



Liczba rozwiązań równania kwadratowego zupełnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba rozwiązań równania kwadratowego zupełnego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Znasz już równania kwadratowe niezupełne i potrafisz określać ich zbiór rozwiązań.

Czy domyślasz się, jaka jest definicja równania kwadratowego zupełnego?

Czy wiesz, ile rozwiązań może mieć równanie kwadratowe zupełne?

Czy może ich być nieskończenie wiele?

W tym materiale dowiesz się od czego zależy liczba rozwiązań równania kwadratowego zupełnego. Poznasz również wzór na wyróżnik trójkianu kwadratowego.



Twoje cele

- Obliczysz wyróżnik trójmianu kwadratowego.
- Określisz liczbę rozwiązań równania kwadratowego zupełnego w zależności od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego.
- Rozpoznaś równanie posiadające dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie oraz równanie sprzeczne.
- Rozwiążesz równania kwadratowe.

Przeczytaj

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ nazywamy **równaniem kwadratowym**.

Rozwiązanie równania z niewiadomą x polega na wyznaczeniu wszystkich wartości x , które spełniają to równanie. Zbiór wszystkich takich liczb x nazywamy zbiorem rozwiązań równania. Rozwiązania równania nazywa się również pierwiastkami równania.

Przekształcimy trójmian kwadratowy w następujący sposób.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c = a\left(x^2 + \frac{2bx}{2a}\right) + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywa się **wyróżnikiem równania kwadratowego**.

Zatem **równanie kwadratowe** $ax^2 + bx + c = 0$ możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= 0 \\ a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \quad | : a, a \neq 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Jeżeli $\Delta < 0$ to równanie jest sprzeczne.

Jeżeli $\Delta = 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= 0 \\ x_0 &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

Jeżeli $\Delta > 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} &= \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ lub } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ lub } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek, nazwany podwójnym pierwiastkiem $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 1

Sprawdźmy, ile rozwiązań ma równanie $x^2 - 3x + 8 = 0$

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 1, b = -3, c = 8$.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 9 - 32 = -23$$

Ponieważ $\Delta < 0$ zatem równanie nie posiada rozwiązania.

Przykład 2

Obliczymy, jeżeli istnieją, **pierwiastki równania** $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 9, b = -12, c = 4$.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Ponieważ $\Delta = 0$ zatem równanie posiada jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{-(-12)}{2 \cdot 9}$$

$$x_0 = \frac{12}{18}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

Równanie posiada jeden pierwiastek podwójny $x_0 = \frac{2}{3}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = 1, b = -5, c = 6$.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

Ponieważ $\Delta > 0$ zatem $\sqrt{\Delta} = 1$.

Równanie posiada dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{4}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = \frac{6}{2}$$

$$x_2 = 3$$

Zbiór rozwiązań równania: $\{2, 3\}$.

Przykład 4

Sprawdzimy, dla jakich wartości parametru k równanie kwadratowe $(k+2)x^2 - 3x + 1 = 0$ jest sprzeczne.

Współczynniki trójmianu kwadratowego to $a = k+2$, $b = -3$, $c = 1$.

Obliczymy Δ .

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (k+2) \cdot 1 = 9 - 4k - 8 = 1 - 4k$$

Aby równanie było sprzeczne wyróżnik trójmianu musi przyjmować wartości ujemne.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4k < 0$$

$$-4k < -1$$

$$k > \frac{1}{4}$$

Równanie jest sprzeczne dla $k \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $|x^2 + 2x - 2| = 1$.

$$x^2 + 2x - 2 = 1 \text{ lub } x^2 + 2x - 2 = -1$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ lub } x^2 + 2x - 1 = 0$$

Obliczymy wyróżnik pierwszego równania.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2 \cdot 1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2 \cdot 1} = 1$$

Obliczymy wyróżnik drugiego równania.

