



Graniastosłup prawidłowy trójkątny

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Graniastosłup prawidłowy trójkątny

Źródło: domena publiczna, dostępny w internecie: <https://www.pxfuel.com/>.

Flatiron Building to budynek wybudowany w 1902 roku znajdujący się w Nowym Jorku. Jest jednym z pięciu najbardziej rozpoznawalnych symboli tego miasta. Nazwa Flatiron pochodzi od podobieństwa bryły budynku do starego żelazka na węgiel.

Sześcian i prostopadłościan to jedne z wielu brył, które udało Ci się do tej pory poznać. Bryły te to graniastosłupy proste, czyli takie graniastosłupy, których krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw. Dzięki temu materiałowi dowiesz się, do jakiej grupy brył należy bryła, której realizację architektoniczną przedstawia budynek Flatiron Building.



Flatiron Building

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

- Podasz definicję graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.
- Odróżnisz graniastosłup prawidłowy trójkątny od pozostałych graniastosłupów.

Przeczytaj

Definicja: Graniastosłup prawidłowy trójkątny

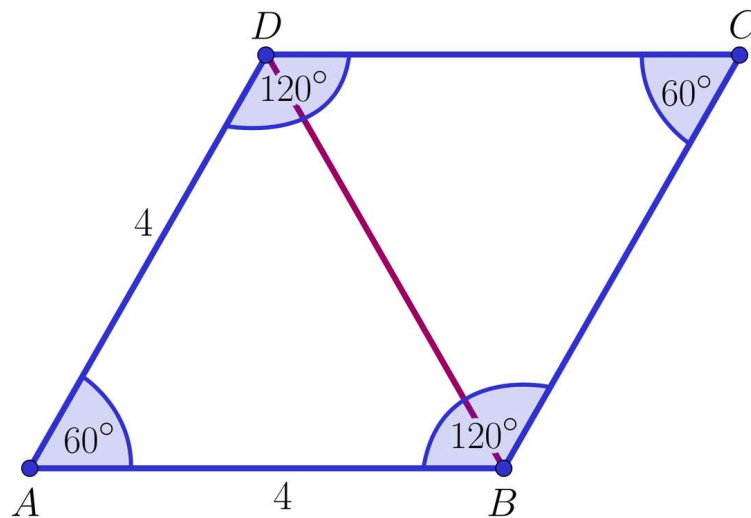
Graniastosłupem prawidłowym trójkątnym nazywamy graniastosłup prosty, którego podstawy są trójkątami równobocznymi.

Przykład 1

Dany jest **graniastosłup prosty** czworokątny, którego podstawą jest romb o boku długości 4 oraz kącie ostrym 60° . Bryłę rozcięto wzdłuż krótszej przekątnej. Sprawdźmy, czy powstałe bryły to graniastosłupy prawidłowe trójkątne. Wyznamy sumę długości wszystkich krawędzi jednej z nowo powstałych brył wiedząc, że stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości graniastosłupa wynosi $2 : 3$.

Rozwiązanie

Zacniemy od wyznaczenia długości krótszej przekątnej rombu.



Zuważmy, że trójkąt ABD jest równoboczny, ponieważ $|\angle ABD| = |\angle ADB| = 60^\circ$.
Zatem $|BD| = 4$.

Po rozcięciu bryły wzdłuż krótszej przekątnej rombu, podstawa podzieliła się na dwa trójkąty równoboczne, więc otrzymujemy w ten sposób dwa graniastosłupy prawidłowe trójkątne. Skoro stosunek długości krawędzi podstawy do wysokości bryły wynosi $2 : 3$, to

$$\frac{a}{h} = \frac{2}{3}, \text{ czyli } \frac{4}{h} = \frac{2}{3}.$$

Wynika stąd, że $h = 6$.

Suma krawędzi jednego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi
 $3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 18 + 24 = 42$.

