



Równanie osi symetrii wykresu funkcji

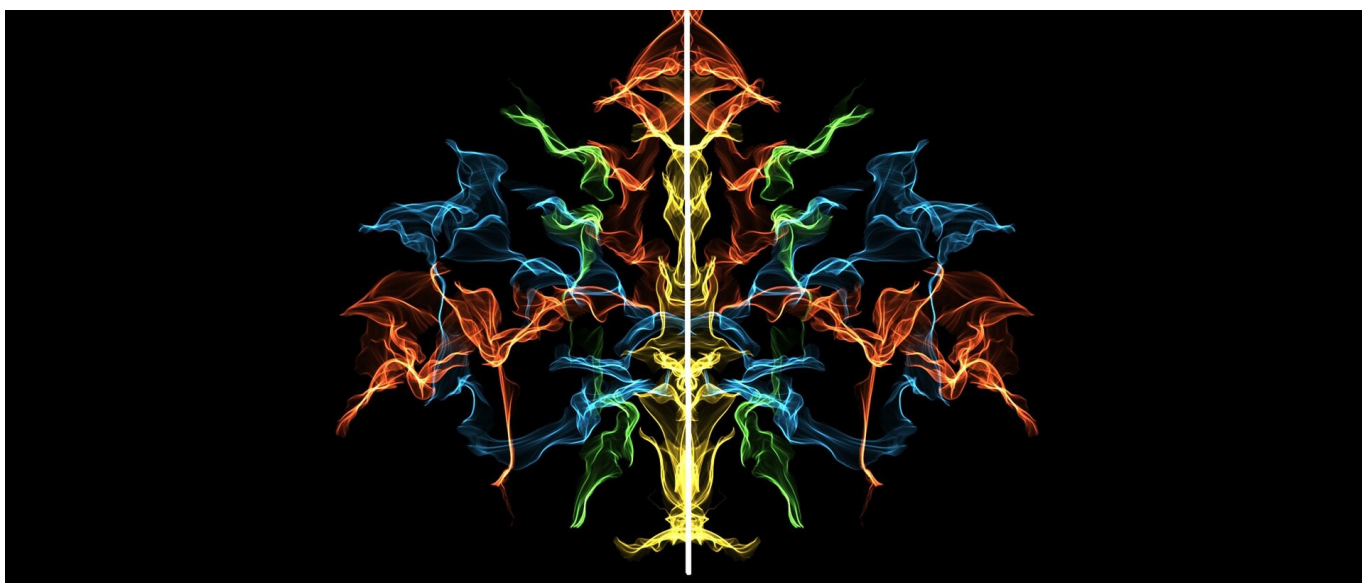
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie osi symetrii wykresu funkcji

Źródło: Vivek Doshi, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Symetria w przyrodzie jest wszechobecna: nasze ciało, kształty zwierząt i roślin, płatki śniegu mają osie symetrii choć nie zawsze są one idealne. Architekci, malarze, rzeźbiarze wykorzystują w swoich dziełach figury osiowosymetryczne.



Wykresy funkcji są figurami geometrycznymi i niektóre z nich również posiadają osie symetrii.

W tym materiale nauczysz się wyznaczać ich równania.

Twoje cele

- Wyznaczysz równanie osi symetrii funkcji $f(x) = a|x - p| + q$.
- Wyznaczysz równanie osi symetrii paraboli.
- Wyznaczysz równanie osi symetrii hiperboli.
- Podasz równania osi symetrii funkcji trygonometrycznych.
- Wyznaczysz równania osi symetrii funkcji złożonych.

Przeczytaj

Oś symetrii figury to prosta, względem której ta figura jest do siebie osiowosymetryczna. Dzieli ona figurę na dwie przystające części.

