



Przekroje sześcianu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przekroje sześcianu

Źródło: Joanna Kosińska, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jadłeś kiedyś sześcienny kawałek ciastka?



Źródło: Pixabay.com, dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Gdybyśmy jednym cięciem chcieli podzielić go na dwie (niekoniecznie takie same) części, to jakie figury moglibyśmy otrzymać w przekrojonym miejscu? Niby niewinne pytanie, a jednak tkwi w nim ukryta matematyka. Taką figurę, która powstaje w wyniku przecięcia bryły jedną płaszczyzną nazywamy przekrojem bryły. Dziś zajmiemy się przekrojami sześcianu.

Twoje cele

- Rozpoznaś przekrój sześcianu.
- Nazwiesz dany przekrój w sześcianie.
- Podzielisz przekroje sześcianu ze względu na typ.
- Ocenisz, czy dana figura może być przekrojem sześcianu.

Przeczytaj

Przekrojem bryły nazywamy figurę płaską, która powstaje przez przecięcie bryły płaszczyzną – jest to część wspólna bryły i płaszczyzny.

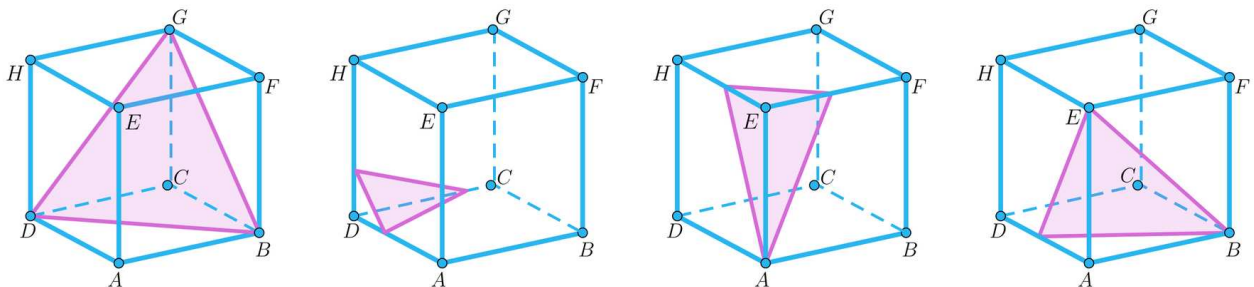
Będziemy zajmować się przekrojami sześcianu. Dokonamy klasyfikacji przekrojów sześcianu ze względu na kształt przekroju.

Podział przekrojów sześcianu ze względu na kształt

Przekrój sześcianu może być trójkątem, czworokątem, pięciokątem lub sześciokątem.

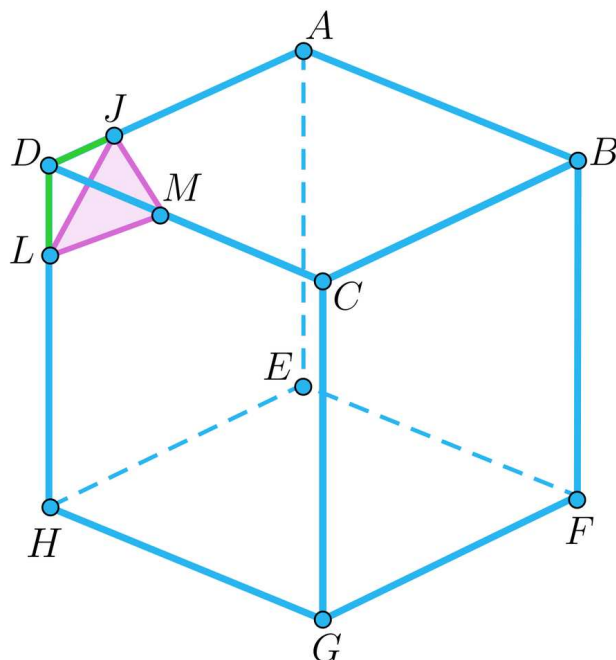
Przekrój trójkątny

Wśród wierzchołków trójkąta, który jest przekrojem sześcianu, znajduje się jeden, dwa lub trzy wierzchołki sześcianu lub też nie znajduje się żaden wierzchołek sześcianu – przy czym, jeśli są to dwa wierzchołki, to nie są one końcami tej samej krawędzi sześcianu.



