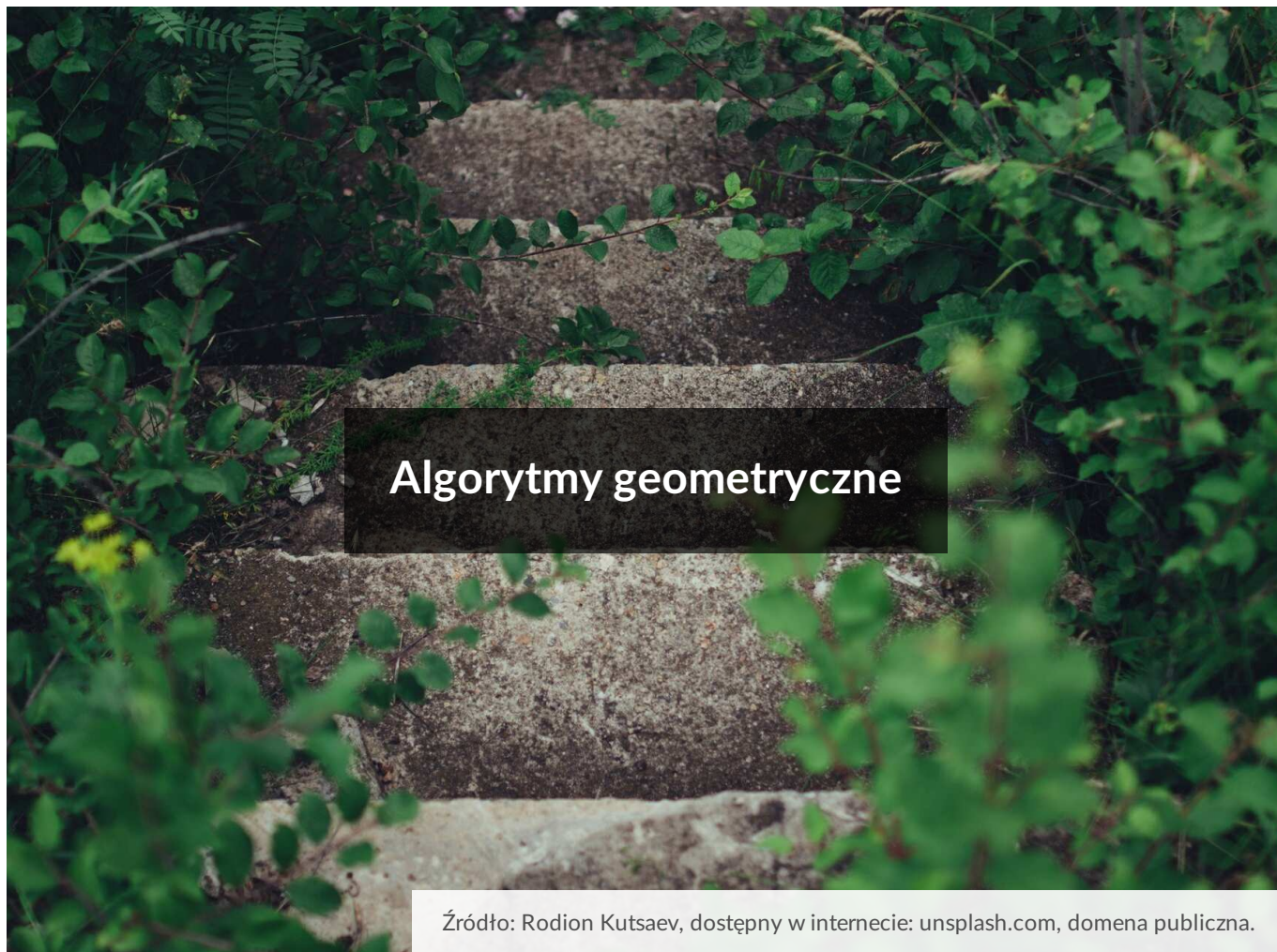




Algorytmy geometryczne

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Algorytmy geometryczne

Źródło: Rodion Kutsaev, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Wyobraźmy sobie sytuację, w której musimy sprawdzić, czy punkt należy do wnętrza kwadratu. Mając przed sobą rysunek figury i zaznaczony na nim punkt, bez trudu odpowiemy na to pytanie.