Przykład 2

Mamy dwa pudełka, w których znajdują się elementy budowy szkieletu graniastosłupa trójkątnego. W pierwszym pudełku są po dwa trójkąty równoboczne o bokach długości: 6 cm, 3 cm oraz 2 cm, natomiast w drugim pudełku są po trzy krawędzie boczne o długości: 4 cm, 6 cm, 14 cm, 18 cm, 20 cm. Wyznamy na ile sposobów wybrane trójkąty z pierwszego pudełka oraz krawędzie z drugiego pudełka utworzą szkielet graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.

Rozwiązanie

Aby utworzyć szkielet graniastosłupa prawidłowego trójkątnego muszą zachodzić jednocześnie dwa warunki:

- obydwa trójkąty równoboczne muszą mieć boki tej samej długości,
- trzy krawędzie boczne muszą mieć tę samą długość.

Zauważmy, że mamy 15 możliwości spełniające warunki określone w treści zadania. Istotnie:

- jeżeli wybierzemy dwa trójkąty równoboczne o boku długości 6 cm to krawędzie mogą mieć długość 4 cm, 6 cm, 14 cm, 18 cm, 20 cm,
- jeżeli wybierzemy dwa trójkąty równoboczne o boku długości 3 cm to krawędzie mogą mieć długość 4 cm, 6 cm, 14 cm, 18 cm, 20 cm,
- jeżeli wybierzemy dwa trójkąty równoboczne o boku długości 2 cm to krawędzie mogą mieć długość 4 cm, 6 cm, 14 cm, 18 cm, 20 cm.

Przykład 3

Sprawdzimy, czy z drutu o długości 30 można zbudować szkielet bryły będącej graniastosłupem prawidłowym trójkątnym, w którym długości krawędzi podstaw i długości krawędzi bocznych wyrażone są liczbą całkowitą dodatnią. Rozważymy wszystkie możliwości.

Rozwiązanie

Rozważmy graniastosłup prawidłowy trójkątny.

Niech $a \in \mathbb{Z}_+$ oznacza długość krawędzi podstawy, a $b \in \mathbb{Z}_+$ długość krawędzi bocznej rozważanego graniastosłupa.

Mamy 6 krawędzi podstawy o długości a oraz 3 krawędzie boczne o długości b , zatem otrzymujemy równanie $6a + 3b = 30$, co daje: $2a + b = 10$.

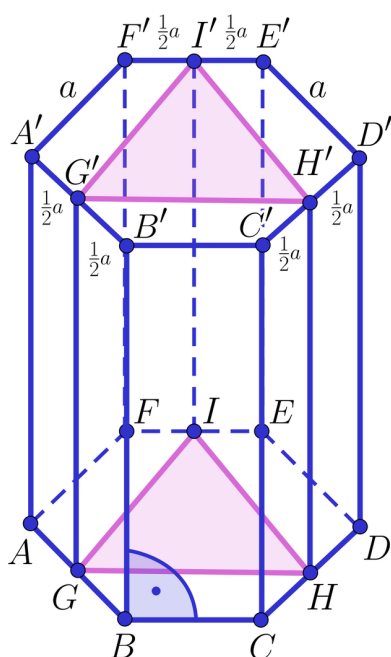
Zatem mamy następujące możliwości długości krawędzi graniastosłupa spełniające warunki zadania:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

Mamy zatem cztery możliwe do zbudowania graniastosłupy prawidłowe trójkątne spełniające warunki zadania.

Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny rozcięto wzdłuż odcinków łączących środki co drugiej krawędzi podstawy. W wyniku rozcięcia otrzymano graniastosłup trójkątny.



- Uzasadnimy, że jest to graniastosłup prawidłowy trójkątny.
- Niech $a \in \mathbb{R}_+$ oznacza długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego. Obliczymy sumę długości wszystkich krawędzi podstaw nowo powstałego graniastosłupa trójkątnego.