Przykład 1

Sześcian $ABCDEFGH$ przecinamy płaszczyzną JLM jak na rysunku:



Pokażemy, że jeśli $|DL| = |DJ|$, to przekrój JLM jest trójkątem równoramiennym.

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie $|DL| = |DJ| = x$ oraz $|DM| = y$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy $|JM|^2 = x^2 + y^2$ oraz $|LM|^2 = x^2 + y^2$. A zatem $|JM| = |LM|$. Czyli trójkąt JLM jest równoramienny.

Ważne!

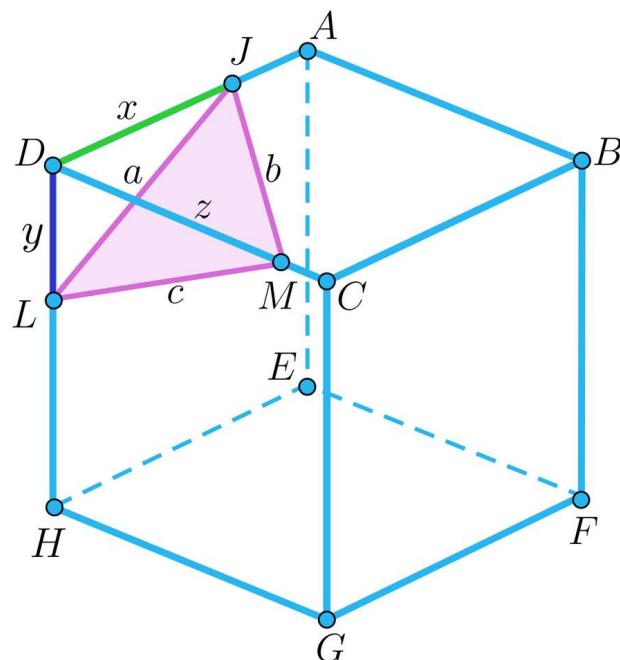
Aby przekrój sześcianu był trójkątem, wszystkie jego wierzchołki muszą leżeć na trzech różnych krawędziach sześcianu wychodzących z jednego wierzchołka.

Przykład 2

Pokażemy, korzystając z uwagi powyżej, że **przekrój** sześcianu nie może być trójkątem prostokątnym.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x, y, z odległości wierzchołków trójkąta od wspólnego wierzchołka krawędzi, na których leżą wierzchołki trójkąta (przy czym $x, y, z > 0$, bo w przeciwnym przypadku trójkąt nie byłby przekrojem) oraz przez a, b, c długości boków tego trójkąta.



Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$c^2 = y^2 + z^2$$

$$b^2 = x^2 + z^2$$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

Zauważmy, że:

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2 + x^2 + z^2 = 2x^2 + y^2 + z^2 > c^2$$

$$b^2 + c^2 = x^2 + z^2 + y^2 + z^2 = 2z^2 + x^2 + y^2 > a^2$$

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + y^2 + z^2 = 2y^2 + x^2 + z^2 > b^2$$

A zatem z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa żaden z kątów w tym trójkącie nie jest prosty.

Ważne!

Ponieważ przy oznaczeniach w powyższym przykładzie:

$$a^2 + b^2 > c^2$$

$$b^2 + c^2 > a^2$$

$$a^2 + c^2 > b^2$$

to wszystkie kąty w przekroju trójkątnym sześcianu są ostre.

Wnioski

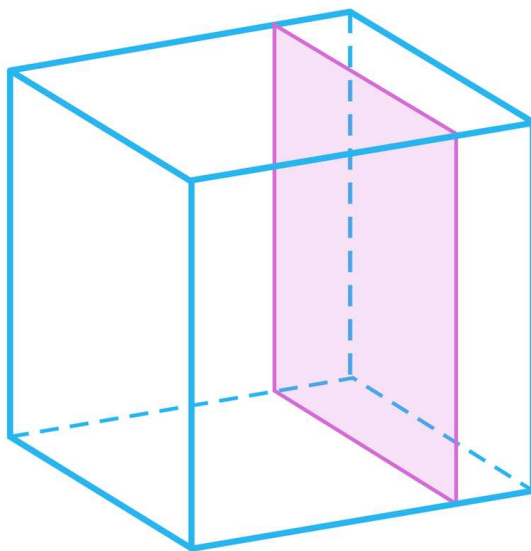
1. Przekrój trójkątny w sześcianie jest trójkątem ostrokątnym o dowolnych miarach kątów ostrych.
2. Przekrój trójkątny w sześcianie może być trójkątem równobocznym. Największym trójkątem równobocznym, który może być przekrojem sześcianu jest trójkąt, którego wierzchołki są wierzchołkami sześcianu, a boki są przekątnymi ścian bocznych.