Jak w takiej sytuacji poradzi sobie komputer? Brakuje mu zdolności, by stwierdzić to „na pierwszy rzut oka” – będzie musiał wykonać serię obliczeń, a następnie poprawnie zinterpretować ich wyniki.

W tym e-materiale poznasz kilka najpowszechniejszych algorytmów związanych z problemami geometrycznymi. Algorytmy geometryczne stosuje się w wielu dziedzinach informatyki – od programowania gier komputerowych po tworzenie zaawansowanych symulacji fizycznych.

Podobne zagadnienia znajdziesz w e-materiałach:

- Schematy rozgałęzione i algorytmy złożone,
- Proste algorytmy rozgałęzione,
- Czy algorytm jest poprawny?,
- Schematy rozgałęzione i algorytmy złożone – zadania maturalne.

Twoje cele

- Przeanalizujesz pojęcie geometrii analitycznej i zdefiniujesz przedmiot badań geometrycznych.
- Prześledzisz, czy punkt zdefiniowany za pomocą dwóch liczb leży na dowolnej prostej opisanej równaniem lub dwoma innymi punktami.
- Opiszesz zasadę działania uniwersalnego algorytmu sprawdzającego, czy punkt należy do wielokąta wypukłego.

Przeczytaj

Definicja geometrii analitycznej

Rozmawiając o algorytmach geometrycznych, nie sposób pominąć [geometrii analitycznej](#). Jest to dział geometrii, który zajmuje się figurami geometrycznymi umieszczonymi w układzie współrzędnych.

Więcej informacji na temat geometrii analitycznej znajdziesz w e-materiale [Punkty na płaszczyźnie z układem współrzędnych](#) oraz w innych e-materiałach oznaczonych tagiem „geometria analityczna” na platformie [zpe.gov.pl](#).

Wykorzystanie geometrii analitycznej w algorytmach

Przynależność punktu do prostej opisanej równaniem

Zacznijmy od jednego z prostszych algorytmów – sprawdzenia, czy punkt należy do prostej. Zauważ, że prosta leżąca na płaszczyźnie to zbiór punktów spełniających pewne równanie. Wyróżnić możemy kilka równań prostych. Jednym z nich jest równanie kierunkowe, którego wzór możemy zapisać jako:

$$y = ax + b$$

gdzie:

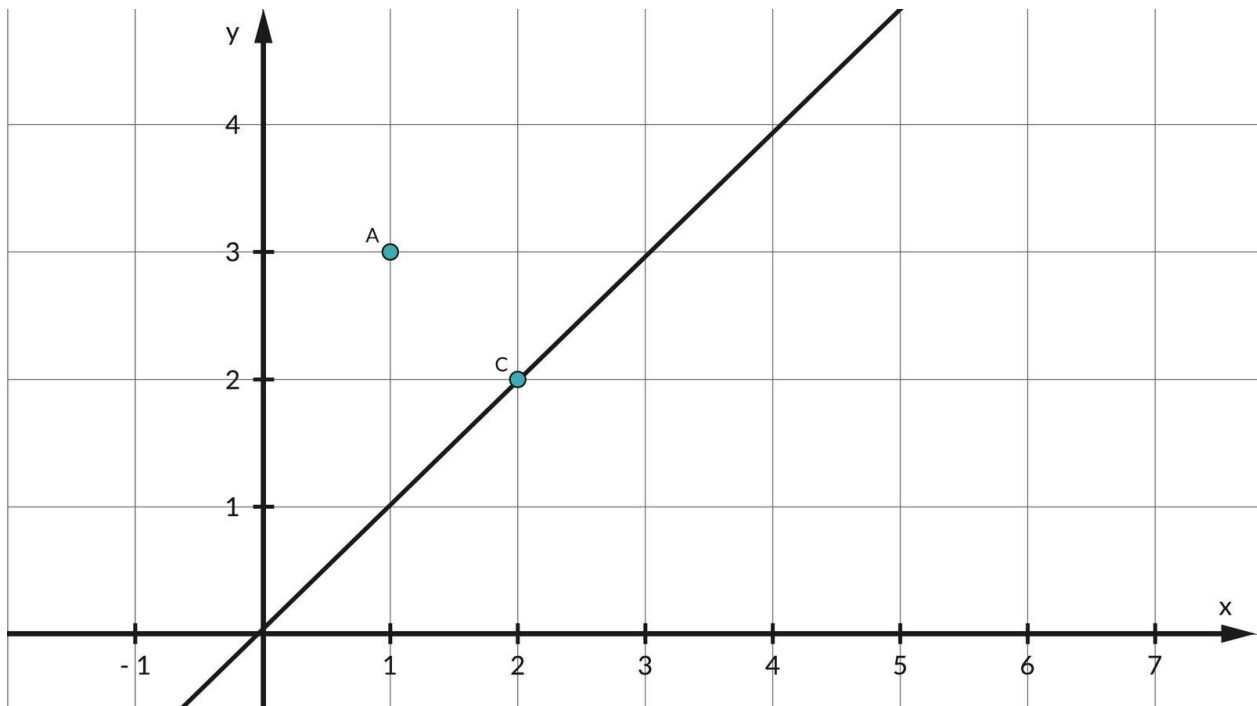
- a to współczynnik kierunkowy;
- b to wyraz wolny.

