



Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów - zastosowanie do obliczeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów - zastosowanie do obliczeń

Źródło: Hert Niks, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Na poprzedniej lekcji zapoznałeś się z sześcioma wzorami pozwalającymi obliczać sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów. Wzory te są podstawą do wyznaczania bardzo wielu kolejnych wzorów ważnych w trygonometrii. Na tej lekcji pokażemy, jak poznane wzory stosować do wyliczania wartości funkcji trygonometrycznych oraz zbiorów wartości szczególnych typów funkcji trygonometrycznych.

Twoje cele

- Nauczysz się stosować wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów.
- Dowiesz się, jak wyznaczać zbiór wartości funkcji trygonometrycznej postaci:
$$f(x) = a \sin x + b \cos x.$$

Przeczytaj

Na początek przypomnimy wszystkie wzory, z których będziemy korzystać.

Twierdzenie: funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

1. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
2. $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
4. $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunki $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:

$$5. \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniających warunki $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, zachodzi wzór:

$$6. \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Teraz pokażemy kilka typowych zadań, w których możemy wykorzystać zaprezentowane powyżej wzory.

Przykład 1

Obliczymy $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, przy założeniu, że $\sin \alpha = -0,6$ i $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru na cosinus różnicy argumentów zapisujemy:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$$

Ponieważ $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, więc $\cos \alpha < 0$.

Wyliczamy $\cos \alpha$ korzystając z [jedynki trygonometrycznej](#):

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - (-0,6)^2} = -\sqrt{1 - 0,36} = -0,8.$$

$$\text{Obliczamy zatem wartość wyrażenie: } \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}.$$

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia: $\sin 127^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 194^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 383^\circ$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów redukcyjnych zapisujemy:

1. $\sin 127^\circ = \sin(37^\circ + 90^\circ) = \cos 37^\circ$,
2. $\cos 194^\circ = \cos(14^\circ + 180^\circ) = -\cos 14^\circ$,
3. $\cos 383^\circ = \cos(23^\circ + 360^\circ) = \cos 23^\circ$.

Zatem wyrażenie przyjmuje wartość:

$$\begin{aligned} \sin 127^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 194^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 383^\circ &= \\ &= \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ - \cos 14^\circ \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\cos 14^\circ = \cos(37^\circ - 23^\circ) = \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ + \sin 37^\circ \cdot \sin 23^\circ.$$

Wobec tego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} -\cos 14^\circ + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ &= \\ &= -\cos(37^\circ - 23^\circ) + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ &= -\cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \cdot \sin 23^\circ + 2 \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ = \\ &= \cos 37^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \cdot \sin 23^\circ. \end{aligned}$$

W tej sytuacji możemy wykorzystać wzór i zapisać powstałe wyrażenie jako cosinus sumy:

$$\cos(37^\circ + 23^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Przykład 3

Obliczymy $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ przy założeniu, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $\cos \beta = -\frac{7}{25}$ i $90^\circ < \beta < 180^\circ$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $90^\circ < \beta < 180^\circ$, zatem $\sin \beta > 0$.

Wobec tego możemy wyliczyć $\sin \beta$:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25},$$

a następnie:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{27}} = -\frac{24}{7}.$$

Pozostaje teraz zastosować wzór na tangens różnicy argumentów:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 + \frac{24}{7}}{1 + 2 \cdot (-\frac{24}{7})} = \frac{14 + 24}{7 - 48} = \frac{38}{41}.$$

Przykład 4

Uzasadnimy, że wartość wyrażenia: $\cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha)$ nie zależy od wartości kąta α .