Oś symetrii funkcji $f(x) = a|x - p| + q$

Przypomnijmy, że wykres funkcji

$$f(x) = a|x - p| + q$$

powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji

$$g(x) = a|x|$$

o wektor

$$[p, q]$$

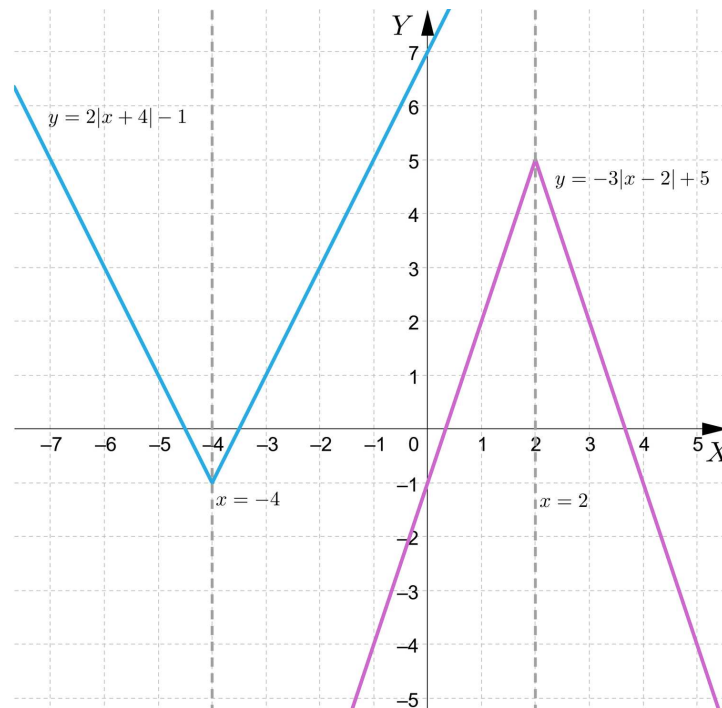
Osią symetrii wykresu funkcji g jest **prosta** $x = 0$.

Przykład 1

Narysujemy wykresy funkcji $f(x) = 2|x + 4| - 1$ oraz $g(x) = -3|x - 2| + 5$ oraz wyznaczymy równania ich **osi symetrii**.

Rozwiązanie:

Narysujemy wykresy obydwu funkcji:



Ponieważ wykres funkcji f powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $h(x) = 2|x|$ o wektor $[-4, -1]$, to również oś symetrii wykresu funkcji h została przesunięta o taki sam wektor. Równanie osi symetrii funkcji f ma postać: $x = -4$.

Ponieważ wykres funkcji g powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $k(x) = -3|x|$ o wektor $[2, 5]$, to również oś symetrii wykresu funkcji g została przesunięta w taki sam sposób. Równanie osi symetrii funkcji g ma postać: $x = 2$.

Oś symetrii paraboli

Przypomnijmy, że **parabola** jest wykresem funkcji kwadratowej

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

Jest ona symetryczna względem prostej o równaniu

$$x = p$$

gdzie

$$p = -\frac{b}{2a}$$

Przykład 2

Wyznamy oś symetrii paraboli o równaniu $y = x^2 - 4x + 5$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $a = 1$ i $b = -4$, zatem $p = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ i stąd równanie osi symetrii ma postać: $x = 2$.

Równie łatwo jest wyznaczyć osie symetrii paraboli danych równaniami w postaci kanonicznej lub iloczynowej.

Przykład 3

Wyznamy oś symetrii paraboli będącej obrazem wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{8}x^2$ w przesunięciu o wektor $[4, 1]$.

Rozwiązanie:

Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{8}x^2$ o wektor $[4, 1]$, otrzymujemy funkcję daną wzorem: $f(x) = -\frac{1}{8}(x - 4)^2 + 1$. Zatem równanie osi symetrii ma postać: $x = 4$.

Przykład 4

Wyznamy oś symetrii paraboli o równaniu $y = \frac{1}{6}(x - 2 + \sqrt{2})(x + 4 - 3\sqrt{2})$.

Rozwiązanie:

Jest to postać iloczynowa, zatem $p = \frac{2 - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4}{2} = \sqrt{2} - 1$, stąd równanie osi symetrii to: $x = \sqrt{2} - 1$.