Przekrój czworokątny

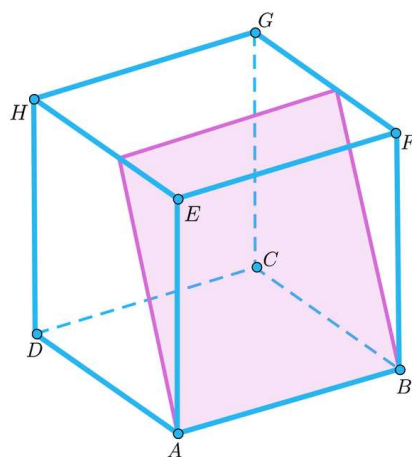
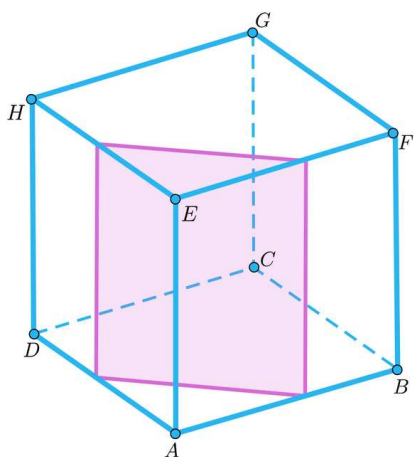
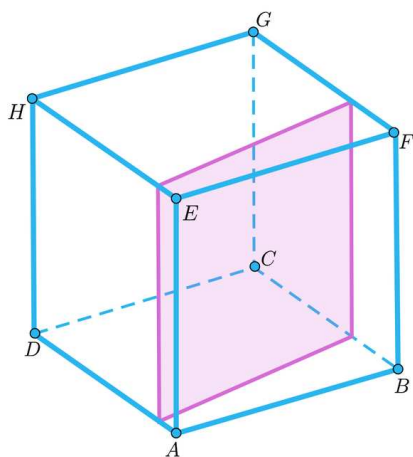
Mamy wiele **przekrojów** sześcianu w kształcie czworokąta.

Kwadrat

Przekrój, którego wszystkie boki są prostopadłe do odpowiednich krawędzi sześcianu, jest kwadratem.



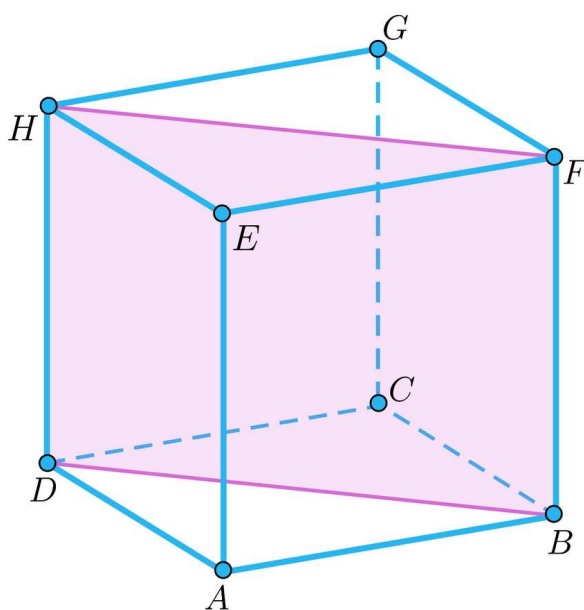
Prostokąt niebędący kwadratem



Przekrój w kształcie prostokąta otrzymamy przecinając sześcián płaszczyzną prostopadłą do ściany sześciánu. Przy czym, jeśli płaszczyzna ta będzie równoległa do płaszczyzny zawierającej krawędź tej ściany, to prostokąt ten będzie kwadratem.