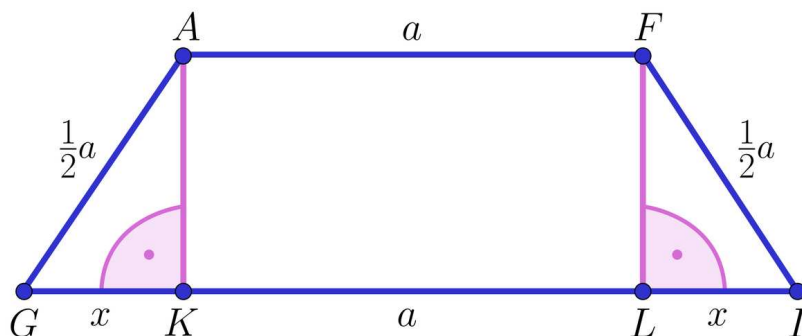
Rozwiązanie

- Zauważmy, że krawędzie podstawy nowo powstałego graniastosłupa trójkątnego stanowią dłuższą podstawę przystających trapezów równoramiennych $AGIF$, $GBCH$, $HDEI$, $A'G'I'F'$, $G'B'C'H'$, $H'D'E'I'$.

Zatem wszystkie te krawędzie podstaw są równe, więc podstawy są trójkątami równobocznymi

Stąd wynika, że nowo powstały graniastosłup jest graniastosłupem prawidłowym trójkątnym.

b) Rozpatrzmy jeden z takich trapezów równoramiennych $GIFA$.



Zauważmy, że $|\sphericalangle GAF| = |\sphericalangle AFI| = 120^\circ$.

Oznaczmy: $|GK| = |LI| = x$ oraz $|AF| = |KL| = a$, stąd $|GA| = |FI| = \frac{1}{2}a$.

Z trójkąta GKA mamy:

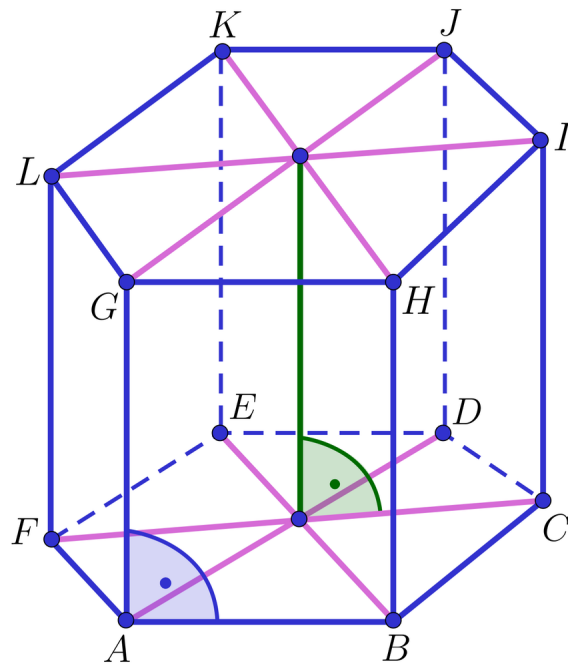
$$\sin 30^\circ = \frac{2x}{a}.$$

Zatem: $\frac{2x}{a} = \frac{1}{2}$, co daje ostatecznie: $x = \frac{1}{4}a$.

Zatem długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $a + 2 \cdot \frac{1}{4}a = \frac{3}{2}a$, a suma długości wszystkich tych krawędzi wynosi $6 \cdot \frac{3}{2}a = 9a$.

Przykład 5

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny rozcięto wzdłuż przekątnych podstaw przechodzących przez środki symetrii podstaw.



Następnie każdy z otrzymanych graniastosłupów prawidłowych trójkątnych pomalowano innym kolorem farby. Na ile sposobów, można “skleić” ze sobą dwa graniastosłupy prawidłowe trójkątne różnego koloru, aby otrzymać graniastosłup prosty czworokątny?