Osie symetrii hiperboli

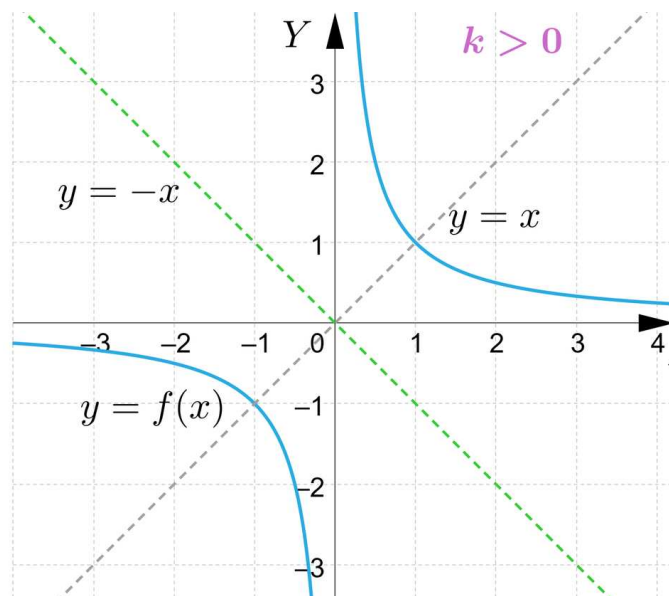
Rozważmy funkcję

$$x \cdot y = k$$

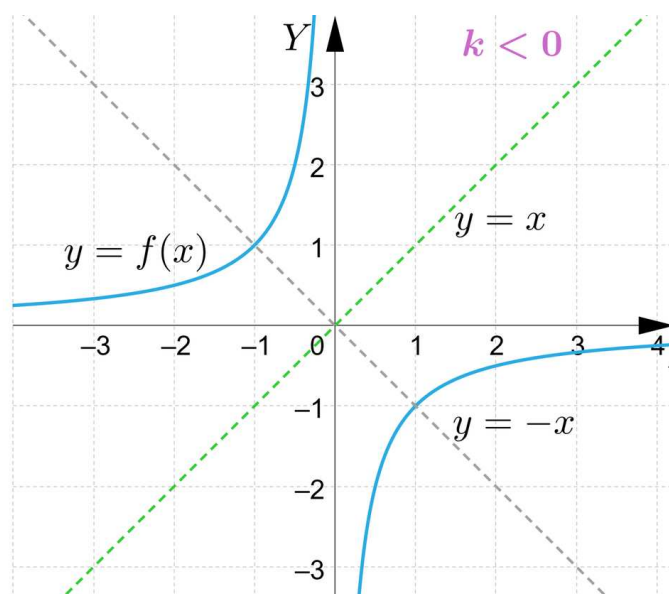
Jej wykresem jest **hiperbola**.

Wierzchołkami hiperbol są:

- dla $k > 0$: $A_1 = (-\sqrt{k}, -\sqrt{k})$ i $A_2 = (\sqrt{k}, \sqrt{k})$;
- dla $k < 0$: $A_1 = (-\sqrt{-k}, \sqrt{-k})$ i $A_2 = (\sqrt{-k}, -\sqrt{-k})$.



Jeśli $k > 0$, to gałęzie hiperboli znajdują się w I i III ćwiartce układu współrzędnych.



Jeśli $k < 0$, to gałęzie hiperboli znajdują się w II i IV ćwiartce układu współrzędnych.

Osie symetrii hiperboli są *dwusiecznymi ćwiartek układu współrzędnych*, czyli mają równania: $y = x$ oraz $y = -x$.

Przykład 5

Wyznamy osie symetrii wykresu funkcji: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Rozwiązanie:

Wzór funkcji przekształcamy do postaci kanonicznej następująco:

$$f(x) = \frac{(x+2)-3}{x+2}$$

$$f(x) = 1 + \frac{-3}{x+2}$$

Oznacza to, że wykresem danej funkcji jest hiperbola o równaniu $xy = -3$ przesunięta o wektor o współrzędnych $[-2, 1]$.

