



## Zależność momentu bezwładności od położenia osi obrotu - Twierdzenie Steinera

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zależność momentu bezwładności od położenia osi obrotu - Twierdzenie Steinera

### Czy to nie ciekawe?

Która planeta ma większy moment bezwładności w ruchu dookoła Słońca – Ziemia czy Mars? Nie tylko poruszają się w różnej odległości od Słońca i mają różne masy, ale też są różnych rozmiarów. Jak obliczyć moment bezwładności, gdy oś obrotu nie przechodzi przez środek masy ciała? Odpowiedź znajdziemy w twierdzeniu Steinera.



Rys. a. Schemat Układu Słonecznego [Źródło: NASA]

### **Twoje cele**

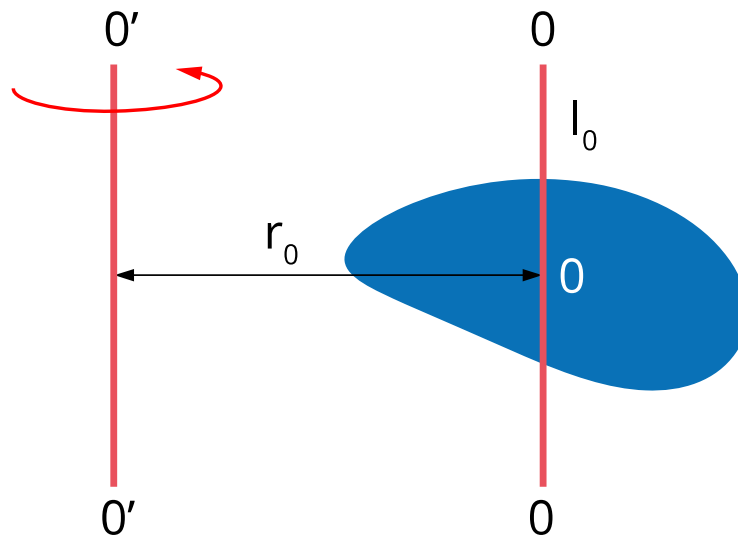
Dzięki temu e-materiałowi:

- zrozumiesz treść twierdzenia Steinera i zastosujesz je w typowych sytuacjach,
- przeanalizujesz zależność momentu bezwładności bryły od położenia osi obrotu.

# Przeczytaj

## Warto przeczytać

[Jakob Steiner](#), szwajcarski matematyk, sformułował w pierwszej połowie XIX wieku twierdzenie, które dziś nazywamy twierdzeniem Steinera. Odpowiada ono na pytanie, jak obliczyć moment bezwładności ciała, jeśli jego oś obrotu nie przechodzi przez środek masy, jak na Rys. 1.



Rys. 1. Obrót ciała wokół osi nieprzechodzącej przez jego środek masy

Twierdzenie Steinera ma następującą postać:

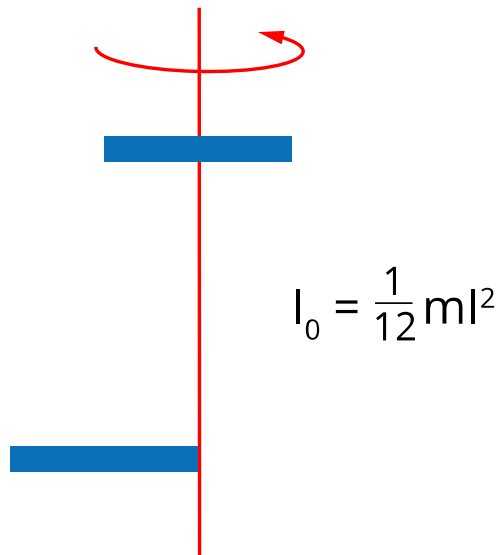
$$I = I_0 + mr_0^2 \quad (1)$$

Gdzie:  $I_0$  – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy (oś O),  $I$  – moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy (oś O'),  $r_0$  – odległość między tymi dwoma osiami,  $m$  – masa bryły.