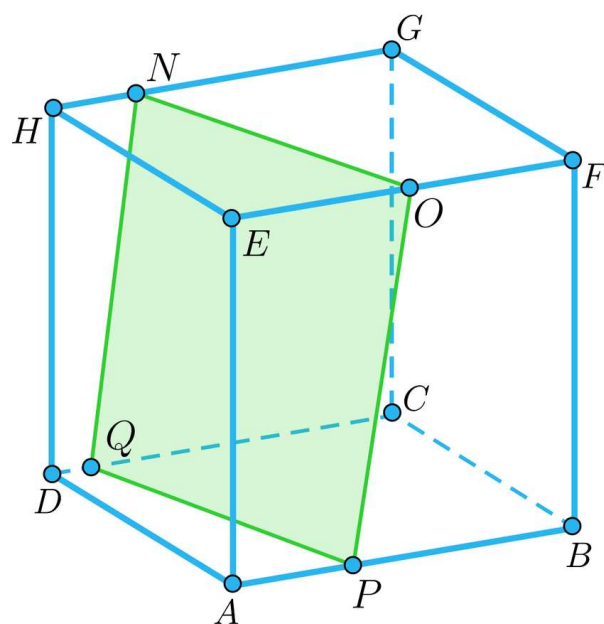
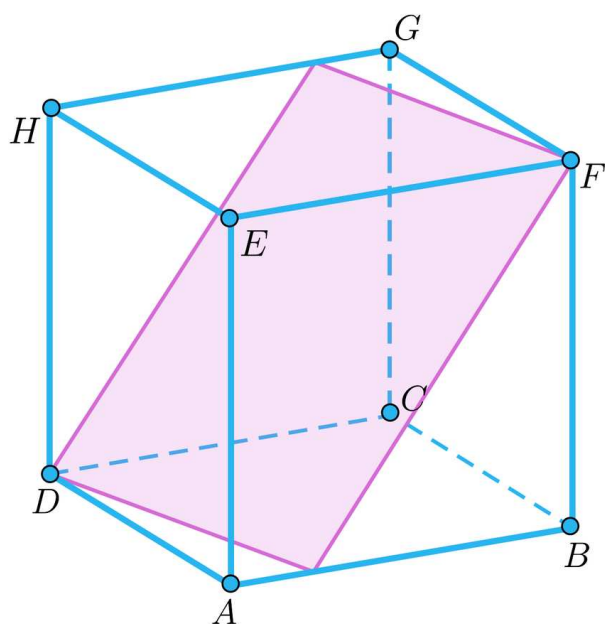
Ważne!

Największym przekrojem w kształcie prostokąta, jaki otrzymamy, jest prostokąt, którego bokami są przeciwległe krawędzie sześciánu oraz przekątne jego ścian.



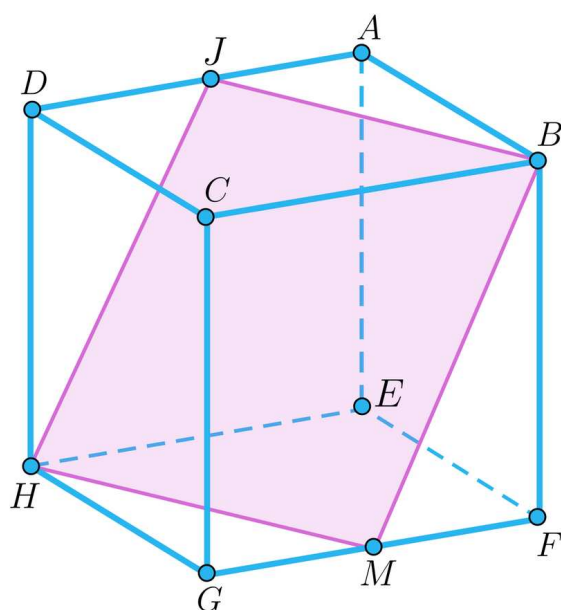
Równoległobok

Przekrój czworokątny sześciánu, którego po dwa wierzchołki znajdują się na równoległych ścianach, jest równoległobokiem.



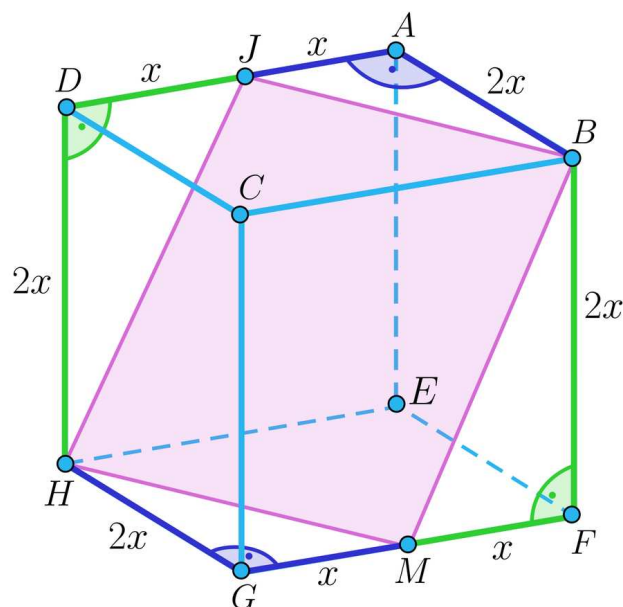
Przykład 3

Pokażemy, że jeśli punkty J i M są środkami odcinków AD i FG w sześcianie na rysunku, to równoległobok $HJBM$ jest rombem.