Wierzchołkami hiperboli o równaniu: $xy = -3$ są punkty:

$$A_1 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ i } A_2 = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}).$$

Hiperbola przesunięta ma więc wierzchołki:

$$B_1 = (-\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} + 1) \text{ i } B_2 = (\sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} + 1).$$

Na jednej z osi symetrii leżą punkty B_1 i B_2 , zaś druga oś symetrii jest prostą prostopadłą do prostej B_1B_2 , na której leży środek odcinka B_1B_2 .

Zacniemy od wyznaczenia prostej B_1B_2 :

$$a_{B_1B_2} = \frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+2} = -1.$$

Zauważmy, że prosta ta jest równoległa do prostej o równaniu $y = -x$. Podstawiając współrzędne punktu B_1 mamy:

$$y = -x + b,$$

$$\sqrt{3} + 1 = -(-\sqrt{3} - 2) + b,$$

$$\sqrt{3} + 1 = \sqrt{3} + 2 + b,$$

$$b = -1,$$

$$y = -x - 1.$$

Wyznamy drugą oś symetrii. Środkiem odcinka B_1B_2 jest punkt $(-2, 1)$, zaś współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej jest równy 1. Jest to prosta równoległa do prostej $y = x$. Zatem:

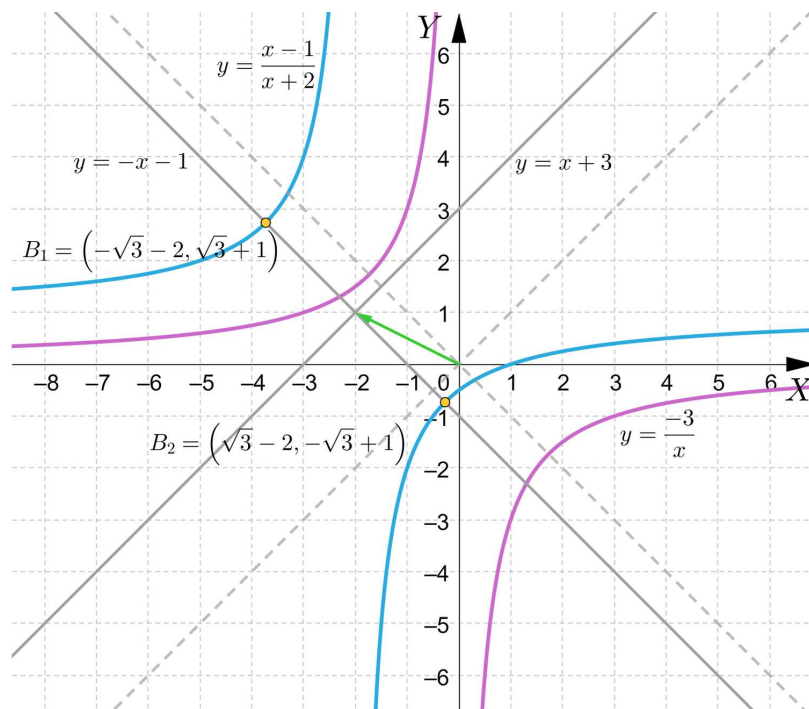
$$y = x + b,$$

$$1 = -2 + b,$$

$$b = 3,$$

$$y = x + 3.$$

Interpretacja graficzna została przedstawiona poniżej:



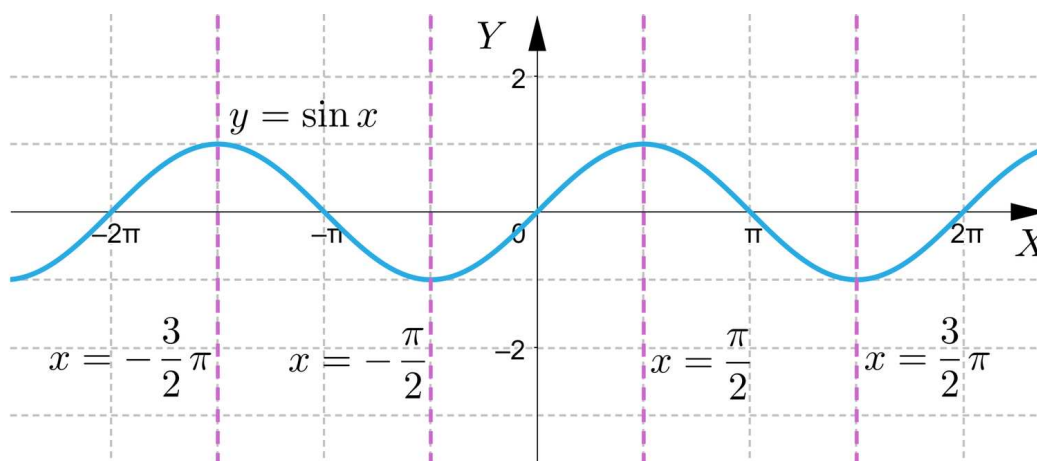
Osie symetrii wykresów funkcji trygonometrycznych

