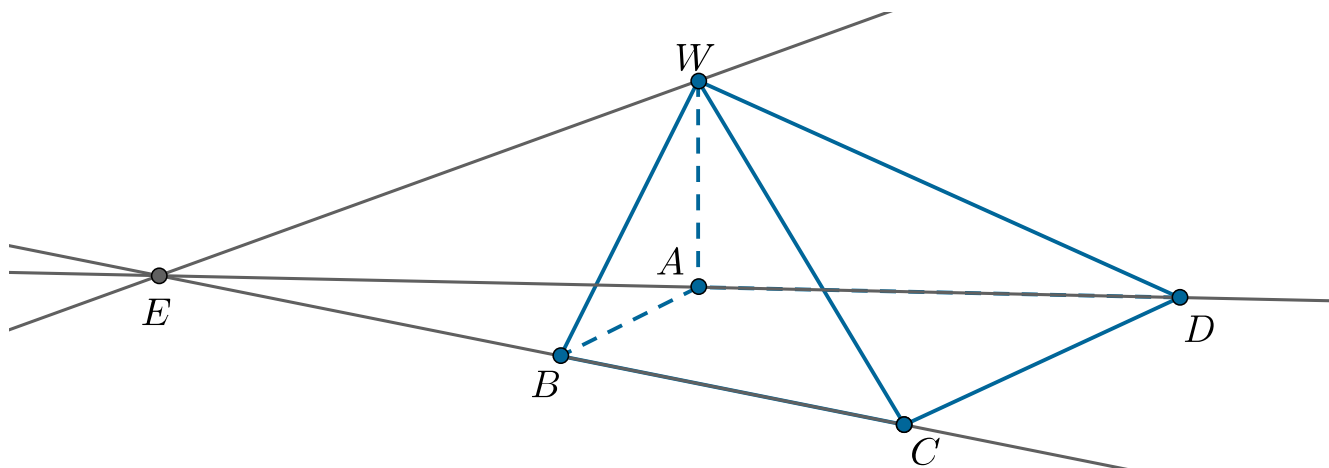


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Płaszczyzny ścian ADW oraz BCW mają punkt wspólny W , zatem przecinają się wzdłuż pewnej prostej przechodzącej przez W . Zaznaczmy krawędź przecięcia tych płaszczyzn.

Zauważmy, że proste AD i BC nie są równoległe. Zatem punkt E , w którym te proste się przecinają, leży jednocześnie w płaszczyźnie ścian ADW (bo każdy punkt prostej AD leży w tej płaszczyźnie) oraz w płaszczyźnie ścian BCW (bo każdy punkt prostej BC leży w tej płaszczyźnie).

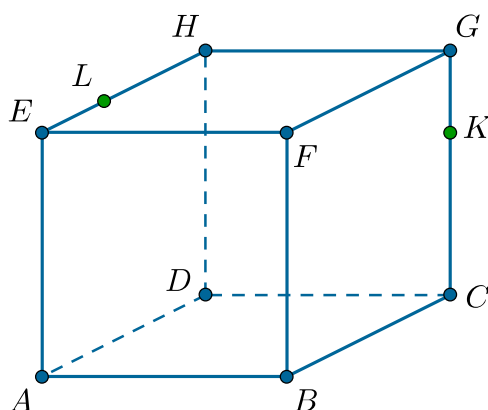
Mamy zatem dwa punkty E i W , które należą jednocześnie do płaszczyzny każdej ze ścian: ADW oraz BCW . Punkty te leżą więc na krawędzi, wzdłuż której przecinają się płaszczyzny tych ścian. Oznacza to, że prosta WE jest szukaną krawędzią.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 13

Na krawędziach CG oraz HE sześciangu $ABCDEFGH$ wybrano punkty odpowiednio K i L .