Rozwiązanie

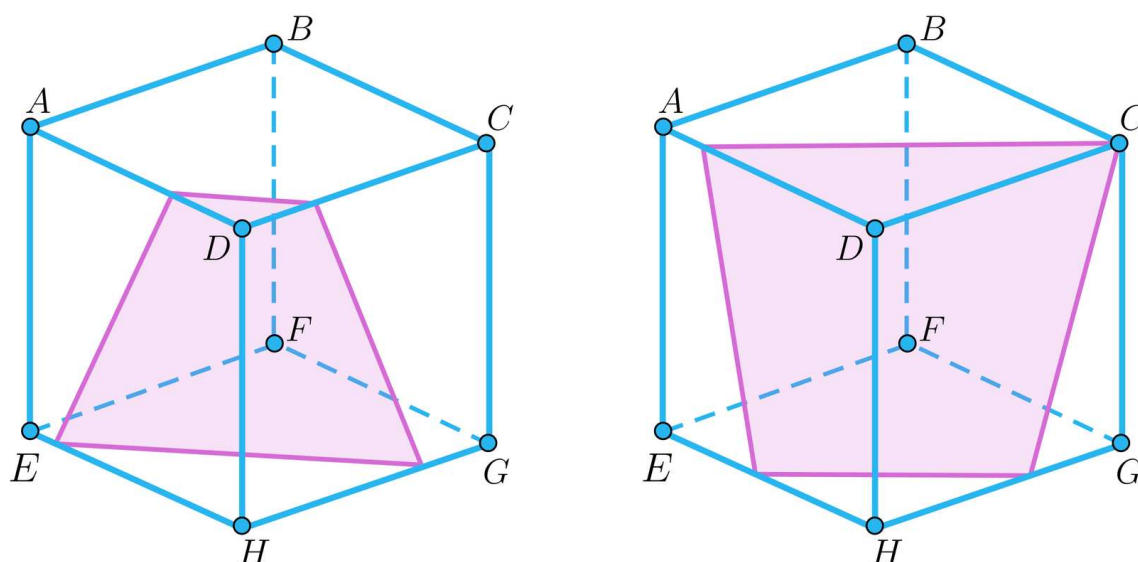
Wprowadźmy oznaczenia na rysunku.



Zauważmy, że trójkąty GHE , MFB , BAJ , JDH są trójkątami prostokątnymi o tych samych długościach przyprostokątnych, a zatem są przystające. Czyli $|HM| = |MB| = |BJ| = |JH|$. A zatem równoległobok $BJHM$ jest rombem.

Trapez

Przekrój czworokątny sześcianu, którego dokładnie jedna para boków leży na równoległych ścianach, jest trapezem, który nie jest równoległobokiem.



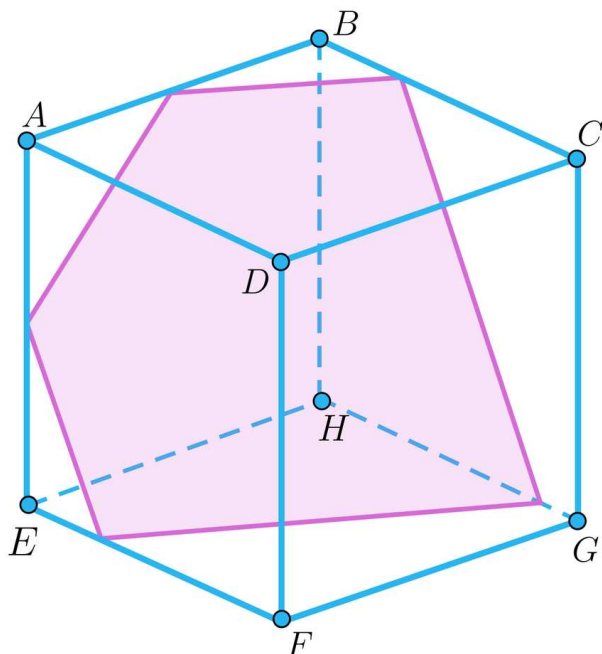
Wniosek:

Aby przekrój był czworokątem, co najmniej jedna para boków tego przekroju musi leżeć na płaszczyznach równoległych. Przecięcie dwóch ścian równoległych trzecią płaszczyzną

daje dwa równoległe boki przekroju. Zatem każdy przekrój sześcianu w kształcie czworokąta jest trapezem.