Jeśli znamy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,  $I_0$ , łatwo obliczymy moment bezwładności względem innej osi. Rozważmy przykład jednorodnego pręta.

### Przykład 1. Podłużny pręt

Spójrzmy na pręt o masie  $m$  i długości  $l$ . Wiemy, że jego moment bezwładności względem osi prostopadłej do długości wynosi  $I_0 = \frac{1}{12}ml^2$ . Obliczmy, jaki będzie moment bezwładności względem końca pręta (Rys. 2.).



Rys. 2. Pręt obracany wokół środka masy oraz wokół końca

Skoro  $I = I_0 + mr_0^2$ , a teraz odległość środka masy  $r_0$  to połowa długości pręta  $l/2$ , to:

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{3}{12} ml^2 = \frac{4}{12} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

### Przykład 2. Drzwi

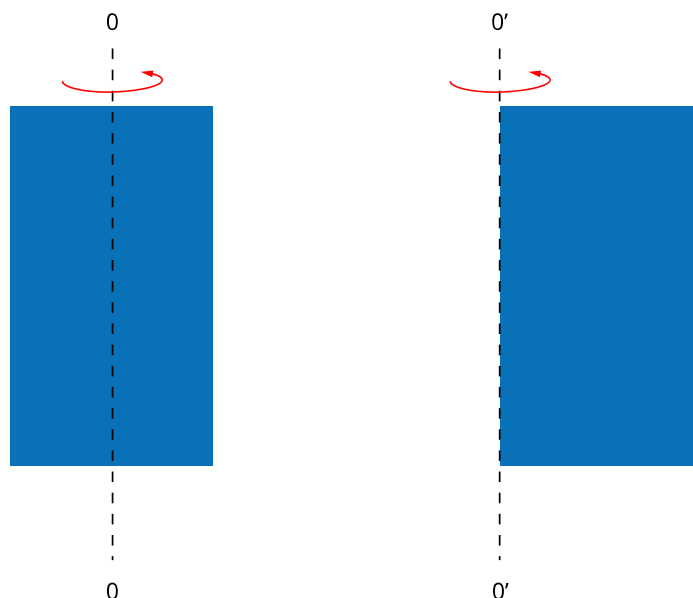
Możemy uznać, że drzwi o masie  $m$  to prostopadłościan o wysokości  $h$ , szerokości  $w$  i grubości  $d$ . Jeśli mamy do czynienia z drzwiami obrotowymi, jak w centrum handlowym, to są one zamocowane na osi pionowej przechodzącej przez ich środek masy. Wtedy ich moment bezwładności wynosi:

$$I_0 = \frac{1}{12} m(w^2 + d^2)$$

Wyobraźmy sobie, że te same drzwi mają możliwość montażu również wzdłuż dłuższej krawędzi, jak zwykle drzwi domowe. Gdyby takie drzwi były zamontowane we framudze, jak na Rys. 3., obracając się wzdłuż krawędzi, to jaki byłby ich moment bezwładności względem tej osi obrotu?

$$I = \frac{1}{12} m(w^2 + d^2) + m \left( \frac{w}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} md^2 + \frac{1}{12} mw^2 + \frac{1}{4} mw^2 = \frac{1}{12} md^2 + \frac{1}{3} mw^2$$