Korzystając ze wzorów na cosinus różnicy argumentów oraz ze wzorów redukcyjnych policzmy:

$$\begin{aligned} \cos(150^\circ - \alpha) &= \cos 150^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 150^\circ \cdot \sin \alpha = \\ &= \cos(180^\circ - 30^\circ) \cdot \cos \alpha + \sin(180^\circ - 30^\circ) \cdot \sin \alpha = \\ &= -\cos 30^\circ \cdot \cos \alpha + \sin 30^\circ \cdot \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów na cosinus sumy argumentów oraz ze wzorów redukcyjnych policzmy:

$$\begin{aligned} \cos(210^\circ + \alpha) &= \cos(30^\circ + (180^\circ + \alpha)) = \\ &= \cos 30^\circ \cdot \cos(180^\circ + \alpha) - \sin 30^\circ \cdot \sin(180^\circ + \alpha) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\cos \alpha) - \frac{1}{2} \cdot (-\sin \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe obliczenia możemy już policzyć wartość wyrażenia z zadania:

$$\begin{aligned} \cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha) &= \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha = 0. \end{aligned}$$

Obliczenia pokazują, że wyrażenie $\cos(150^\circ - \alpha) - \cos(210^\circ + \alpha) = 0$, czyli nie zależy od wartości kąta α .

Słownik

jedynka trygonometryczna

podstawowa tożsamość trygonometryczna: dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

wzory redukcyjne

zależności pozwalające wyliczać wartości funkcji trygonometryczne argumentu różniącego się od danego argumentu o całkowitą wielokrotność $\frac{\pi}{2}$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie wykonaj polecenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BpMYtPx>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego przekształcania wyrażeń z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych sumy kątów.

Polecenie 2

Podaj zbiór wartości funkcji $y = 12 \sin x - 5 \cos x$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

Polecenie 3

Wyprowadź twierdzenie podające zbiór wartości funkcji $y = a \sin x + b \cos x$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi różnymi od 0.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}12^\circ - \operatorname{tg}327^\circ}{1 - \operatorname{tg}192^\circ \cdot \operatorname{tg}213^\circ}$ jest równe:

☐ $-\sqrt{3}$

☐ -1

☐ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

☐ $\sqrt{3}$

☐ 1

☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 2



Do zbioru wartości funkcji $y = 6 \sin x - 8 \cos x$ należą liczby:

☐ -2

☐ 13

☐ 2

☐ 9

☐ -12

☐ 14

☐ -14

☐ -7

Ćwiczenie 3



Połącz w pary: wyrażenie i jego wartość.

$\cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(60^\circ + \alpha) \cdot$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(45^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(45^\circ - \alpha) \cdot$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(75^\circ - \alpha) \cdot \cos \alpha + \cos(75^\circ - \alpha) \cdot$

$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\cos(30^\circ + \alpha) \cdot \cos \alpha + \sin(30^\circ + \alpha) \cdot$

$\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 4



Wybierz wszystkie zdania prawdziwe. Jeżeli $\sin(x + y) = \frac{1}{3}$ i $\sin(x - y) = -\frac{1}{6}$, to:

☐ $\sin y \cos x = \frac{1}{4}$

☐ $\sin x \cos y = \frac{1}{12}$

☐ $\sin x \cos y = \frac{1}{6}$

☐ $\sin x \cos y = -\frac{1}{12}$

☐ $\sin y \cos x = \frac{1}{2}$

☐ $\sin x \cos y = -\frac{1}{6}$

☐ $\sin y \cos x = -\frac{1}{4}$

☐ $\sin y \cos x = -\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ i $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, to wartość wyrażenia $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ jest równa:

☐ $\frac{17\sqrt{2}}{26}$

☐ $\frac{7\sqrt{2}}{26}$

☐ $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$

☐ $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary równe wyrażenia.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ćwiczenie 7



Oblicz $\alpha + \beta$, jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{7}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$.

Ćwiczenie 8



Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\cos^2 \alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)$ nie zależy od wartości α .

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów - zastosowanie do obliczeń

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ; Zakres rozszerzony 5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy argumentów,
- analizuje funkcję trygonometryczną postaci: $f(x) = a \sin x + b \cos x$ oraz wyznacza jej zbiór wartości.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Film samouczek” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Film samouczek”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat oraz cel zajęć
2. Uczniowie wspólnie z nauczycielem ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z przykładami w sekcji „Przeczytaj”. Notują pytania, następnie na forum klasy wspierani przez nauczyciela wspólnie udzielają na nie odpowiedzi.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w parach ćwiczenia 3-4. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 5-7 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych**Wskazówki metodyczne:**

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Film samouczek” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Wartości funkcji trygonometrycznych sumy i różnicy kątów – zastosowanie do obliczeń”.