Przekrój pięciokątny

Jeżeli płaszczyzna przetnie pięć ścian sześcianu, to jest on pięciokątem.



Ważne!

Nie istnieje przekrój sześcianu, który ma kształt pięciokąta foremnego.

Przykład 4

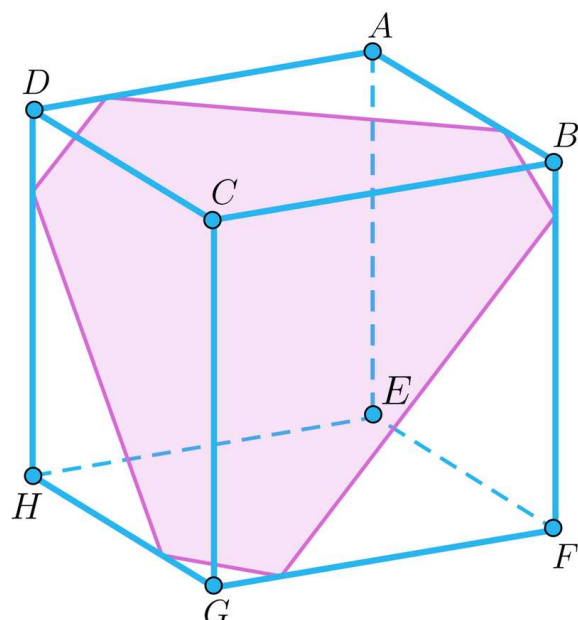
Uzasadnij, że przekrój sześcianu nie może być pięciokątem foremnym.

Rozwiązanie

Zauważmy, że przecinając dwie równoległe płaszczyzny trzecią płaszczyzną otrzymujemy na przecięciu proste równoległe.

Ponieważ, aby otrzymać przekrój w kształcie pięciokąta musimy przeciąć pięć ścian sześcianu, to wśród nich są dwie pary ścian równoległych. A zatem pięciokąt ten ma dwie pary boków równoległych. Łatwo zauważyć, że pięciokąt foremny nie ma ani jednej pary boków równoległych.

Przekrój sześciokątny

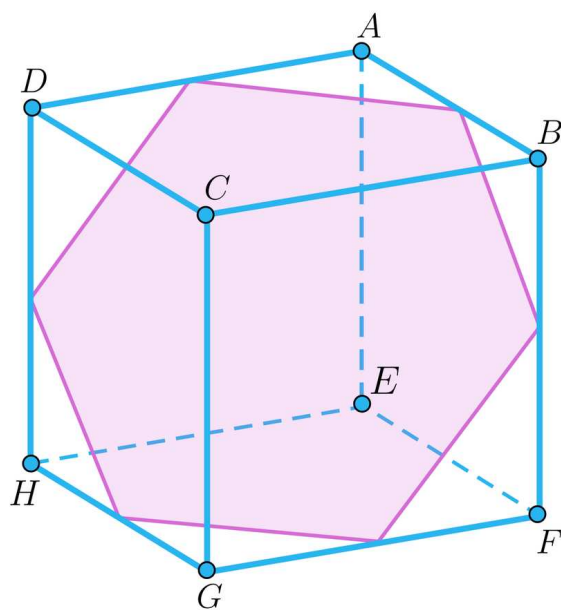


Przykład 5

Sprawdź, czy istnieje przekrój sześcianu w kształcie sześciokąta foremnego.

Rozwiązanie

Przekrój sześciokątny przechodzący przez środki krawędzi AD , AB , BF , FG , GH , HD na rysunku poniżej jest sześciokątem foremnym. Wszystkie boki tego sześciokąta mają długość $\frac{|AB|\sqrt{2}}{2}$.