Przykład 6

Na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych wyznaczmy równania ich osi symetrii.

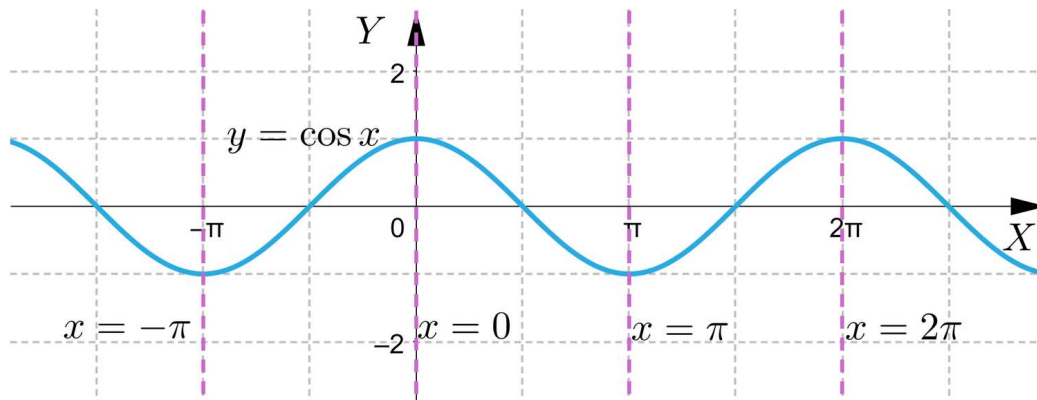
Rozwiązanie:

Narysujemy najpierw wykres funkcji $f(x) = \sin x$.



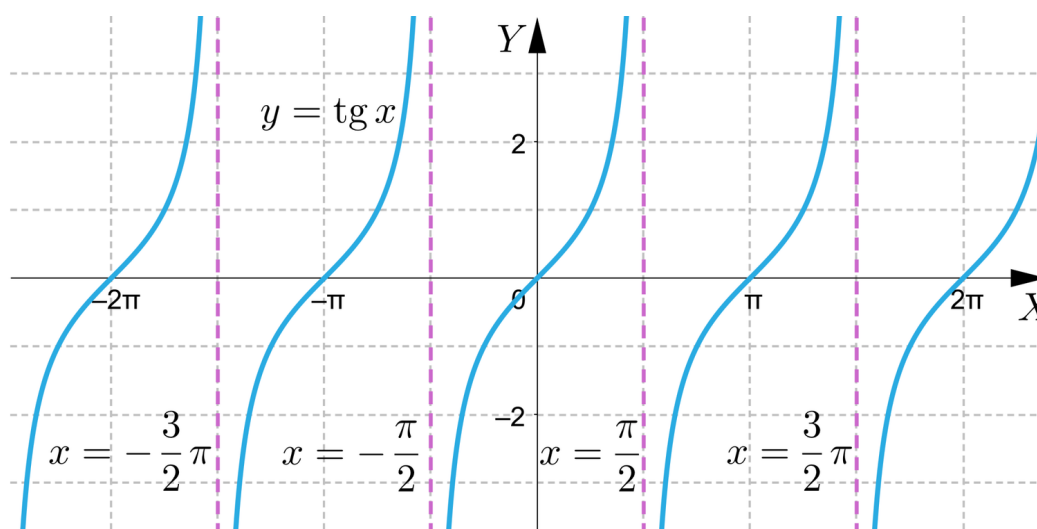
Zauważmy, że osie symetrii wykresu mają równania postaci: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Równania te dotyczą również każdej funkcji postaci $f(x) = a \cdot \sin x; a \neq 0$.