Rozwiązanie

- 1) W wyniku rozcięcia graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego wzdłuż przekątnych przechodzących przez środki symetrii podstaw otrzymano 6 graniastosłupów prawidłowych trójkątnych.
- 2) Oznaczmy kolory, jakimi pomalowano każdy z graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, następująco $\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$.
- 3) Zatem graniastosłupów prostych czworokątnych jest, tyle co dwuelementowych podzbiorów zbioru $\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\}$.
- 4) Każdy taki podzbiór nazywamy dwuelementową [kombinacją zbioru](#) sześćcioelementowego. Zatem $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$.

Słownik

graniastosłup

wielościán, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch płaszczyznach równoległych, zwanych płaszczyznami podstaw, dolnej i górnej, a którego wszystkie krawędzie nie leżące na tych płaszczyznach, zwane krawędziami bocznymi, są równoległe

graniastosłup prosty

graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw

graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi

kombinacja zbioru

każdy k -elementowy podzbiór zbioru n -elementowego A , gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k -elementową kombinacją zbioru A ; jeżeli $k \leq n$, to wszystkich k -elementowych kombinacji zbioru n -elementowego jest: $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod nią.

Polecenie 2

Na podstawie informacji z prezentacji określ, czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe:

Zdanie	Prawda	Fałsz
Podstawa graniastopuła prawidłowego trójkątnego ma długość a . Stosunek długości krawędzi bocznej do krawędzi podstawy wynosi 1:4. Zatem suma długości krawędzi wynosi $\frac{27}{4}a$.	☐	☐
Suma długości krawędzi w graniastopie prawidłowym trójkątnym wynosi 60. Jeżeli krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od krawędzi podstawy, to długość krawędzi podstawy wynosi 3.	☐	☐
Graniastop prosty czworokątny, którego podstawą jest trapez równoramienny o krótszej podstawie długości 4 oraz dłuższej podstawie i ramionach długości 8, przecięto wzdłuż przekątnej podstawy i otrzymano dwa graniastopuły prawidłowe trójkątne.	☐	☐

Polecenie 3

Uzasadnij, że jeśli graniastosłup prawidłowy czworokątny rozetniemy wzdłuż przekątnej podstawy, to nie powstaną dwa graniastosłupy prawidłowe trójkątne.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

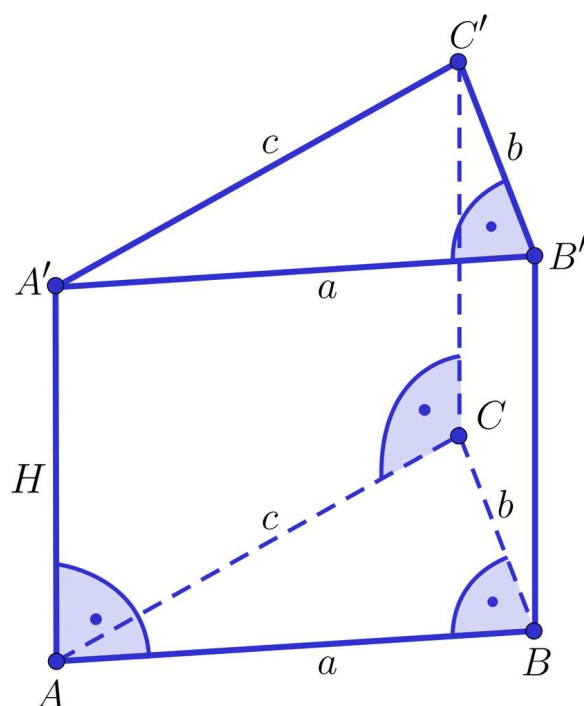
Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Na rysunku przedstawiono wielościan.



$$ABC \parallel A'B'C'$$

Zaznacz wszystkie prawidłowe nazwy określające podaną powyżej bryłę.