Słownik

przekrój bryły

figura płaska, która powstaje przez przecięcie bryły płaszczyzną – jest to część wspólna bryły i płaszczyzny

Aplet

Polecenie 1

Poruszając suwakami, zmieniaj położenie płaszczyzny i zaobserwuj zmianę kształtu przekroju sześcianu. Jaki kształt może mieć przekrój sześcianu?

Polecenie 2

Spróbuj ustawić płaszczyznę tak, aby przekrój był kwadratem, prostokątem, sześciokątem foremnym.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



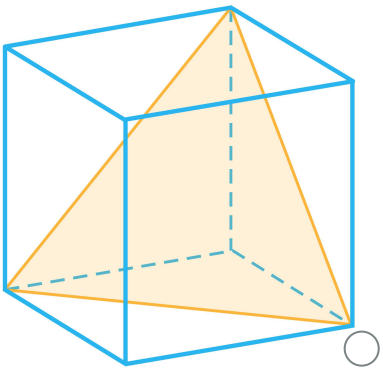
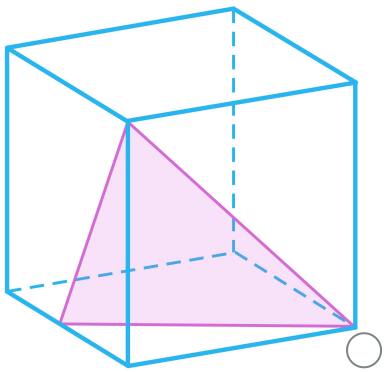
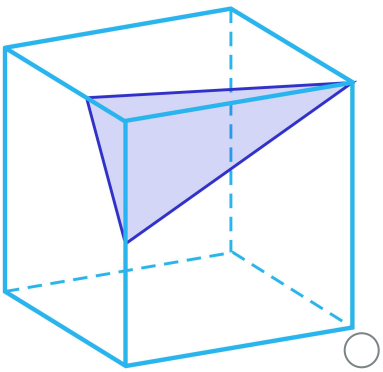
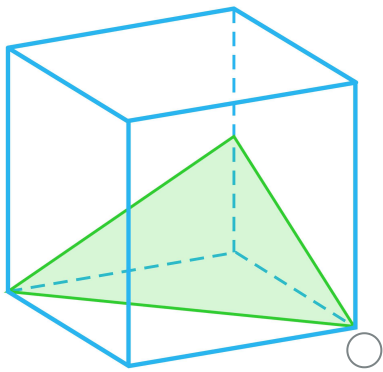
Ustal, czy podane zdania są prawdziwe, czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Przekrój sześcianu może być dowolnym trójkątem.	☐	☐
Istnieje przekrój sześcianu, który jest trapezem równoramiennym.	☐	☐
Każdy przekrój czworokątny sześcianu jest trapezem.	☐	☐
Przekrój sześcianu może być dowolnym wielokątem.	☐	☐

Ćwiczenie 2



Który z poniższych przekrojów jest trójkątem różnobocznym?



Ćwiczenie 3



Przekrój sześcianu, którego jeden z boków jest krawędzią sześcianu, jest

☐ równoległobokiem, który nie jest prostokątem

☐ rombem, który nie jest kwadratem

☐ prostokątem

☐ kwadratem

Ćwiczenie 4



Wybierz wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Przekrój, którego jednym z boków jest przekątna ściany, może być

☐ trójkątem

☐ pięciokątem

☐ trapezem

☐ prostokątem

Ćwiczenie 5



1) Wierzchołkami przekroju mogą być co najwyżej wierzchołki sześcianu.

2) Jeżeli przetniemy przekrój wzdłuż przekątnej ściany, w taki sposób, że powstanie trójkąt, którego wierzchołkami są wierzchołki sześcianu to jego bokami będą .

3) Sześcian nie ma przekroju, który jest .

3

4

przekątne ścian

krawędzie

przekątne sześcianu

sześciokątem foremnym

pięciokątem foremnym

2

kwadratem

Ćwiczenie 6



Sześcian przecięto płaszczyzną prostopadłą do przekątnej sześcianu przechodzącą przez środki niektórych krawędzi sześcianu. Jaką figurą może być przekrój? Wybierz wszystkie poprawne odpowiedzi.