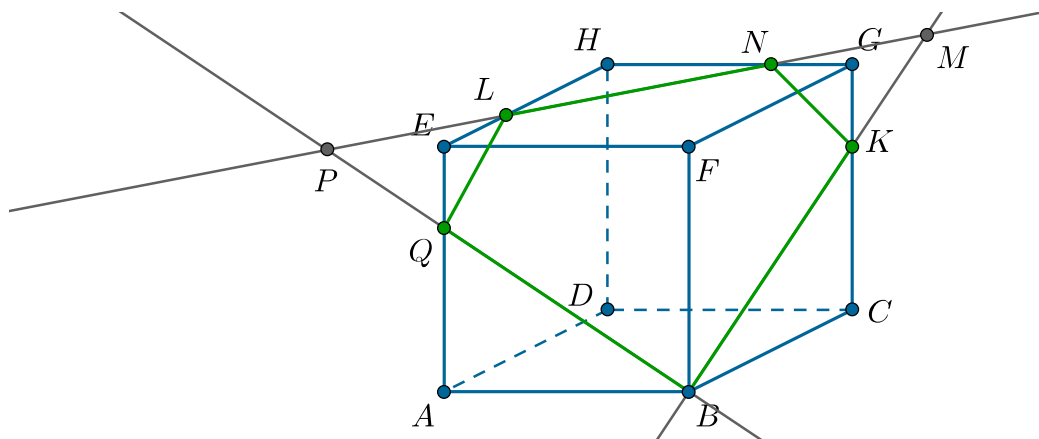
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczymy płaski przekrój tego sześciangu płaszczyzną p , do której należą punkty B , K oraz L .

Do płaszczyzny tego przekroju należy prosta BK . Oznaczmy przez M punkt przecięcia tej prostej z krawędzią FG , wzdłuż której przecinają się płaszczyzny ścian $BCGF$ oraz $EHGF$. Zatem punkt M należy do płaszczyzny p , a także leży w płaszczyźnie ścian $EHGF$. W tej płaszczyźnie leży też punkt L , który należy do płaszczyzny przekroju. Oznacza to, że prosta ML należy do płaszczyzny p .

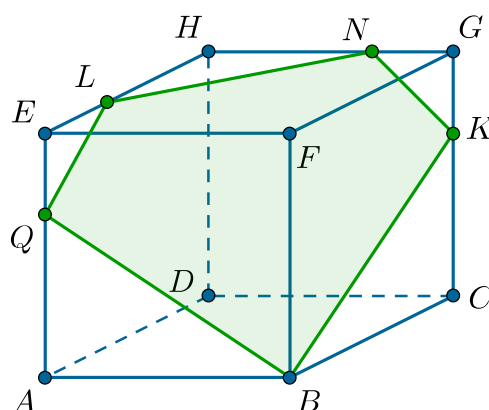
Oznaczmy przez P punkt, w którym prosta ML przecina krawędź EF między płaszczyznami $GHEF$ oraz $BAEF$. Punkt P należy do płaszczyzny przekroju, a także leży w płaszczyźnie ścian $ABFE$. W tej płaszczyźnie leży również punkt B , który należy do płaszczyzny p . Zatem prosta PB należy do płaszczyzny przekroju.

Oznaczmy przez N punkt, w którym prosta PM przecina krawędź GH , a przez Q – punkt, w którym prosta PB przecina krawędź AE .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wobec tego płaskim przekrojem sześcianu płaszczyzną p , do której należą punkty B , K oraz L jest pięciokąt $BKNLQ$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że proste BK i QL leżą w płaszczyznach równoległych ścian odpowiednio $BCGF$ i $ADHE$ danego sześcianu. Zatem te proste nie mają punktów wspólnych, a więc są skośne lub równoległe. Jednocześnie obie te proste leżą w płaszczyźnie p , co oznacza że, są to proste równoległe.

Rozumując podobnie, można uzasadnić twierdzenie o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną.

Twierdzenie: o dwóch płaszczyznach równoległych przeciętych płaszczyzną

Jeżeli płaszczyzna przecina każdą z dwóch płaszczyzn równoległych, to otrzymane krawędzie przecięcia są prostymi równoległymi.