Wyznamy teraz wykresy funkcji cosinus:



Zauważmy, że osie symetrii wykresu mają równania postaci: $x = \pi + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
Równania te dotyczą również każdej funkcji postaci $f(x) = a \cdot \cos x$; $a \neq 0$.

Przyjrzyjmy się teraz funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$.



Jej wykres nie ma osi symetrii.

5. Osie symetrii innych funkcji

Przykład 7

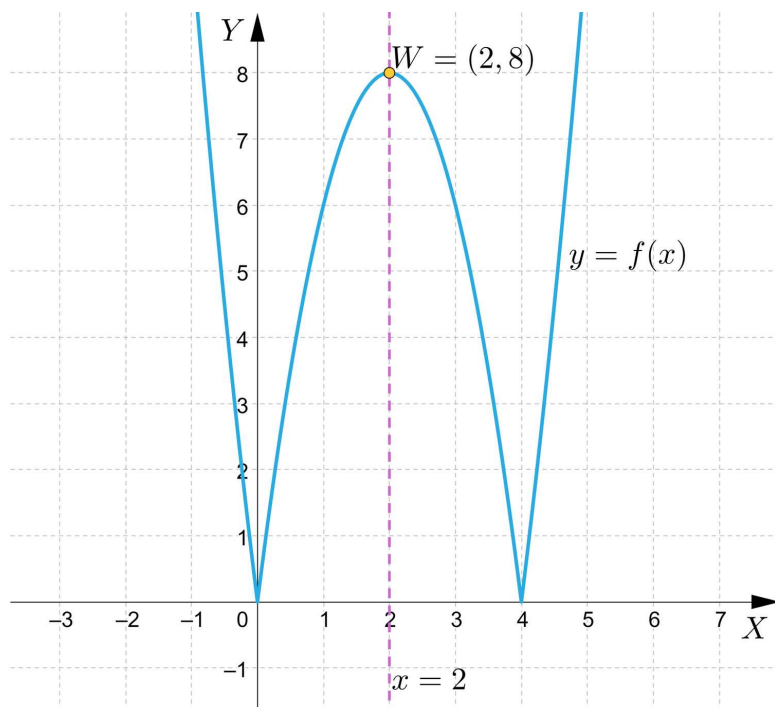
Niech $f(x) = 2x^2 - 8x$. Wyznamy równanie osi symetrii wykresu funkcji $y = |f(x)|$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup \langle 4, \infty \rangle \\ -2x^2 + 8x & \text{dla } x \in (0, 4) \end{cases}$

Wierzchołkiem paraboli o równaniu $y = -2x^2 + 8x$ jest punkt $W = (2, 8)$, zatem **oś symetrii** wykresu funkcji f ma równanie $x = 2$.

Narysujemy wykres tej funkcji:



Przykład 8

Wyznamy równanie osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = x^2 + 2|x| - 1$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że:

$$x^2 + 2|x| - 1 = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Parabole $y = x^2 + 2x - 1$ oraz $y = x^2 - 2x - 1$ są symetryczne względem prostej o równaniu $x = a$, gdzie a jest odcięłą punktu ich przecięcia. Wyznamy a :

