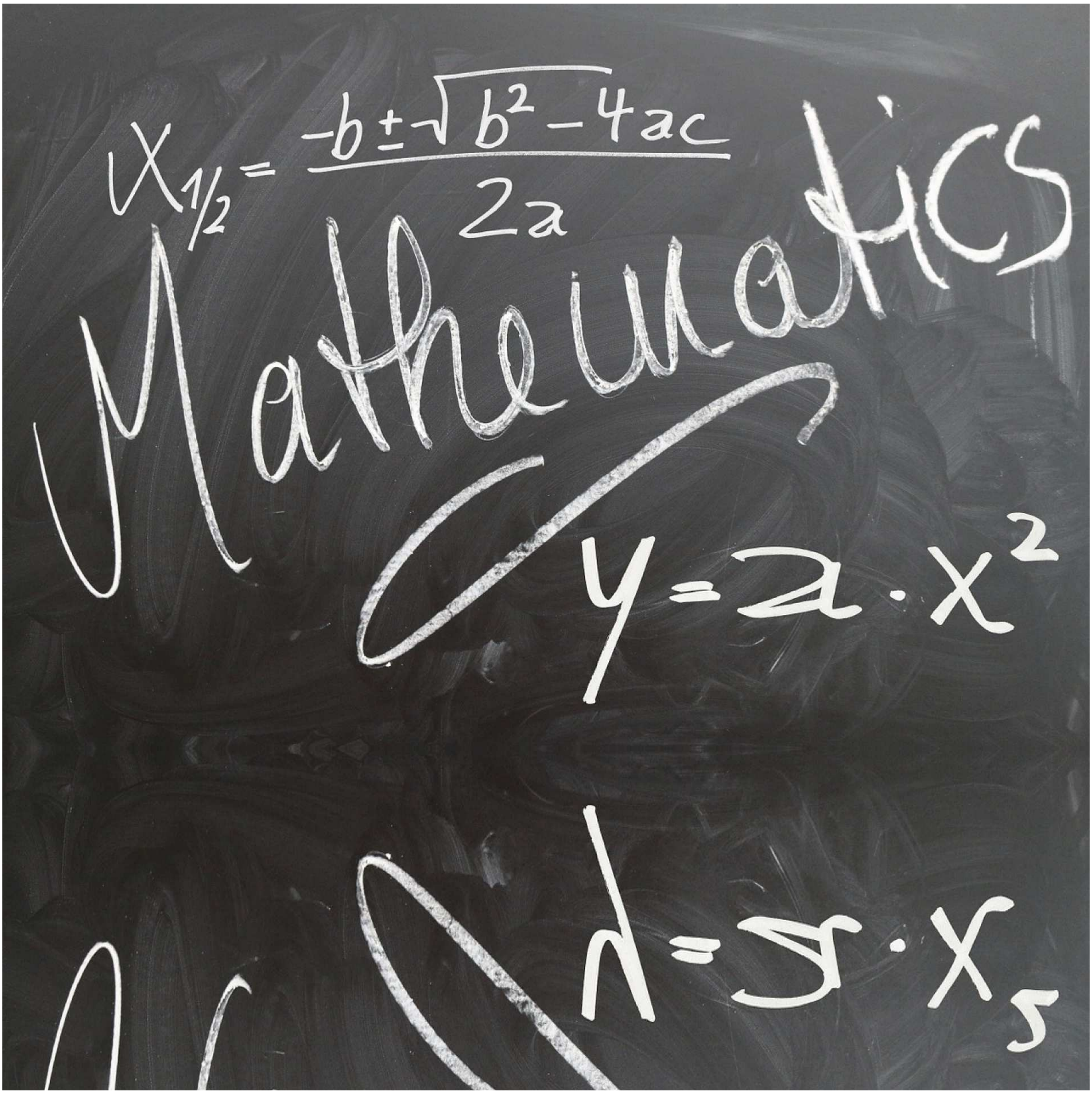

Wzory skróconego mnożenia na deser

Wzory skróconego mnożenia na deser

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Okazuje się, że podobnie jak wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń, można rozważać wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy trzech, a nawet więcej wyrażeń. Właśnie w tym materiale będzie okazja, aby wyprowadzić taki wzór i poznać jego zastosowanie.

Zbierzemy też wiadomości na temat poznanych już wzorów skróconego mnożenia i rozwiniemy umiejętności ich wykorzystania.

Twoje cele

- Wyprowadzisz wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy (różnicy) trzech wyrażeń.
- Zintegrujesz umiejętności wykorzystania poznanych wzorów skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Kwadrat sumy

Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń, możemy otrzymać wzór na kwadrat sumy trzech wyrażeń.

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2\cdot(a+b)\cdot c + c^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ważne!