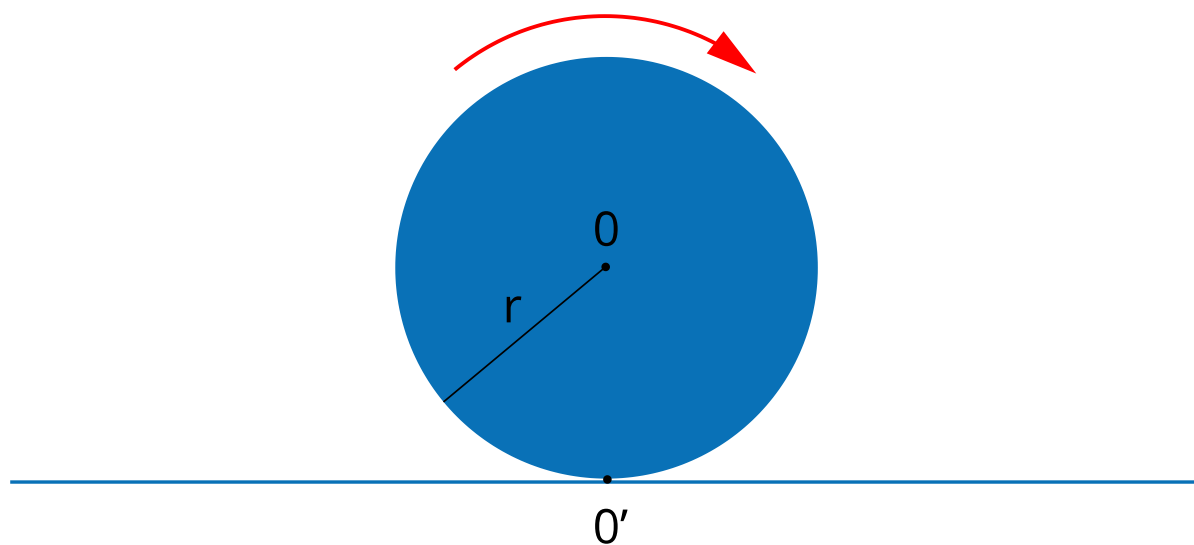
Jak widać, te same drzwi obracane wokół różnych osi mają różne momenty bezwładności.



Rys. 3. Drzwi z lewej to drzwi obrotowe. Drzwi z prawej obracają się na zawiasach osadzonych we framudze

### Przykład 3. Toczący się walec

Moment bezwładności walca o masie  $m$  i promieniu  $r$  wokół osi przechodzącej przez jego środek masy to  $I_0 = \frac{1}{2}mr^2$ . A jeśli ten walec toczy się, to jaki jest jego moment bezwładności względem chwilowej osi obrotu  $O'$ , jaką jest linia styku zetknięcia walca z podłożem, jak na Rys. 4.?



Rys. 4. Toczący się walec

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$

Ponownie widzimy, że ten sam obiekt ma różne momenty bezwładności – w zależności od tego, wokół jakiej osi się obraca. Im dalej oś obrotu znajduje się od środka masy, tym większy staje się moment bezwładności.

## Przykład 4. Układ Słoneczny

Jaki jest moment bezwładności planet w ruchu obrotowym dookoła Słońca? Jeśli przyjmiemy przybliżenie, że planety są jednorodnymi kulami, to moment bezwładności każdej z nich wokół osi przechodzącej przez ich środek masy obliczymy jako  $I = \frac{2}{5}mr^2$ . Przyjrzyjmy się Ziemi i Marsowi. Ziemia ma masę około  $M_Z = 5974 \cdot 10^{21}$  kg. Masa Marsa to  $M_M = 641,9 \cdot 10^{21}$  kg. Promień Ziemi  $R_Z = 6378$  km, a promień Marsa  $R_M = 3402$  km. Zatem moment bezwładności każdego z nich wynosi odpowiednio:

$$\begin{cases} I_{0Z} = \frac{2}{5} M_Z R_Z^2 = \frac{2}{5} \cdot 5974 \cdot 10^{21} \text{ kg} \cdot (6378 \text{ km})^2 = 9,72 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_{0M} = \frac{2}{5} M_M R_M^2 = \frac{2}{5} \cdot 641,9 \cdot 10^{21} \text{ kg} \cdot (3402 \text{ km})^2 = 2,97 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{cases}$$