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = -1 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2 \cdot 1}$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{2}$$

Słownik

równanie kwadratowe

równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ dla $a \neq 0$

wyróżnik trójmianu kwadratowego

wyraża się wzorem $\Delta = b^2 - 4ac$

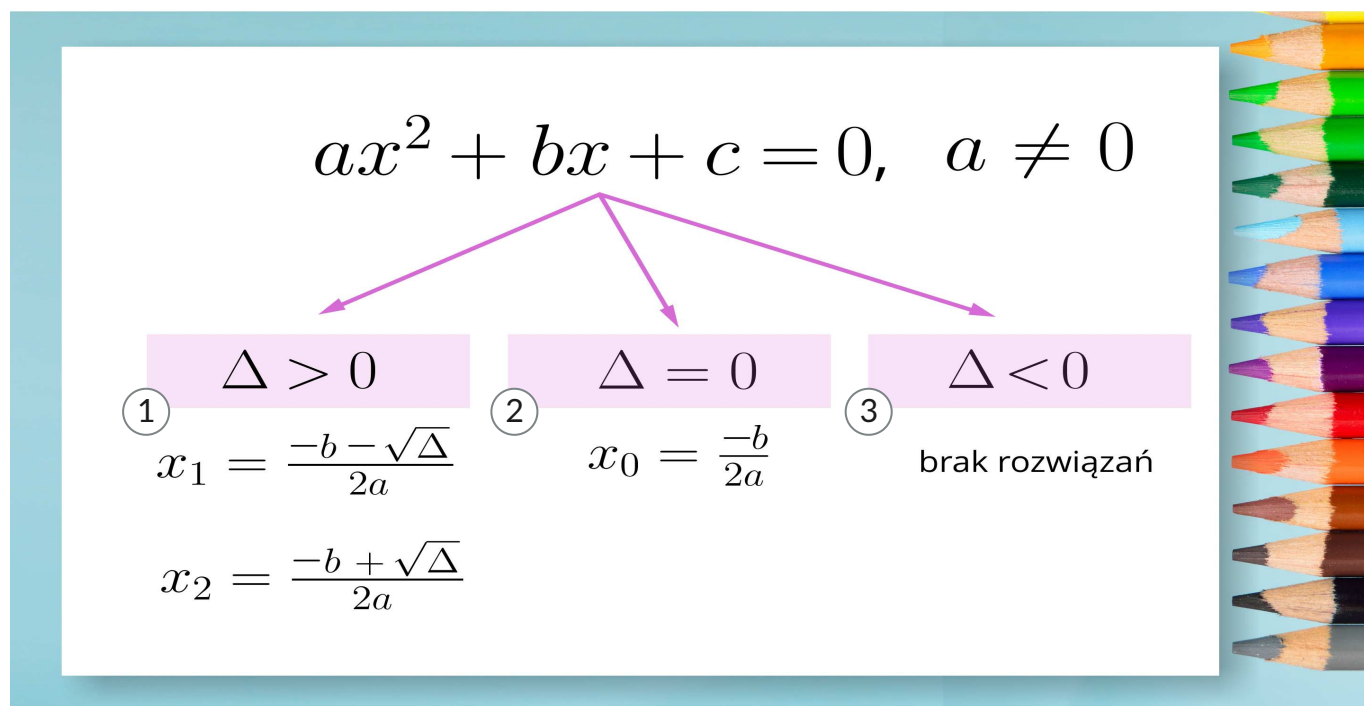
pierwiastki równania

liczby spełniające równanie

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką przedstawiającą klasyfikację równań kwadratowych ze względu na liczbę rozwiązań.



1. {audio}Jeżeli $\Delta > 0$ równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki.
2. {audio}Jeżeli $\Delta = 0$ równanie kwadratowe ma jeden podwójny pierwiastek.
3. {audio}Jeżeli $\Delta < 0$ równanie kwadratowe nie posiada pierwiastków rzeczywistych.