Aby sprawdzić, czy dany punkt leży na prostej, należy sprawdzić, czy po podstawieniu jego współrzędnych do równania prostej, równanie będzie spełnione.

Jeśli prosta jest równoległa do osi y , korzystamy ze wzoru $x = b$, gdzie b to pewna stała.

Rozważmy następującą sytuację.

Prosta opisana jest równaniem $y = x$. Dane są również punkty $A = (1, 3)$ oraz $C = (2, 2)$. Sprawdźmy, czy punkty leżą na prostej.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Podstawiamy współrzędne punktu A do równania prostej i otrzymujemy:

$$3 = 1$$

Równanie jest sprzeczne. Zatem punkt ten nie leży na prostej.

Sprawdźmy teraz, jak sytuacja wygląda w przypadku punktu C . Podstawiamy współrzędne do wzoru funkcji:

$$2 = 2$$

Zachodzi równanie, zatem punkt C leży na prostej.

By sprawdzić, czy punkt $A(x, y)$ należy do prostej $x = b$, wystarczy sprawdzić, czy współrzędna x punktu A jest równa b .

Warunek współliniowości punktów umieszczonych w układzie współrzędnych

Jak sprawdzić, czy dane trzy punkty leżą na jednej prostej?

Wykorzystamy **współliniowość punktów**.

Ważne!

Punkty nazywamy współliniowymi wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na jednej prostej.

Załóżmy, że mamy trzy punkty opisane następującymi współrzędnymi:

$$A = (x_a, y_a); B = (x_b, y_b); C = (x_c, y_c).$$

Z lekcji matematyki wiemy, że warunek współliniowości trzech punktów wygląda następująco:

$$(x_b - x_a)(y_c - y_a) = (y_b - y_a)(x_c - x_a)$$

Ważne!

Więcej na temat współliniowości punktów znajdziesz w e-materiale [Współliniowość punktów](#).

Dane są trzy punkty A , B i C .

Współrzędne punktów: $A = (5, 11)$; $B = (1, 3)$; $C = (7, 15)$. By sprawdzić, czy punkty leżą na jednej prostej, podstawmy odpowiednie wartości do wzoru.

$$(1 - 5)(15 - 11) = (3 - 11)(7 - 5)$$

$$-4 \cdot 4 = -8 \cdot 2$$

$$-16 = -16$$

Równanie jest spełnione, zatem te trzy punkty są współliniowe.

Uwaga!

Jeżeli chcemy sprawdzić, czy dana liczba punktów jest współliniowa, wybieramy dowolne dwa, a następnie dla każdego z pozostałych punktów sprawdzamy warunek współliniowości z dwoma wybranymi.

Przynależność punktu do odcinka

Dany jest odcinek o końcach w punktach: $A = (x_a, y_a)$; $B = (x_b, y_b)$. Aby sprawdzić, czy dany punkt $C = (x_c, y_c)$ należy do tego odcinka, możemy wykorzystać równanie prostej przechodzącej przez punkty:

$$x_b * y + x_a * y_a + x * y_a - x_a * y - x_b * y_a - x * y_b = 0$$

Jeżeli po podstawieniu do równania współrzędnych punktu C równanie jest spełnione, punkt C leży na prostej zawierającej odcinek $|AB|$.