Czyli moment bezwładności Ziemi jako kuli jest 32 razy większy niż mniejszego i lżejszego Marsa. Ale teraz obliczmy moment bezwładności względem Słońca. Promień orbity Ziemi to średnio  $d_Z = 149\,597\,887$  km, a Marsa  $d_M = 227\,936\,637$  km. Zatem z twierdzenia Steinera:

$$\begin{aligned} I_Z &= I_{0Z} + md_Z^2 = 9,72 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 5974 \cdot 10^{21} \text{ kg} \cdot (149597887 \text{ km})^2 = 1,33 \cdot 10^{47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_M &= I_{0M} + md_M^2 = 2,97 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 641,9 \cdot 10^{21} \text{ kg} \cdot (227936637 \text{ km})^2 = 3,33 \cdot 10^{46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Moment bezwładności Ziemi względem Słońca jest tylko cztery razy większy niż Marsa.

## Słowniczek

**Jakob Steiner**

szwajcarski matematyk, żyjący w latach 1796-1863.

# Film samouczek

---

## Twierdzenie Steinera

Obejrzyj film. Zwróć uwagę, w jaki sposób obliczyć moment bezwładności pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec.

### Polecenie 1

Wykonaj analogiczne obliczenia, gdy oś obrotu wypada w  $1/3$  długości pręta.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Jakim wzorem wyraża się twierdzenie Steinera:

$I_0$  – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,  $I$  – moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy,  $r_0$  – odległość między tymi dwoma osiami,  $m$  – masa bryły.

- $I = I_0 + mr_0$
- $I = I_0 + mr_0^2$
- $I = I_0^2 + mr_0^2$
- $I = I_0^2 + m^2r_0^2$

## Ćwiczenie 2



Zgodnie z twierdzeniem Steinera moment bezwładności ciała ma dwie składowe.

Pierwsza to moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy, a druga to iloczyn  $mr^2$ . Jak zmieni się wartość momentu bezwładności, jeśli odległość od osi obrotu zwiększy się dwukrotnie:

- pozostanie bez zmian
- składowa  $I_0$  pozostanie bez zmian, a druga składowa zwiększy się dwukrotnie
- składowa  $I_0$  pozostanie bez zmian, a druga składowa zwiększy się czterokrotnie
- wzrośnie czterokrotnie

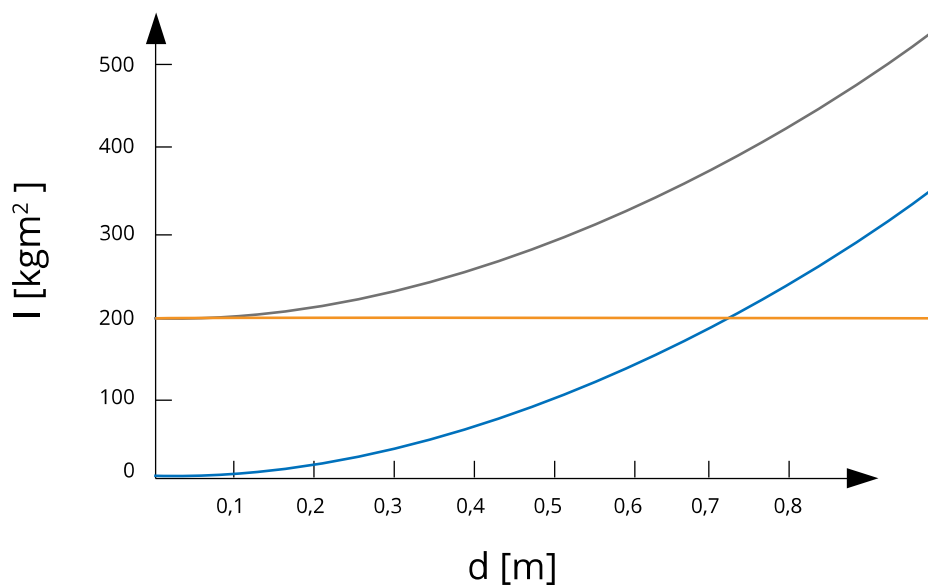
## Ćwiczenie 3



## Ćwiczenie 4



Moment bezwładności kuli o masie  $m$  i promieniu  $r$  wokół osi przechodzącej przez jej środek masy wynosi  $I_0 = \frac{2}{5}mr^2$ . Kula ma masę 500 kg i promień 1 m. Wykres poniżej prezentuje moment bezwładności tej kuli przy obracaniu jej wokół osi w odległości  $d$  od środka kuli.