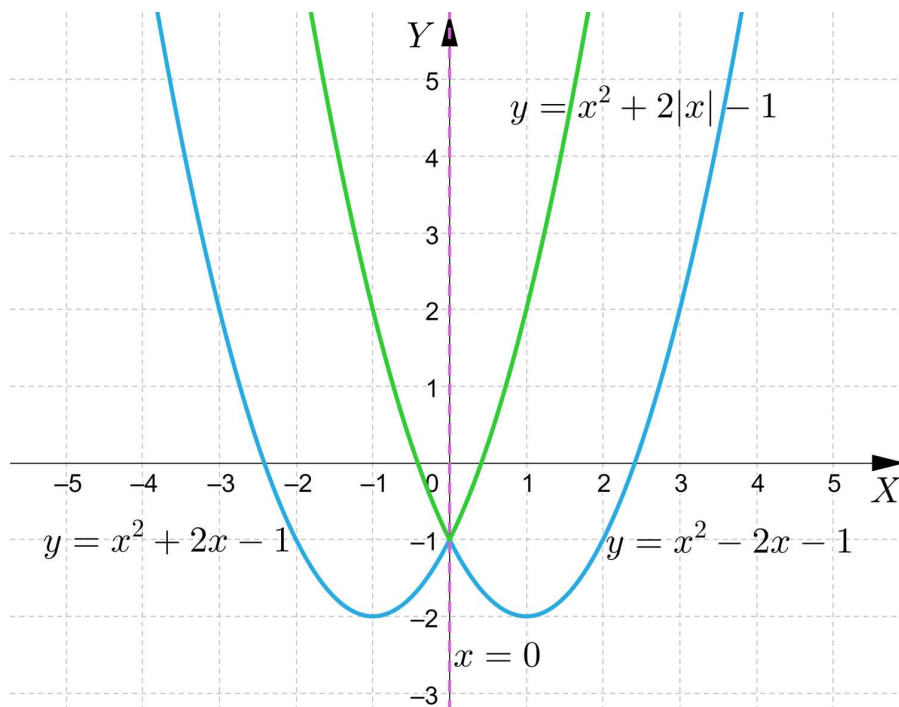
$$a^2 + 2a - 1 = a^2 - 2a - 1$$

$$4a = 0$$

$$a = 0$$

Równanie osi symetrii ma więc postać: $x = 0$.

Wykres funkcji f i jego oś symetrii przedstawia poniższy rysunek:



Słownik

oś symetrii

prosta, względem której ta figura jest do siebie osiowosymetryczna

postać kanoniczna funkcji homograficznej

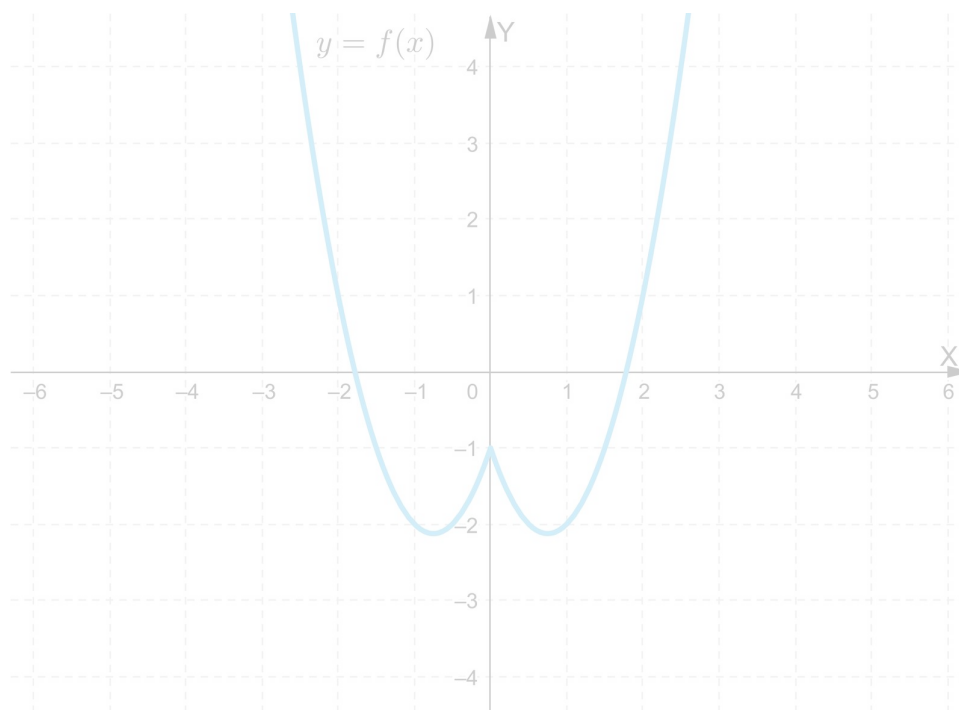
funkcja postaci:

$$f(x) = \frac{a}{x-p} + q; x \neq p$$

Aplet

Polecenie 1

W aplecie zmieniając współczynniki a , b , c w równaniu $y = ax^2 + b|x| + c$ obserwuj zmiany kształtu wykresu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DoN8yBjFj>