☐ graniastosłup prawidłowy

☐ graniastosłup pochyły

☐ graniastosłup prawidłowy trójkątny

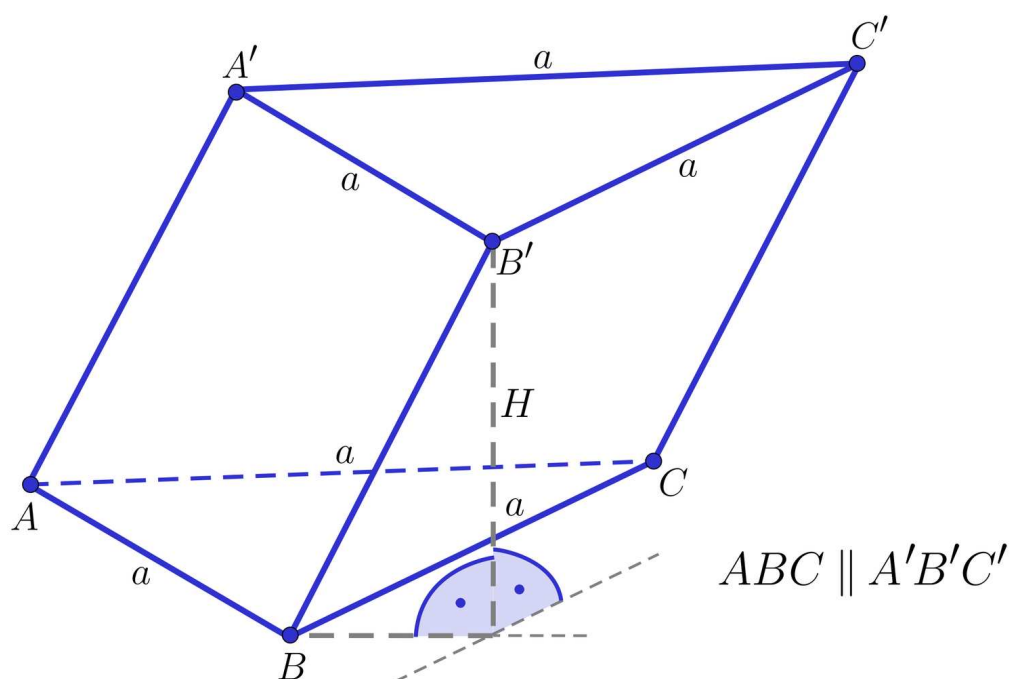
☐ graniastosłup prosty

☐ graniastosłup

Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono wielościan.



Zaznacz wszystkie prawidłowe nazwy określające podaną powyżej bryłę.

☐ graniastosłup pochyły

☐ graniastosłup prawidłowy trójkątny

☐ graniastosłup prawidłowy

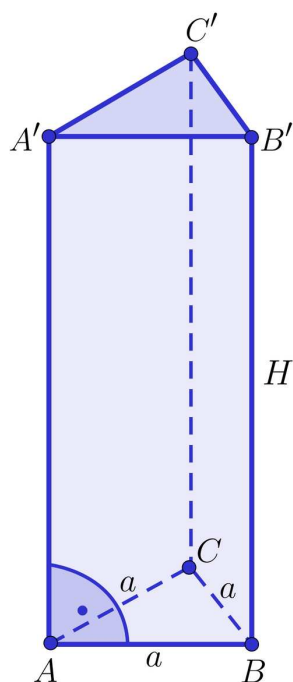
☐ graniastosłup prosty

☐ graniastosłup

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono graniastosłup.



Zaznacz wszystkie prawidłowe nazwy określające podaną powyżej bryłę.

☐ graniastosłup pochyły

☐ graniastosłup prawidłowy

☐ graniastosłup prawidłowy trójkątny

☐ graniastosłup prosty

Ćwiczenie 5



Uzupełnij podany tekst przeciągając w odpowiednie miejsca właściwy wyraz.