By punkt C należał do odcinka $|AB|$, spełnione muszą być również następujące założenia:

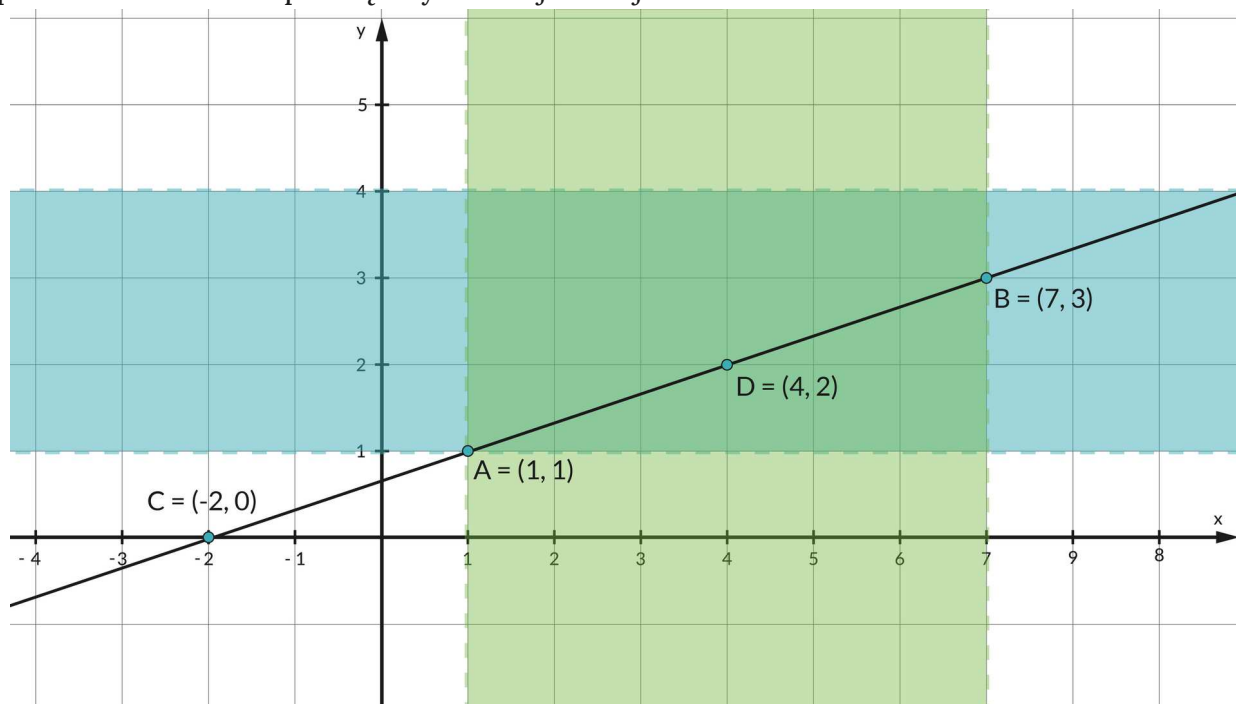
- $x_c \geq \min(x_a; x_b)$
- $x_c \leq \max(x_a; x_b)$
- $y_c \geq \min(y_a; y_b)$
- $y_c \leq \max(y_a; y_b)$

Możemy zatem zauważyć, że położenie jednego punktu wobec dwóch innych punktów, które wyznaczają dany odcinek, może być następujące:

1. Punkt C leży na jednej prostej z punktami A i B oraz należy do odcinka.
2. Punkt C leży na jednej prostej z punktami A i B , ale nie należy do odcinka.
3. Punkt C nie leży na jednej prostej z punktami A i B i nie należy do odcinka.

Uwaga!

Można również sprawdzić tylko wybraną ze współrzędnych, jednak wówczas należy dodatkowo zbadać, czy dany odcinek nie jest równoległy do osi OX lub OY . W przypadku sprawdzenia obu współrzędnych nie jest to już konieczne.