Przykład 14

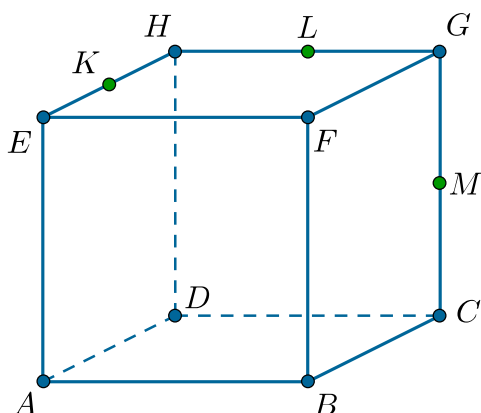
Na podstawie tego twierdzenia stwierdzamy, że również proste BQ i NK są równoległe – otrzymujemy je w wyniku przecięcia płaszczyzną p dwóch równoległych płaszczyzn: płaszczyzny ściany $ABFE$ oraz płaszczyzny ściany $CDHG$.

Zatem pięciokąt $BKNLQ$ ma dwie pary boków równoległych: $BQ \parallel NK$ oraz $BK \parallel QL$.

Przykład 15

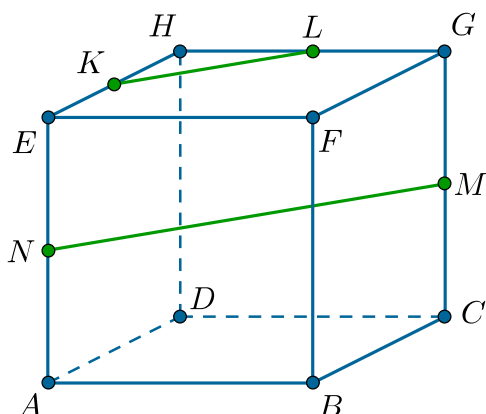
Rozpatrzmy sześcian $ABCDEFGH$, którego krawędź ma długość a .

Wykorzystując spostrzeżenia poczynione w poprzednim przykładzie, można wykazać, że płaski przekrój sześcianu płaszczyzną p , do której należą środki K , L , M krawędzi, odpowiednio EH , HG oraz GC (zobacz rysunek), jest sześciokątem foremnym.



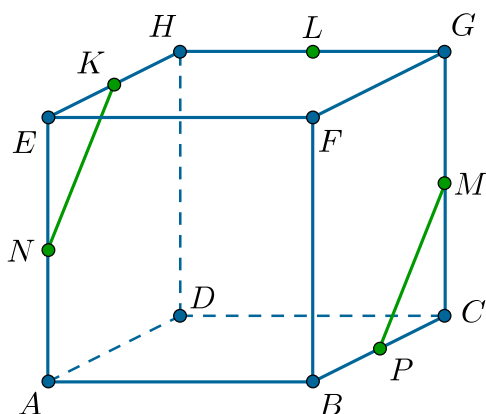
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Do tego przekroju należy bowiem prosta równoległa do prostej KL i przechodząca przez punkt M . Ta prosta przecina krawędź AE w jej środku N .



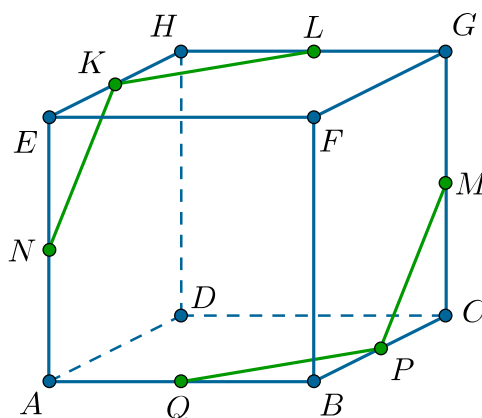
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ ściany $ADHE$ i $BCGF$ są równoległe, więc płaszczyzna p przecina ścianę $BCGF$ wzdłuż prostej równoległej do KN i przechodzącej przez punkt M . Ta prosta przecina krawędź BC w jej środku P .