Gnaniastołup prosty trójkątny to bryła, której podstawami są dwa leżące w płaszczyznach oraz ściany będące przystającymi prostopadłymi do podstaw. Jeśli podstawami gnaniastołupa prostego są , to nazywamy go gnaniastołupem trójkątnym. W gnaniastołupie trójkątnym krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstaw.

równoległych

prostopadłych

trójkąty równoboczne

przystające trójkąty

pochyłym

trójkąty prostokątne

boczne

trzy

trójkątami

prostokątami

prawidłowym

Ćwiczenie 6



Graniastosłup ma $3n$ krawędzi, gdzie n spełnia warunek $n \geq 3$. Wskaż wyrażenie określające:

Zdanie	$2n$	n	$2n - 1$
Liczbę wierzchołów należących do jednej podstawy.	☐	☐	☐
Liczbę ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.	☐	☐	☐
Liczbę (sumę) wszystkich krawędzi podstaw graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.	☐	☐	☐
Liczbę wszystkich wierzchołków graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.	☐	☐	☐
Liczbę wszystkich ścian graniastosłupa prawidłowego trójkątnego.	☐	☐	☐

Ćwiczenie 7



Ile jest możliwości zbudowania z drutu długości 36 szkieletu bryły będącej graniastosłupem prawidłowym trójkątnym, w którym długości krawędzi podstaw i długości krawędzi bocznych wyrażone są liczbami całkowitymi dodatnimi? Rozważ wszystkie przypadki.

Ćwiczenie 8

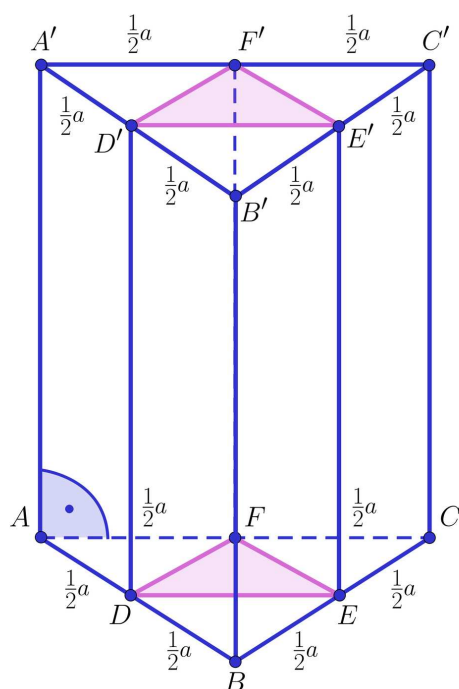


Jaką maksymalną długość krawędzi bocznej ma graniastostup prawidłowy trójkątny, jeśli do budowy jego szkieletu zużyto drut o długości 18 m i wiadomo, że długości wszystkich krawędzi są wyrażone przez liczby całkowite dodatnie oraz długość krawędzi podstawy jest najmniejsza z możliwych?

Ćwiczenie 9



Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto wzdłuż odcinków łączących środki krawędzi podstawy. W wyniku rozcięcia otrzymano graniastosłup trójkątny.



- a) Czy jest to graniastosłup prawidłowy trójkątny? Odpowiedź uzasadnij.
- b) Niech $a \in \mathbb{Z}_+$ oznacza długość krawędzi podstawy wyjściowego graniastosłupa prawidłowego trójkątnego. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi podstaw nowo powstałego graniastosłupa trójkątnego.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg liczbowy

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste,
- społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje definicje graniastosłupa, graniastosłupa prostego, graniastosłupa prawidłowego, graniastosłupa pochyłego,
- opisuje podstawowe własności graniastosłupa prawidłowego trójkątnego,
- wykorzystuje podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do obliczeń.
- analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- metoda wędrujących plakatów

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica
- pisak/kreda

Przebieg zajęć:

Przed lekcją

Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi graniastosłupów prostych i pochyłych.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji o temacie: „Graniastosłup prawidłowy

trójkątny”.

2. Uczniowie metodą wędrujących plakatów przypominają informacje na temat graniastosłupów.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z działu „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Rodzaje graniastosłupów

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Prezentację multimedialną można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału o graniastosłupach.