



Obliczanie granic ciągów zbieżnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Obliczanie granic ciągów zbieżnych

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Wśród ciągów nieskończonych możemy wyróżnić takie, które posiadają granicę będącą liczbą rzeczywistą oraz takie, które takiej granicy nie posiadają. Ciągi posiadające granicę będącą liczbą rzeczywistą nazywamy ciągami zbieżnymi. Istnieje wiele metod pozwalających stwierdzić czy ciąg nieskończony posiada granicę oraz obliczyć jej wartość. Temat ten poświęcimy zaprezentowaniu niektórych z tych metod.

Twoje cele

- Obliczysz granice ciągów zbieżnych wykorzystując twierdzenia o arytmetyce granic.
- Obliczysz granice ciągów zbieżnych, korzystając ze znajomości granic ciągów poznanych wcześniej.

Przeczytaj

Przypomnijmy twierdzenie o arytmetyce [granic ciągów](#).

Twierdzenie: Arytmetyka granic

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}, \quad b_n \neq 0, b \neq 0$$

Korzystając z powyższego twierdzenia pokażemy jak obliczać granice pewnych typów ciągów. Przyjrzyjmy się poniższym przykładom.

Przykład 1

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n - 1}.$$

Na początek wyłączamy najwyższą potęgę licznika i mianownika, czyli n^2 , przed nawias.

$$\frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n - 1} = \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3 - 0 + 0 = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right) = 2 + 0 - 0 = 2$$

więc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{2n^2 + 3n - 1} = \frac{3}{2}$$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie granicą ciągu jest iloraz współczynników stojących przy najwyższych potęgach n licznika i mianownika. Okazuje się, że nie jest to przypadek. Zachodzi bowiem następująca własność.

Własność: Granica ilorazu wielomianów (1)

Niech dany będzie ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{W_k(n)}{P_k(n)},$$

gdzie $W_k(n)$, $P_k(n)$ są dwoma wielomianami stopnia k , tzn.

$$W_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

$$P_k(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_2 n^2 + b_1 n + b_0$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_k(n)}{P_k(n)} = \frac{a_k}{b_k}.$$

Dowód.

W celu obliczenia granicy danego ciągu wyłączamy w liczniku oraz w mianowniku najwyższą potęgę, czyli n^k . Otrzymamy wówczas

$$\frac{W_k(n)}{P_k(n)} = \frac{n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k} \right)}{n^k \left(b_k + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^k} \right)} = \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^k}}{b_k + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^k}}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{k-1}}{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{n^k} = 0$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{k-1}}{n} = \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_0}{n^k} = 0$$

więc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_k(n)}{P_k(n)} = \frac{a_k}{b_k}.$$

Co kończy dowód.

Przykład 2

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n-3}{3n+1} - \frac{n^3-2n+3}{5n^3+n^2+n+1}.$$

Korzystając z powyższej własności mamy, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{3n+1} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3-2n+3}{5n^3+n^2+n+1} = \frac{1}{5}.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+1} - \frac{n^3-2n+3}{5n^3+n^2+n+1} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}.$$

Przykład 3

Rozważmy ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{2n^2+n-3}{n^4+3n^3-2n^2}$$

W celu obliczenia jego granicy wyłączamy w mianowniku najwyższą potęgę n przed nawias.

$$\frac{2n^2+n-3}{n^4+3n^3-2n^2} = \frac{2n^2+n-3}{n^2(n^2+3n-2)} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n^2+n-3}{n^2+3n-2}$$

Z wcześniejszej własności wiemy, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^2+3n-2} = 2.$$

Wiemy również, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^4+3n^3-2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n^2+n-3}{n^2+3n-2} \right) = 0 \cdot 2 = 0.$$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie wyraz ogólny ciągu jest ułamkiem, który w mianowniku ma wielomian stopnia wyższego niż wielomian w liczniku. W takiej sytuacji granica ciągu jest zawsze równa zero. Można to zapisać w postaci własności.

Własność: Granica ilorazu wielomianów (2)

Niech dany będzie ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{W_k(n)}{P_l(n)},$$

gdzie $W_k(n)$, $P_l(n)$ są dwoma wielomianami stopni k oraz l . Jeśli stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku, tzn. $k < l$, to

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_k(n)}{P_l(n)} = 0.$$

Przypomnijmy sobie, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ o ile $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a > 0$. Spójrzmy na kolejny przykład.

Przykład 4

Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt[n]{5^{n+1} - 3^n + 3 \cdot 2^n}$$

Na początek przekształcimy wyraz ogólny ciągu wyłączając przed nawias pod pierwiastkiem wyrażenie 5^n

$$\sqrt[n]{5^{n+1} - 3^n + 3 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{5^n \cdot \left[5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]}.$$

Następnie zapisujemy pierwiastek iloczynu w postaci iloczynu pierwiastków

$$\sqrt[n]{5^n \cdot \left[5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]} = \sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n}.$$

Ciągi $b_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$ oraz $c_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ są ciągami geometrycznymi o ilorazie mniejszym od 1 a zatem są zbieżne do zera. Stąd $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 5$ a zatem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1.$$

Ponieważ $\sqrt[n]{5^n} = 5$ więc granica wyjściowego ciągu jest równa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^{n+1} - 3^n + 3 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{5^n} \cdot \sqrt[n]{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n} \right) = 5 \cdot 1 = 5.$$

Przykład 5

Zapoznaj się z poniższą infografiką, na której przedstawiono sposób na obliczenie granicy pewnego typu ciągu. Wyraz ogólny tego ciągu, to pierwiastek n -tego stopnia z wielomianu.

Słownik

granica ciągu

liczba rzeczywista g taka, że dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje liczba naturalna N taka, że dla każdej liczby naturalnej $n > N$ zachodzi $|a_n - g| < \varepsilon$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym samouczkiem, na którym przedstawiono kilka przykładów obliczania granic ciągów zbieżnych z wykorzystaniem twierdzeń poznanych wcześniej. Po zapoznaniu się z nagraniem wykonaj zamieszczone pod nim polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DaShHwVG3>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej obliczania granic ciągów zbieżnych.

Polecenie 2

Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{1+3+\dots+(2n-5)}{3+6+\dots+3n}.$$

Polecenie 3

Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \sqrt{4n^2 - 8n} - 2n.$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie granic ciągów zbieżnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje poznane twierdzenia i własności do obliczania granic ciągów zbieżnych.
- stosuje twierdzenie o arytmetyce granic do obliczania granic ciągów zbieżnych w postaci ułamków wymiernych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- metoda kosza i walizki;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Obliczanie granic ciągów zbieżnych”.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 1 - „Zapoznaj się z poniższym samouczkiem, na którym przedstawiono kilka przykładów obliczania granic ciągów zbieżnych z wykorzystaniem twierdzeń poznanych wcześniej. Po zapoznaniu się z nagraniem wykonaj zamieszczone pod nim polecenia.” z sekcji „Film samouczek”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.

4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Obliczanie granic ciągów zbieżnych”).

- [Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)
- [Ciągi liczbowe. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – poziom rozszerzony](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Obliczanie granic ciągów zbieżnych”.