



Równania wielomianowe

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Równania wielomianowe

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Aby opisać zjawiska generujące dzisiejszy świat, wygodnie jest dysponować narzędziami, które ułatwiają te opisy. Do nich niewątpliwie należą równania. Dzięki równaniom wyższych stopni, możemy obliczyć na przykład wymiary prostopadłościennego akwarium o objętości 10 litrów i danych zależnościach między krawędziami podstawy i wysokością.

Dzięki równaniom wielomianowym, możemy również rozwiązywać problemy z teorii matematyki. Czy potrafisz podać trzy kolejne liczby naturalne, których iloczyn jest równy 6? Czy istnieje liczba, której sześćian jest równy (-512) ?

Odpowiedzi na te i inne bardziej złożone pytania znajdziesz w materiałach dotyczących pojęcia równania wielomianowego i metod jego rozwiązania.

Twoje cele

- Określisz rodzaj równania ze względu na liczbę niewiadomych i stopień niewiadomej.
- Rozpoznasz równania wyższych stopni z jedną niewiadomą.
- Rozwiążesz proste równanie wielomianowe.
- Opisziesz za pomocą równania sytuację przedstawioną słownie.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$, nazywamy równanie, które można zapisać w postaci

$$W(x) = 0,$$

gdzie:

$W(x)$ – jest wielomianem stopnia n .

Definicja: Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy taką liczbę rzeczywistą a , dla której zachodzi warunek $W(a) = 0$.

Rozwiązaniem równania $W(x) = 0$ są wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania wielomianowego

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu $W(x)$ jednej zmiennej jest nie większa, niż stopień wielomianu $W(x)$.

Zapisanie równania w postaci iloczynowej równania polega na zapisaniu równania za pomocą iloczynu czynników, w których niewiadoma jest jak najmniejszego stopnia.

Równanie wielomianowe możemy sprowadzić do postaci iloczynowej np. metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias, metodą grupowania wyrazów lub przez wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 1

Rozwiążemy równanie wielomianowe $-2 \cdot (x - 3)(2x + 1)(3 - 2x) = 0$.

Jest to równanie postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x) = -2 \cdot (x - 3)(2x + 1)(3 - 2x)$ jest wielomianem zapisanym w postaci iloczynowej.

Aby $W(x) = 0$, zapisujemy równanie w postaci równoważnej alternatywy.

$$-2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0 \text{ lub } 2x + 1 = 0 \text{ lub } 3 - 2x = 0$$

$$\text{Sprzeczność lub } x = 3 \text{ lub } x = -\frac{1}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}$$

Równanie ma trzy rozwiązania $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, 3 .

Przykład 2

Rozwiążemy równanie wielomianowe metodą wyłączenia wspólnego czynnika przed nawias.

$$(x - 1)(x + 2) = 3 \cdot (x + 2)$$

$$(x - 1)(x + 2) - 3 \cdot (x + 2) = 0$$

Wyłączymy sumę algebraiczną $(x + 2)$ przed nawias.

$$(x + 2)(x - 1 - 3) = 0$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0$$

$$x + 2 = 0 \text{ lub } x - 4 = 0$$

$$x = -2 \text{ lub } x = 4$$

Równanie ma dwa rozwiązania $-2, 4$.

Przykład 3

Rozwiążemy **równanie wielomianowe** $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ metodą grupowania wyrazów.

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Grupujemy pierwsze dwa wyrażenia i wyłączymy przed nawias x^2 .

$$x^2(x + 1) + (x + 1) = 0$$

Wyłączymy sumę algebraiczną $(x + 1)$ przed nawias.

$$(x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

Otrzymaliśmy równanie zapisane w postaci iloczynowej.

$$x + 1 = 0 \text{ lub } x^2 + 1 = 0$$

$$x = -1 \text{ lub } x^2 = -1 - \text{sprzeczność}$$

Równanie ma jedno rozwiązanie $x = -1$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$.

Skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Czyli:

$$(2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(2x^2 - 1)^2 = 0$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

Teraz skorzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) = 0$$

$$(\sqrt{2}x - 1) = 0 \text{ lub } (\sqrt{2}x + 1) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ lub } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Równanie ma dwa rozwiązania $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 5

Iloczyn kwadratu pewnej liczby oraz kwadratu liczby o 2 od niej mniejszej jest równy 64. Obliczymy szukane liczby.

Niech:

x - szukana liczba,

$x - 2$ - szukana liczba zmniejszona o 2,

$x^2(x - 2)^2$ - iloczyn kwadratów liczb.

Równanie opisujące sytuację przedstawioną w zadaniu to:

$$x^2(x - 2)^2 = 64$$

$$[x(x - 2)]^2 - 8^2 = 0$$

$$[x(x - 2) - 8][x(x - 2) + 8] = 0$$

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + 8) = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 8 = 0$$

Zajmiemy się rozwiązaniem równania $x^2 - 2x - 8 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6$$

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$$

Obliczymy wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x + 8 = 0$.

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0 - \text{brak rozwiązań}$$

Zatem szukane liczby to -2 , -4 lub 4 , 2 .

Słownik

równanie wielomianowe

równanie, które można zapisać w postaci

$$W(x) = 0,$$

gdzie:

$W(x)$ jest wielomianem stopnia n , dla $n \in \mathbb{N}$

Infografika

Polecenie 1

Najpierw spróbuj samodzielnie rozwiązać zadanie, a następnie przeanalizuj sposób obliczenia szukanych liczb zapisany w infografice i porównaj ze swoim rozwiązaniem.

Polecenie 2

Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy 48. Jakie to liczby?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równania wielomianowe

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa rodzaj równania ze względu na liczbę niewiadomych i stopień niewiadomej
- rozpoznaje równania wyższych stopni z jedną niewiadomą
- rozwiązuje proste równanie wielomianowe
- opisuje za pomocą równania sytuację przedstawioną słownie
- tworzy procedury budowy równania zapisanego w postaci iloczynowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani wcześniej przez nauczyciela uczniowie podają przykłady prostych zależności dających się zapisać w postaci równania wielomianowego.

Faza realizacyjna:

1. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych równań. Następnie stara się podzielić równania na grupy, według własnych kryteriów.
2. Uczniowie podzieleni na grupy 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje równań ze względu na liczbę niewiadomych i stopień równania, podział na równania liniowe, kwadratowe i wielomianowe stopnia wyższego niż 2.
3. Uczniowie zapoznają się z materiałami z sekcji Przeczytaj, oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem.
4. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju równania ze względu na liczbę niewiadomych, stopień równania, podział na równania liniowe, kwadratowe i wielomianowe stopnia wyższego niż 2.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7, 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pierwiastki równań](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana do pracy w parach na zajęciach podsumowujących tematykę związaną z rozwiązywaniem równań.