



Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiedząc, że w pewnej klasie jest 17 chłopców i 14 dziewczynek możemy od razu stwierdzić, że ta klasa liczy 31 uczniów. Dla uzyskania tej informacji wystarczyło dodać liczby osób każdego z dwóch rozłącznych zbiorów: dziewczynek oraz chłopców z tej klasy.

Ten wstępny przykład pokazuje zastosowanie prezentowanej w tym temacie kolejnej podstawowej zasady kombinatorycznej, nazywanej regułą dodawania.

Stosowanie tej reguły w praktyce zaczniemy od przykładów, w których pokażemy, że liczba elementów sumy dwóch zbiorów tylko w szczególnych przypadkach jest równa sumie elementów tych zbiorów.

W trudniejszych przykładach pokażemy, że zastosowanie reguły dodawania wymaga rozpatrzenia kilku rozłącznych przypadków, obliczenia liczby możliwości w każdym z nich, a następnie dodania liczb otrzymanych w tych poszczególnych przypadkach dla uzyskania ostatecznego wyniku.

Twoje cele

- Zapoznasz się z regułą dodawania.
- Będziesz doskonalić umiejętności posługiwania się tym pojęciem w zadaniach kombinatorycznych.

- Nauczysz się, jak wykorzystać regułę dodawania do rozwiązywania zadań dotyczących liczby elementów sumy zbiorów.
- Umiejętność dzielenia zbioru na rozłączne podzbiory pozwoli Ci stosować regułę dodawania w zadaniach kombinatorycznych.

Przeczytaj

Reguła: Reguła dodawania - suma dwóch zbiorów rozłącznych

Założmy, że w wyniku podziału (rozbicia) pewnego zbioru otrzymaliśmy dwa podzbiory, A i B . Wtedy ten zbiór oznaczamy jako $A \cup B$ i mówimy, że jest on sumą dwóch zbiorów rozłącznych A i B .

Wtedy liczba elementów zbioru $A \cup B$ jest sumą liczb $|A|$ i $|B|$, które opisują liczby elementów jego rozłącznych podzbiorów A i B , otrzymanych w wyniku tego podziału:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Przykład 1

Wykażemy, że w każdym ze zbiorów:

A_1 – trzycyfrowych liczb parzystych

oraz

A_2 – trzycyfrowych liczb nieparzystych

jest 450 elementów.

Ponieważ zbiory A_1 oraz A_2 są rozłączne, a ich suma $A_1 \cup A_2$ jest zbiorem wszystkich liczb trzycyfrowych:

$$A_1 \cup A_2 = \{100, 101, 102, \dots, 998, 999\},$$

więc

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = 999 - (100 - 1) = 900.$$

Ponadto (co wiemy z [reguły równoliczności](#)) $|A_1| = |A_2|$, a to oznacza, że $|A_1| = |A_2| = \frac{1}{2} \cdot 900$.

Uwaga. Powyżej stwierdziliśmy, że zbiory A_1 i A_2 są rozłączne. Używając symbolu iloczynu (części wspólnej) zbiorów oraz symbolu zbioru pustego zapisujemy ten fakt następująco: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Reguła: Reguła dodawania

Jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

Przykład 2

Obliczymy, ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 lub są podzielne przez 5.

Oznaczmy:

A – zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3,

B – zbiór liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5.

Mamy obliczyć, ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 lub przez 5, czyli liczbę $|A \cup B|$ elementów zbioru $A \cup B$.

Korzystając z **reguły równoliczności** zauważamy, że:

- wszystkich liczb trzycyfrowych jest 900,
- wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 jest $|A| = \frac{1}{3} \cdot 900 = 300$,
- wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 jest $|B| = \frac{1}{5} \cdot 900 = 180$,

Zbiory A i B nie są jednak rozłączne – wśród liczb trzycyfrowych są takie, które dzielą się zarówno przez 3, jak i przez 5. Ponieważ liczba całkowita dzieli się przez 3 i przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez 15, więc należy jeszcze obliczyć, ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 15, czyli elementów zbioru $A \cap B$. Korzystając z **reguły równoliczności** stwierdzamy, że $|A \cap B| = \frac{1}{15} \cdot 900 = 60$.

Zbiór $A \cup B$ da się więc podzielić na trzy rozłączne podzbiory:

- zbiór $A \cap B$ liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 i podzielnych przez 5,
- zbiór $A \setminus B$ tych liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 3 i nie dzielą się przez 5,
- zbiór $B \setminus A$ tych liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 5 i nie dzielą się przez 3.

Zbiór A liczb trzycyfrowych podzielnych przez 3 możemy rozbić na dwa podzbiory: podzbiór $A \cap B$ liczb podzielnych przez 5 i podzbiór $A \setminus B$ liczb niepodzielnych przez 5.