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy trzech wyrażeń.

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Kwadrat sumy trzech wyrażeń a, b, c jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i podwojonych iloczynów ab, ac, bc.

Wzór na kwadrat sumy trzech wyrażeń można stosować, przekształcając wyrażenia algebraiczne czy w dowodach nierówności.

Przykład 1

Wykażemy, że jeśli $a>0$, $b>0$, $c>0$ to $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy trzech wyrażeń

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 = a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$$

Ponieważ $a>0$, $b>0$, $c>0$, zatem $a+b+c>0$.

Stąd:

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$$

Przykład 2

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez M różnicę wyrażeń z lewej i prawej strony nierówności.

Wykażemy, że ta różnica jest nieujemna.

$$M = 3\left(a^2+b^2+c^2\right) - (a+b+c)^2$$

Wykonujemy wskazane działania (korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy trzech wyrażeń).

$$M = 3a^2+3b^2+3c^2-\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\right)$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$M = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie tak, aby zapisać sumę w postaci sumy trzech kwadratów – korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy.

$$M = a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2$$

Suma kwadratów jest zawsze nieujemna.

$$M = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$$

Rozpatrywana nierówność jest prawdziwa.

$$M \geq 0$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $\frac{x^2+y^2+z^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} - \frac{1}{2}x = 0$, jeśli $x+y+z=0$.

Rozwiązanie:

W mianowniku ułamka wykonujemy wskazane działania.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2} - \frac{1}{2}x = 0$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2(x^2+y^2+z^2)-(2xy+2yz+2xz)} - \frac{1}{2}x = 0$$

Przekształcamy wzór na kwadrat sumy trzech wyrażeń, pamiętając, że $x+y+z=0$.

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2zy$$

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2zy$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = -(2xy + 2xz + 2zy)$$

Powracamy do równania – wykorzystujemy powyższą zależność w mianowniku ułamka.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2(x^2+y^2+z^2)+(x^2+y^2+z^2)} - \frac{1}{2}x = 0$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3(x^2+y^2+z^2)} - \frac{1}{2}x = 0$$

Skracamy.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Wzory skróconego mnożenia stopnia drugiego raz jeszcze

Rozwiążemy teraz kilka zadań, wykorzystując znane już własności wynikające ze wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 4

Uzasadnimy, że dla nieujemnych liczb a, b prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

Rozwiązanie:

Obie strony dowodzonej nierówności są nieujemne, zatem rozpatrywana nierówność jest równoważna nierówności

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \leq 2(a+b)$$

Stąd:

$$2\sqrt{ab} \leq 2a + 2b - a - b$$

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy otrzymujemy

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

Nierówność otrzymana jest prawdziwa i równoważna dowodzonej nierówności.

Zatem dowodzona nierówność jest prawdziwa, co należało dowieść.

Przykład 5

Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n liczba $K = 16^n - 2^{2n+4} + 64$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Przekształcamy wyrażenie określające liczbę K.

$$K = 16^n - 2^{2n+4} + 64 = (4^n)^2 - 2 \cdot 4^n \cdot 2^3 + 8^2 = (4^n - 8)^2$$

Liczba K jest więc kwadratem liczby $4^n - 8$.

Przykład 6

Znajdziemy sumę liczb a, b, c wiedząc, że $\frac{a}{2bc} + \frac{1}{c} = 0$, $\frac{b}{2ac} + \frac{1}{a} = 0$, $\frac{c}{2ab} + \frac{1}{b} = 0$.

Rozwiązanie:

Dodajemy stronami zapisane równości.

$$\frac{a}{2bc} + \frac{1}{c} = 0$$

$$\frac{b}{2ac} + \frac{1}{a} = 0$$

$$\frac{c}{2ab} + \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{a}{2bc} + \frac{1}{c} + \frac{b}{2ac} + \frac{1}{a} + \frac{c}{2ab} + \frac{1}{b} = 0$$

Sprowadzamy lewą stronę równości do wspólnego mianownika.

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{2abc} = 0$$

Licznik zapisujemy w postaci kwadratu sumy (korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia).

$$\frac{(a+b+c)^2}{2abc} = 0$$

Ułamek jest równy 0, jeżeli jego licznik jest równy 0.

$$a + b + c = 0$$

Suma liczb a, b, c jest równa 0.

Słownik

kwadrat sumy trzech wyrażeń

kwadrat sumy trzech wyrażeń a, b, c jest równy sumie kwadratów tych wyrażeń i podwojonych iloczynów ab, ac, bc

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Zaobserwuj, w jaki sposób można graficznie zilustrować wzór na kwadrat sumy trzech wyrażeń.