## Ćwiczenie 5



## Ćwiczenie 6



[Źródło: WP [\[CC BY-SA 3.0\]](#), [via Wikimedia Commons](#)]

## Ćwiczenie 7



[Źródło: WP [\[CC BY-SA 3.0\]](#), [via Wikimedia Commons](#)]

## Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

## Konspekt (scenariusz) lekcji

<b>Imię i nazwisko autora:</b>	Dariusz Aksamit
<b>Przedmiot:</b>	Fizyka
<b>Temat zajęć:</b>	<b>Zależność momentu bezwładności od położenia osi obrotu - Twierdzenie Steinera</b>
<b>Grupa docelowa:</b>	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
<b>Podstawa programowa:</b>	<p><b>Cele kształcenia – wymagania ogólne:</b></p> <p>I. Wykorzystanie pojęć i wielkości fizycznych do opisu zjawisk oraz wskazywanie ich przykładów w otaczającej rzeczywistości.</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p><b>Zakres rozszerzony</b></p> <p><b>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</b></p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych;</p> <p>4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem.</p> <p>III. Mechanika bryły sztywnej. Uczeń:</p> <p>2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi.</p>
<b>Kształtowane kompetencje kluczowe:</b>	<p><b>Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,</li><li>• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,</li><li>• kompetencje cyfrowe,</li><li>• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.</li></ul>

<b>Cele operacyjne:</b>	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. wyjaśnia, jak moment bezwładności bryły zależy od położenia osi obrotu.</li> <li>2. stosuje Twierdzenie Steinera do obliczania momentów bezwładności brył.</li> </ol>
<b>Strategie nauczania:</b>	Inquiry-Based Science Education / uczenie się przedmiotów przyrodniczych przez odkrywanie/dociekanie naukowe
<b>Metody nauczania:</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- pogadanka wstępna,</li> <li>- pokaz multimedialny.</li> </ul>
<b>Formy zajęć:</b>	- praca indywidualna.
<b>Środki dydaktyczne:</b>	komputer z rzutnikiem lub tablety do dyspozycji każdego ucznia, tablica.
<b>Materiały pomocnicze:</b>	e-materiał „Momenty bezwładności ciał dla różnych jednorodnych brył”.
<b>PRZEBIEG LEKCJI</b>	
<b>Faza wprowadzająca</b>	
<p>Nauczyciel przypomina tabelę z momentami bezwładności różnych brył sztywnych wokół osi przechodzących przez ich środek. Nauczyciel pyta: W jaki sposób obliczymy moment bezwładności bryły, gdy środek obrotu wypada poza tę oś, jak na przykład w wypadku planet, krążących wokół Słońca?</p>	
<b>Faza realizacyjna</b>	
<p>Nauczyciel uruchamia film z e-materiału. Po obejrzeniu filmu nauczyciel zapisuje na tablicy treść prawa Steinera. Nauczyciel prosi ochotnika o rozwiązanie zadania 3 z części „Sprawdź się”. Po omówieniu rozwiązania prosi kolejnych ochotników, którzy rozwiązują zadania 4 i 8.</p>	
<b>Faza podsumowująca</b>	
<p>Nauczyciel podsumowuje zastosowania twierdzenia Steinera i zadaje pracę domową.</p>	
<b>Praca domowa</b>	
<p>Zadania z części „Sprawdź się”, których nie rozwiązano w trakcie lekcji, w celu sprawdzenia opanowania materiału.</p>	
<b>Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:</b>	<p>Nauczyciel może polecić film do obejrzenia w domu, przed lekcją, na lekcji omawiając wnioski z niego.</p>