☐

kwadratem

☐

rombem

☐

sześciokątem foremnym

☐

trójkątem równobocznym

Ćwiczenie 7

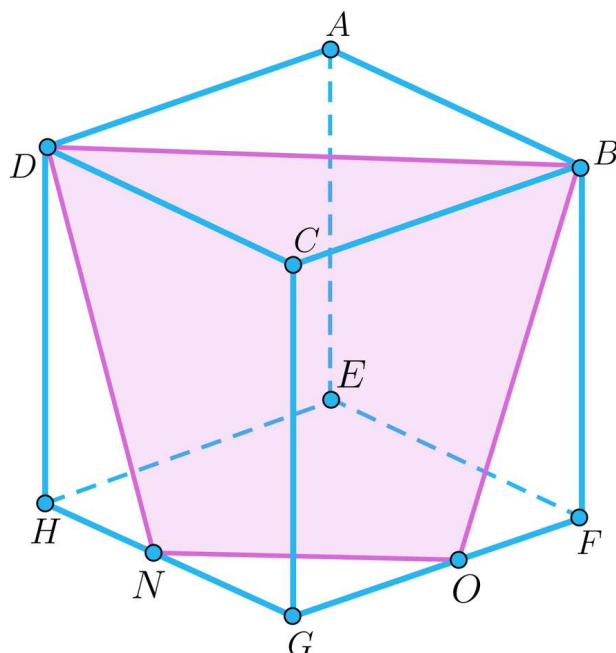


Sześcian $ABCD A' B' C' D'$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną $B' D'$ górnej podstawy i wierzchołek C dolnej podstawy. Jaki kształt będzie mieć otrzymany przekrój? Oblicz obwód tego przekroju, wiedząc, że krawędź ma długość 6.

Ćwiczenie 8



Oblicz obwód przekroju, którego wierzchołki D i B są wierzchołkami sześcianu o krawędzi 6 a wierzchołki N i O dzielą krawędzie na dwie równe części, jak na rysunku.



Dla nauczyciela

Autor: Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekroje sześcianu

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Poziom rozszerzony

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje przekroje w sześcianie,
- nazywa przekroje w sześcianie,
- klasyfikuje przekroje sześcianu,
- sprawdza czy wielokąt może być przekrojem sześcianu.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody pracy:

- burza mózgów,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

Środki dydaktyczne:

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- przezroczyste modele sześciąt z zaznaczonymi odcinkami, przekrojami.

Przebieg lekcji:**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom przekrój bryły w kontekście rzeczywistym a następnie definiuje przekrój w sposób intuicyjny i matematyczny.
2. Nauczyciel prosi uczniów o zastanowienie się jaki kształt może mieć przekrój sześcianu.
3. Podczas burzy mózgów uczniowie wymieniają figury, które, ich zdaniem, mogą być przekrojem sześcianu i wyłaniają zbiór takich wielokątów.
4. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje przekroje sześcianu w sekcji Aplet lub, jeśli jest taka możliwość, uczniowie sami wprawiają w ruch animację na dostępnym sprzęcie.
2. Nauczyciel wraz z uczniami analizują kolejne odpowiedzi wyłonione w burzy mózgów – uczniowie lub nauczyciel próbują otrzymać w animacji przekrój w kształcie wszystkich wymienionych figur.
3. Nauczyciel wraz z uczniami dyskutują nad figurami, które zostały wymienione, a nie udało się otrzymać przekroju w tym kształcie oraz analizują, jakie kształty udało się otrzymać, a nie zostały wymienione.
4. Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia z sekcji Sprawdź się.
5. Nauczyciel prezentuje odpowiedzi. Uczniowie dyskutują nad otrzymanymi wynikami – jeśli pojawiły się błędy, dokonują analizy i wyjaśniają, co jest ich przyczyną.
6. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy zadania otwarte z sekcji Sprawdź się.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel wraz z uczniami przypominają, jaką figurą może być przekrój sześcianu.
2. Nauczyciel zwraca uwagę na szczególne przekroje w sześcianie np. sześciokąt foremny, trójkąt równoboczny, którego bokami są przekątne ścian, prostokąt, którego bokami są krawędzie sześcianu i przekątne ścian.

3. Uczniowie wskazują, co w lekcji było dla nich najtrudniejsze.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest analiza przykładów zawartych w sekcji Przeczytaj i sporządzenie notatki w zeszycie.

Dla chętnych: Wykonać model sześcianu z zaznaczonym wybranym przekrojem lub dwóch brył, które powstaną po przecięciu sześcianu płaszczyzną i złożyć się w sześcian.

Materiały pomocnicze:

[Własności sześcianów i prostopadłościanów](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać aplet w domu jako utrwalenie materiału.