Polecenie 2

Wykaż, że $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzupełnij, przeciągając w prawidłowe miejsca odpowiednie wyrażenia.

$(a+b+c)^2 = (a+b+c) \cdot (\ \square\ )$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + c \cdot (\ \square\ )$

$(a+b+c)^2 = a^2 + (\ \square\ )^2 + 2a(b+c)$

$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (\ \square\ )^2 + \left(2bc - a^2\right)$

$b+c$ | $a+b+c$ | $a+c$ | $c+2a+2b$

Ćwiczenie 2

Uzupełnij, przeciągając odpowiednie liczby.

$(a+2b+3c)^2 = \square\, a^2 + \square\, b^2 + \square\, c^2 + \square\, ab + \square\, ac + \square\, bc$

6 | 1 | 4 | 4 | 2 | 8 | 10 | 12 | 9 | 0

Ćwiczenie 3

Zaznacz, poprawne równości.

- [ ] $(a-b)^2 - 2c(a-b) + c^2 = (a-b-c)^2$
- [ ] $(a-b)^2 + 2c(a-b) + c^2 = (a-b+c)^2$
- [ ] $(a+b)^2 - 2c(a-b) + c^2 = (a+b-c)^2$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary równe wyrażenia.

$(a+b+c)^2$	$a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$
$(a-b-c)^2$	$a^2-2a(b-c)+(b-c)^2$
$(a+b-c)^2$	$a^2+2a(b-c)+(b-c)^2$
$(a-b+c)^2$	$a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

Ćwiczenie 5

Przyjmijmy $\sqrt{2}\approx 1,4$. Wtedy wartość wyrażenia $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}}$ z dokładnością do jednego miejsca po przecinku jest równa

- $4,8$
- $-0,8$
- $3,4$
- $4,4$

Ćwiczenie 6

Który z podanych warunków jest spełniony dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c?

- $\frac{a+b+c}{3}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$
- $\frac{a+b+c}{3}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$
- $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$

Ćwiczenie 7

Jeśli $a > 3$ to wartość wyrażenia $(a+3)^2 + (a-3)^2$ jest większa od wartości wyrażenia $2\left(a^2+3\right)$ o

- 6
- 12
- 3
- 9

Ćwiczenie 8

Zapisz wyrażenie $W = \frac{a+b+c}{a-b+c} \cdot \left(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right)$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń.

Ćwiczenie 9

Zapisz w jak najprostszej postaci wyrażenie $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}+3}}$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory skróconego mnożenia na deser

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyprowadza wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy (różnicy) trzech wyrażeń
- integruje umiejętności wykorzystania poznanych wzorów skróconego mnożenia
- stosuje posiadaną wiedzę na temat wzorów skróconego mnożenia w sytuacjach nietypowych, na przykład w dowodach algebraicznych i arytmetycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- praca z ekspertem
- tarcza strzelecka

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy z uczniów miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Kilka dni wcześniej nauczyciel poleca dwóm uczniom przygotowanie zajęć podsumowujących oraz rozszerzających wiadomości i umiejętności dotyczące wzorów skróconego mnożenia stopnia drugiego. W tym celu wybrani uczniowie powinni zapoznać się z materiałem zawartym w sekcjach „Przeczytaj", „Sprawdź się" oraz przeanalizować galerię zdjęć interaktywnych.
2. Na lekcji, uczniowie ci, zwani dalej ekspertami, podają temat zajęć i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie wspólnie oglądają galerię zdjęć interaktywnych – eksperci wyjaśniają wątpliwości, odpowiadają na pytania.
2. Uczniowie w parach wyprowadzają wzory typu: $(a-b-c)^2$, $(a+b-c)^2$. Eksperci kontrolują poprawność uzyskanych wyrażeń.
3. Uczniowie nadal pracują w parach – rozwiązują ćwiczenia interaktywne, pod nadzorem ekspertów.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie na tarczy strzeleckiej (przygotowanej wcześniej przez ekspertów) zaznaczają problemy, które im sprawiały trudności, lub były dla nich bardzo łatwe.
2. Jeden z ekspertów podsumowuje pracę uczniów, konfrontując jednocześnie swoje obserwacje z wynikami uzyskanymi na tarczy strzeleckiej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wyprowadzenie wzorów na kwadrat sumy 4 wyrazów oraz na kwadrat sumy 5 wyrazów i zaobserwowanie analogii w tworzeniu podobnych wzorów.

Materiały pomocnicze:

Działania na wyrażeniach algebraicznych – zadania, zadania generatorowe

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą oglądać samodzielnie galerię zdjęć interaktywnych w czasie zajęć i na jej podstawie graficznie oraz algebraicznie interpretować kwadraty wyrażeń typu $(3x-2y+1)^2$.