Wobec tego z **reguły dodawania** otrzymujemy równość $|A| = |A \cap B| + |A \setminus B|$, skąd $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 300 - 60 = 240$

Zbiór B liczb trzycyfrowych podzielnych przez 5 możemy rozbić na dwa podzbiory: podzbiór $B \cap A$ liczb podzielnych przez 3 i podzbiór $B \setminus A$ liczb niepodzielnych przez 3.

Na podstawie **reguły dodawania** wynika stąd, że $|B| = |B \cap A| + |B \setminus A|$, a więc $|B \setminus A| = |B| - |B \cap A| = 180 - 60 = 120$.

Korzystając z **reguły dodawania** stwierdzamy, że wszystkich liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 3 lub przez 5 jest

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = 240 + 60 + 120 = 420.$$

Ważne!

Ponieważ dla dowolnych dwóch zbiorów A oraz B prawdziwe są równości:

$$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|,$$

$$|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$$

oraz

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$$

więc

$$|A \cup B| = (|A| - |A \cap B|) + |A \cap B| + (|B| - |A \cap B|) = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Twierdzenie: o liczbie elementów sumy dwóch zbiorów

Dla dowolnych dwóch zbiorów A oraz B prawdziwa jest równość

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Przykład 3

W konkursie matematycznym uczestniczyło 247 uczniów. Każdy z uczestników miał do rozwiązania pięć tych samych zadań.

Po zakończeniu zawodów okazało się, że:

- 31 uczestników nie rozwiązało żadnego z dwóch pierwszych zadań,
- 198 uczestników rozwiązało zadanie pierwsze,
- 63 uczestników rozwiązało zadanie drugie.

Ustalimy, ilu uczestników tego konkursu rozwiązało oba zadania: pierwsze i drugie.

Z treści zadania wynika, że liczba uczestników konkursu, którzy rozwiązyli zadanie pierwsze lub zadanie drugie jest równa $247 - 31 = 216$.

Przyjmijmy teraz następujące oznaczenia:

A – zbiór uczestników konkursu, którzy rozwiązyli zadanie pierwsze,

B – zbiór uczestników konkursu, którzy rozwiązyli zadania drugie.

Wiemy, że $|A \cup B| = 216$, $|A| = 198$ oraz $|B| = 63$.

Oznaczmy przez x liczbę uczestników konkursu, którzy rozwiązali oba zadania.

Na podstawie reguły dodawania prawdziwe są następujące zależności

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 198 - x, |B \setminus A| = |B| - |A \cap B| = 63 - x.$$

Zatem jeszcze raz korzystając z reguły dodawania otrzymujemy równość

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| = 216,$$

skąd

$$216 = 198 - x + x + 63 - x,$$

a więc

$$x = 198 + 63 - 216 = 45.$$

Oznacza to, że 45 uczestników tego konkursu rozwiązało oba zadania: pierwsze i drugie.

Uwaga.

Wiedząc, że $|A \cup B| = 216$, $|A| = 198$ oraz $|B| = 63$ można było od razu skorzystać z powyższego twierdzenia i zapisać, że z równości

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

dostajemy

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 198 + 63 - 216 = 45.$$

Słownik

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

reguła równoliczności

dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

twierdzenie o liczbie elementów sumy dwóch zbiorów

dla dowolnych dwóch zbiorów A oraz B prawdziwa jest równość

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją. Przeanalizuj omówione w niej rozwiązanie zadania, w którym zastosowano regułę dodawania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D6mLx9NqG>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego liczby elementów zbioru skończonego oraz reguły dodawania.

Polecenie 2

Korzystając z omówionego przykładu, rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

W pewnym liceum dla uczniów klas trzecich prowadzone są zajęcia trzech kół zainteresowań:

- koła matematycznego,
- koła biologicznego,
- koła historycznego.

Na liście uczniów, którzy biorą udział w zajęciach choć jednego z tych trzech kół jest ogółem 75 osób, przy czym:

- w zajęciach koła matematycznego bierze udział 55 osób,
- w zajęciach koła biologicznego bierze udział 50 osób,
- w zajęciach koła historycznego bierze udział 39 osób.

Wykaż, że w tym liceum łączna liczba uczniów klas trzecich, którzy biorą udział w zajęciach tylko jednego koła zainteresowań, jest o 6 większa od liczby uczniów, którzy biorą udział w zajęciach wszystkich trzech kół zainteresowań.

Ważne!