Polecenie 2

Narysuj mapę myśli prezentującą rodzaje równań kwadratowych ze względu na liczbę rozwiązań. Do każdego z rodzajów napisz po minimum trzy przykłady równań.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz trójmian kwadratowy z odpowiednim wyróżnikiem.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 32$$

$$-x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$\Delta = 6$$

$$6x^2 - \sqrt{3}x - 4 = 0$$

$$\Delta = 41$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = 4$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$\Delta = 99$$

Ćwiczenie 2



Przeciągnij w wyznaczone miejsce taką liczbę, aby równanie

$$3x^2 - 6\sqrt{6}x + \boxed{} = 0 \text{ miało jedno rozwiązanie.}$$

-12

18

-18

12

Ćwiczenie 3



Przeciągnij w wyznaczone miejsce takie wyrażenie arytmetyczne, aby równanie

$$-(1 + \sqrt{2})x^2 - \sqrt{3}x + \boxed{} = 0 \text{ było sprzeczne.}$$

$1 + \sqrt{2}$

5

$1 - \sqrt{2}$

$3\sqrt{2}$

Ćwiczenie 4



Przeciągnij równanie do odpowiedniego okienka.

Brak rozwiązań

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$$

$$3x^2 + 2x + \sqrt{5} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$$

Jedno rozwiązanie

$$x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$x^2 = -2x + 6$$

$$2x^2 + \frac{1}{7}x + 3 = 0$$

Dwa rozwiązania

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\sqrt{3}x^2 - 10x + 1 = 0$$

$$2x^2 - x = -3$$

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie $6x^2 + 3 = 2x^2 + 4\sqrt{3}x$ ma jeden podwójny pierwiastek

☐ Równanie $x^2 + 2x = -1$ ma dwa różne rozwiązania.

☐ Równanie $x^2 + x - \frac{1}{3} = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

☐ Równanie $-x^2 - 3x - 2\sqrt{5} = 0$ jest równaniem sprzecznym.

☐ Równanie $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$ ma jeden pierwiastek.

☐ Równanie $-x^2 + 3 = 0$ jest równaniem sprzecznym.

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $x^2 - 3x + 2k = 0$ ma dwa różne rozwiązania dla:

☐ $k > \frac{8}{9}$

☐ $k \leq 1\frac{1}{8}$

☐ $k > 1\frac{1}{8}$

☐ $k < 1\frac{1}{8}$

Ćwiczenie 7



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $(k - 2)x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ jest sprzeczne dla:

☐ $k < 3\frac{1}{4}$

☐ $k \leq -3\frac{1}{4}$

☐ $k > -\frac{13}{4}$

☐ $k > 3\frac{1}{4}$

Ćwiczenie 8



Rozwiąż równanie. Wpisz w wyznaczone miejsce brakujący pierwiastek równania.

$x^2 + 2x - 3 = 0$, $x = -3$ lub $x =$

$2x^2 + 6x + 4 = 0$, $x = -2$ lub $x =$

$x^2 - 6x + 8 = 0$, $x = 2$ lub $x =$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba rozwiązań równania kwadratowego zupełnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wyróżnik trójmianu kwadratowego
- określa liczbę rozwiązań równania kwadratowego zupełnego w zależności od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego
- rozpoznaje równania posiadające dwa rozwiązania, jedno rozwiązanie oraz równanie sprzeczne
- rozwiązuje równania kwadratowe
- dobiera odpowiedni sposób rozwiązywania nietypowego problemu matematycznego

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają podstawowe pojęcia związane z równaniami kwadratowymi (aby w dalszej części lekcji określić rodzaje równań ze względu na liczbę rozwiązań).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą odwróconej klasy. Najpierw wymieniają się wiadomościami dotyczącymi rodzajów równań, które przypomnieli w domu.
2. Każdy uczeń otrzymuje od nauczyciela 10 przykładów różnych równań. Następnie stara się podzielić je na grupy, według własnych kryteriów.
3. Uczniowie podzieleni na grupy 4 – 6 osobowe omawiają rezultaty swojej pracy i porównują dokonane podziały. Tworzą wspólny schemat ilustrujący rodzaje równań ze względu na liczbę rozwiązań.
4. Uczniowie oglądają infografikę i omawiają ją wraz z nauczycielem oraz porównują ze schematem, który sami stworzyli.
5. Uczniowie w parach lub indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania rodzaju równania kwadratowego.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest zapisanie 5 równań kwadratowych i rozwiązanie ich.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana przy okazji powtórzenia wiadomości o równaniach kwadratowych.