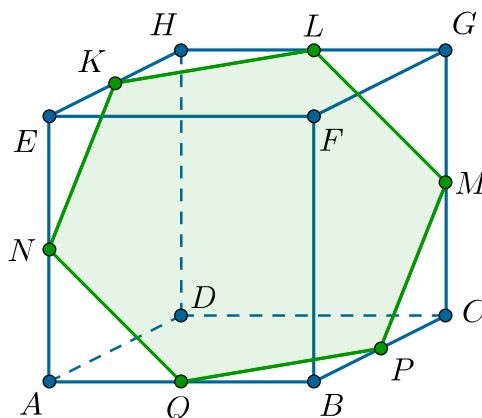
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozumując podobnie, pokazujemy, że do płaszczyzny przekroju należy prosta równoległa do prostej KL i przechodząca przez punkt P . Ta prosta przecina krawędź AB w jej środku Q .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem przekrojem danego sześcianu jest sześciokąt $KLMPQN$.



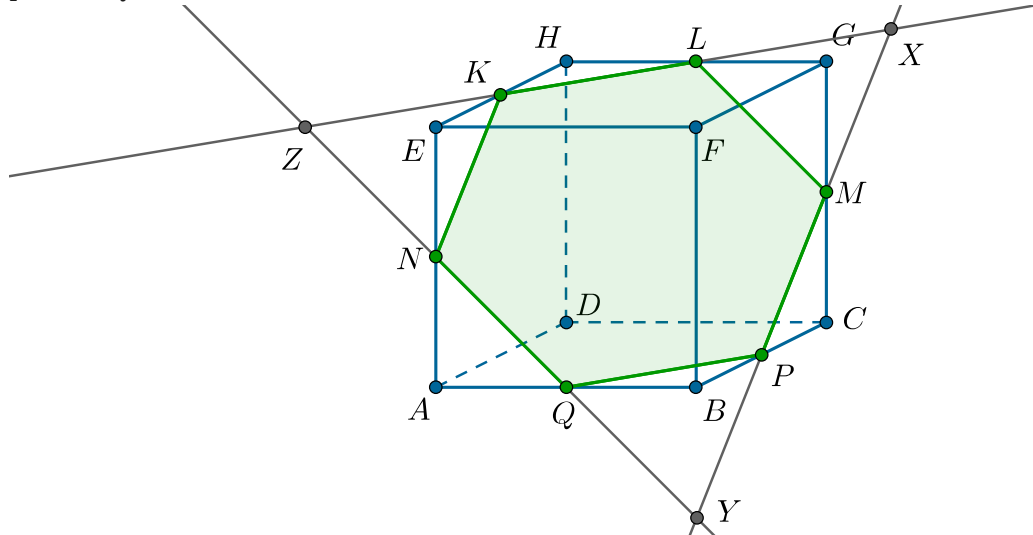
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jego wierzchołki są środkami sześciu krawędzi sześcianu, więc każdy z boków tego sześciokąta ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy też, że każda z przekątnych PK , QL i NM sześciokąta $KLMPQN$ jest odcinkiem łączącym środki przeciwległych (nieskośnych) krawędzi sześcianu, zatem jest równa przekątnej ściany sześcianu. Stąd każda z tych przekątnych ma długość $a\sqrt{2}$. Oznaczmy przez S punkt, w którym przecinają się przekątne PK i QL . Ponieważ czworokąt $KLPQ$ jest równoległobokiem ($KL \parallel PQ$ oraz $|KL| = |PQ| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$), więc S jest środkiem każdego z odcinków PK , QL . Rozumując podobnie, pokazujemy, że czworokąt $LMQN$ również jest równoległobokiem, co oznacza, że S jest także środkiem odcinka NM . Wobec tego przekątne PK , QL i NM dzielą sześciokąt $KLMPQN$ na sześć trójkątów równobocznych o boku $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. To spostrzeżenie kończy dowód - sześciokąt $KLMPQN$ jest foremny.

Podamy jeszcze jeden sposób uzasadnienia, że sześciokąt $KLMPQN$ jest foremny.