Polecenie 2

Na podstawie apletu odpowiedz na pytanie: Czy osią symetrii wykresu funkcji typu $y = ax^2 + b|x| + c$ jest zawsze prosta o równaniu $x = 0$?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Która z parabol, o wierzchołku leżącym w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, ma oś symetrii o równaniu $x = -2$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $y = -x^2 + 4x$

☐ $y = x^2 + 4x$

☐ $y = x^2 - 4x$

☐ $y = -x^2 - 4x$

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wykres funkcji kwadratowej o osi symetrii $x = -3$ i wartości największej $y = 1$ ma równanie:

☐ $y = (x + 3)^2 + 1$

☐ $y = -(x + 3)^2 + 1$

☐ $y = -(x - 3)^2 + 1$

☐ $y = -(x + 3)^2 - 1$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie równania osi symetrii wykresu funkcji: $f(x) = \frac{-1}{x+2} - 3$.

☐ $y = x$

☐ $y = -x - 5$

☐ $x = -2$

☐ $y = x + 1$

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdania. Wpisz do tabelki poprawne liczby.

Zdanie	x
Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = 2 - x + 3 $ ma równanie: $x =$	
Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = 2x^2 - 20x + 47 $ ma równanie: $x =$	
Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{dla } x < 3 \\ x^2 - 8x + 14 & \text{dla } x \geq 3 \end{cases}$ ma równanie: $x =$	

Ćwiczenie 5



Przyporządkuj funkcjom równania osi symetrii ich wykresu.

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} - 1$$

$$x = -2$$

$$f(x) = \frac{-1}{x-2} + 4$$

$$x = 2$$

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y = x + 2$$

$$f(x) = -2x^2 - 8x + 4$$

$$y = x - 2$$

Ćwiczenie 6



Przeciągnij poprawne odpowiedzi.

Dopasuj równania osi symetrii wykresu do wzoru funkcji:

a) Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ma równanie:

b) Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ma równanie:

c) Oś symetrii wykresu funkcji $f(x) = \left|\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ ma równanie:

$$x = -\frac{3}{4}\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ćwiczenie 7



Wyznacz równania osi symetrii przesuniętego o wektor $[1, 3]$ wykresu funkcji $xy = 1$.

Ćwiczenie 8



Narysuj wykres funkcji $y = |x^2 - 2|x||$ i wyznacz jej oś symetrii.

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie osi symetrii wykresu funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równanie osi symetrii funkcji $f(x) = a|x - p| + q$;
- wyznacza równanie osi symetrii paraboli;
- wyznacza równanie osi symetrii hiperboli;
- podaje równania osi symetrii funkcji trygonometrycznych;
- wyznacza równania osi symetrii funkcji złożonych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer; bądź jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji**Przed lekcją:**

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w przykładach 1, 2 i 4 sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje dyskusję dotyczącą wyznaczania równań osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = a|x - p| + q$ oraz paraboli. Uczniowie zastanawiają się nad sposobem wyznaczania równań osi symetrii wykresu funkcji liniowej.
2. Nauczyciel podaje temat zajęć, podaje cele i wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy.
2. Uczniowie w grupach analizują pozostały materiał z sekcji „Przeczytaj” oraz „Aplet”, pod kierunkiem ekspertów – wybranych wcześniej uczniów, którzy przygotowali się w domu do wystąpienia. Eksperci objaśniają oglądany materiał, zwracają uwagę na ważne elementy.
3. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia 1 – 5 z sekcji „Sprawdź się” a następnie omawiają zadania na forum klasy.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
3. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują pozostałe zadania z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Przykłady symetrii funkcji](#)
- [Symetria wykresu funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać materiał z sekcji „Aplet” do powtórzenia materiału przed sprawdzianem.