Ponieważ na podstawie reguły dodawania dla dowolnych trzech zbiorów A , B oraz C prawdziwe są równości:

$$|A| = |A \setminus (B \cup C)| + |(A \cap B) \setminus C| + |(A \cap C) \setminus B| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|B| = |B \setminus (A \cup C)| + |(A \cap B) \setminus C| + |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|C| = |C \setminus (A \cup B)| + |(A \cap C) \setminus B| + |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \cap B| = |(A \cap B) \setminus C| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|B \cap C| = |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \cap C| = |(A \cap C) \setminus B| + |A \cap B \cap C|$$

oraz

$$|A \cup B \cup C| = |A \setminus (B \cup C)| + |B \setminus (B \cup C)| + |C \setminus (A \cup C)| + \\ + |(A \cap C) \setminus B| + |(A \cap B) \setminus C| + |(B \cap C) \setminus A| + |A \cap B \cap C|$$

więc

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Twierdzenie: o liczbie elementów sumy trzech zbiorów

Dla dowolnych trzech zbiorów A , B oraz C prawdziwa jest równość

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 4 lub są podzielne przez 9 i wpisz wynik w puste pole.

Odpowiedź: Takich liczb jest .

Ćwiczenie 2



Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych, które są podzielne przez 10 lub są podzielne przez 25 i wynik wpisz w puste pole.

Odpowiedź: Takich liczb jest .

Ćwiczenie 3



Oznaczamy:

A - zbiór trzycyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 9,

B - zbiór trzycyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 10.

Podane niżej liczby uporządkuj od najmniejszej do największej.



Ćwiczenie 4



Każdy z 88 uczestników warsztatów matematycznych miał określić, co chciałby robić we wtorek po kolacji. Do wyboru były zajęcia na sali gimnastycznej lub gry na świetlicy. 35 osób zgłosiło chęć udziału w zajęciach na sali gimnastycznej, 62 – w grach na świetlicy, przy czym 11 osób zgłosiło się i do zajęć na sali gimnastycznej, i do gier na świetlicy. Ilu uczestników tych warsztatów postanowiło po kolacji zostać w pokoju? Zaznacz właściwą odpowiedź.

☐ 4

☐ 1

☐ 2

☐ 3

Ćwiczenie 5



W klasie III b jest 31 uczniów, z czego 19 to chłopcy. Wiadomo, że 15 uczniów tej klasy chodzi na zajęcia kółka matematycznego. Ilu chłopców bierze udział w zajęciach tego kółka? Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐ Co najmniej trzech chłopców.

☐ Co najmniej czterech chłopców.

☐ Co najmniej dwóch chłopców.

☐ Co najmniej jeden chłopiec.

Ćwiczenie 6



Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ wszystkich liczb naturalnych od 1 do 1000 usunięto najpierw wszystkie liczby podzielne przez 4, a następnie spośród reszty usunięto wszystkie liczby podzielne przez 5. Ile liczb pozostało? Zaznacz właściwą odpowiedź.

☐ 550

☐ 600

☐ 450

☐ 400

Ćwiczenie 7



Ile jest liczb czterocyfrowych, które są niepodzielne przez 25 lub są niepodzielne przez 24? Zaznacz właściwą odpowiedź.

☐ 8265

☐ 8295

☐ 8985

☐ 8280

Ćwiczenie 8



Ile jest liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 3, przez 4 lub przez 5? Zaznacz właściwą odpowiedź.

☐ Więcej niż 500 i mniej niż 600.

☐ Więcej niż 550.

☐ Więcej niż 450 i mniej niż 550.

☐ Mniej niż 500.

Ćwiczenie 9



Wśród 100 uczestników pewnego międzynarodowego konkursu matematycznego 80 zna język angielski, 50 zna język francuski, 40 zna język niemiecki, a 21 zna język rosyjski. Co z tego wynika? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ Pewien uczestnik tego konkursu, który zna język niemiecki, zna również język francuski.

☐ Pewien uczestnik tego konkursu, który zna język angielski, zna również język francuski.

☐ Pewien uczestnik tego konkursu, który zna język francuski, zna również język rosyjski.

☐ Pewien uczestnik tego konkursu, który zna język rosyjski, zna również język angielski.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne:

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:

a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,

Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje regułę dodawania,
- stosuje regułę dodawania w zadaniach kombinatorycznych dotyczących liczby elementów sumy zbiorów,

- analizuje zbiór w celu podzielenia go na rozłączne podzbiory z zastosowaniem reguły dodawania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- sztuka teatralna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie analizują treść polecenia numer 1 „Zapoznaj się z poniższą animacją. Przeanalizuj omówione w niej rozwiązanie zadania, w którym zastosowano regułę dodawania” oraz materiał z sekcji „Animacja”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły.

Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania „ i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania „).

Materiały pomocnicze:

- [Liczba elementów zbioru skończonego](#)
- [Reguła mnożenia, reguła dodawania](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Liczba elementów zbioru skończonego – reguła dodawania „.