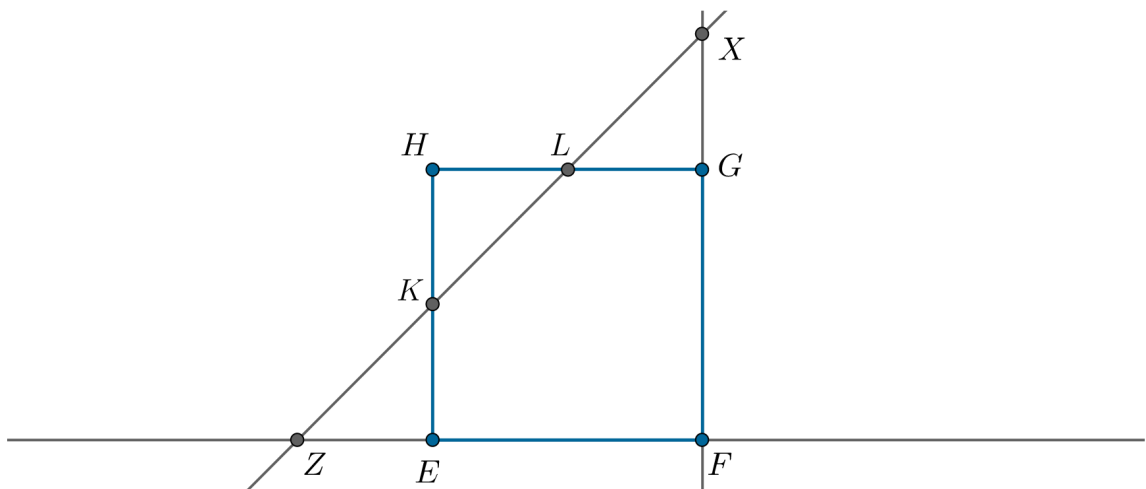
Rozpatrzmy proste KL , MP oraz NQ . Ponieważ leżą one w jednej płaszczyźnie, więc:

- proste KL i MP przecinają się w punkcie X , leżącym na krawędzi FG między płaszczyznami ścian $BCGF$ oraz $EHGF$,
- proste MP i QN przecinają się w punkcie Y , leżącym na krawędzi FB między płaszczyznami ścian $CGFB$ oraz $AEFB$,
- proste QN i KL przecinają się w punkcie Z , leżącym na krawędzi FE między płaszczyznami ścian $GHEF$ oraz $BAEF$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W płaszczyźnie ścian $EFGH$, na prostej KL leżą punkty X oraz Z .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ponieważ K i L są środkami krawędzi odpowiednio HG i HE , więc trójkąt HKL jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym. Zatem w trójkątach prostokątnych KGX i LEZ kąty ELZ oraz XKG są równe 45° , co oznacza, że są to trójkąty równoramienne. Wobec tego każdy z nich jest przystający do trójkąta HKL . Stąd wynika, że $|XK| = |KL| = |LZ| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, a więc $|XZ| = 3|KL| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Rozumując podobnie pokazujemy, że:

- $|XM| = |MP| = |PY| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, stąd $|XY| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$,

- $|YQ| = |QN| = |NZ| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, stąd $|YZ| = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Trójkąt XYZ jest więc równoboczny i ma bok długości $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Każdy z trójkątów XML , YPQ oraz ZKN jest też równoboczny i ma bok długości $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. To oznacza, że w sześciokącie $KLMPQN$ każdy z boków jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ i każdy z kątów wewnętrznych ma miarę 120° . Zatem sześciokąt $KLMPQN$ jest foremny.

Zauważmy przy okazji, że jeżeli płaski przekrój sześcianu jest czworokątem, to płaszczyzna tego przekroju przecina pewne cztery ściany sześcianu. Ponieważ w sześcianie są trzy pary ścian równoległych, więc wśród tych czterech ścian sześcianu pewne dwie są równoległe. Zatem przekrój ten jest trapezem. W szczególności może być rombem, a także może być prostokątem.