Wszystkie punkty współliniowe z punktami A i B , których współrzędne x oraz y zawierają się między współrzędnymi x oraz y punktów A i B należą do odcinka AB (np. punkt D). W przypadku punktów liniowych z punktami A i B , których współrzędne x oraz y nie zawierają się między współrzędnymi x oraz y punktów A i B , nie należą do odcinka (np. punkt C).

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przynależność punktu do okręgu lub koła

Równanie okręgu w układzie współrzędnych o środku w punkcie $O = (a, b)$ oraz promieniu r wygląda następująco:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Nierówność koła wygląda następująco:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$$

Aby sprawdzić, czy dany punkt należy do okręgu, wystarczy zatem sprawdzić, czy spełnione jest dla niego równanie okręgu. Możemy również zbadać, czy punkt leży wewnątrz koła, podstawiając współrzędne punktu do nierówności koła.

Przećwiczmy to na przykładzie:

Dane są punkty $(5, 10)$, $(1, 5)$, $(7, 8)$. Należy sprawdzić, które z nich leżą wewnątrz koła lub na okręgu o środku w punkcie $O = (3, 5)$ oraz promieniu $r = 5$.

Napiszmy najpierw nierówność koła:

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 \leq 25$$

Podstawiamy współrzędne pierwszego punktu do nierówności koła:

$$(5 - 3)^2 + (10 - 5)^2 \leq 25$$

$$2^2 + 5^2 \leq 25$$

$$4 + 25 \leq 25$$

$$29 \leq 25$$

Otrzymaliśmy nieprawdę, zatem pierwszy punkt nie leży wewnątrz koła.

Sprawdźmy drugi punkt:

$$(1 - 3)^2 + (5 - 5)^2 \leq 25$$

$$(-2)^2 + 0^2 \leq 25$$

$$4 + 0 \leq 25$$

$$4 \leq 25$$

Otrzymaliśmy prawdę, drugi punkt należy do koła.

Sprawdzamy trzeci punkt: $(7 - 3)^2 + (8 - 5)^2 \leq 25$

$$4^2 + 3^2 \leq 25$$

$$16 + 9 \leq 25$$

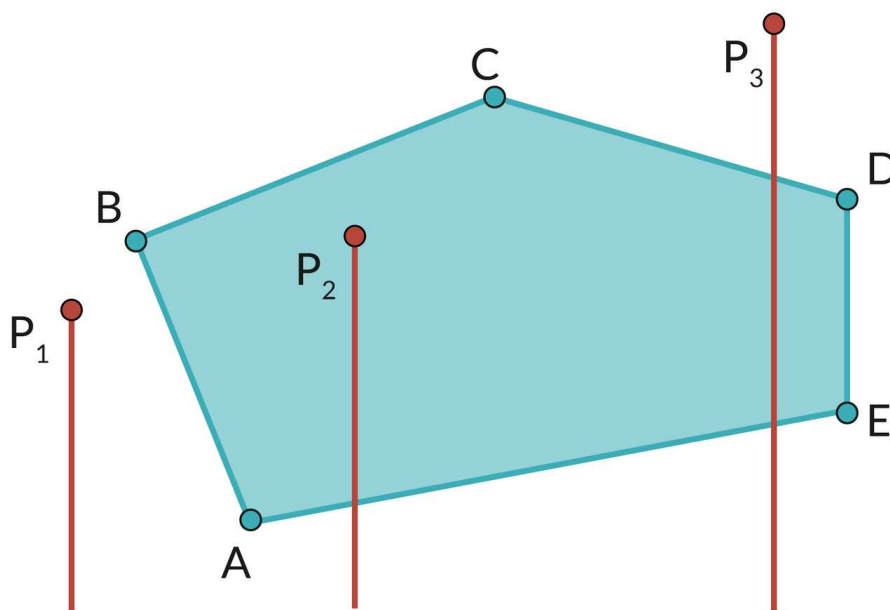
$$25 \leq 25$$

Nierówność jest spełniona, zatem punkt leży wewnątrz koła. Ponieważ zachodzi równość, możemy od razu stwierdzić, że punkt leży na okręgu.

Przynależność punktu do wielokąta wypukłego

Odpowiedzmy teraz na pytanie zawarte we wstępie do tego e-materiału: jak sprawdzić, czy punkt należy do [wielokąta wypukłego](#)

Zacznijmy od przywołania pewnej własności.

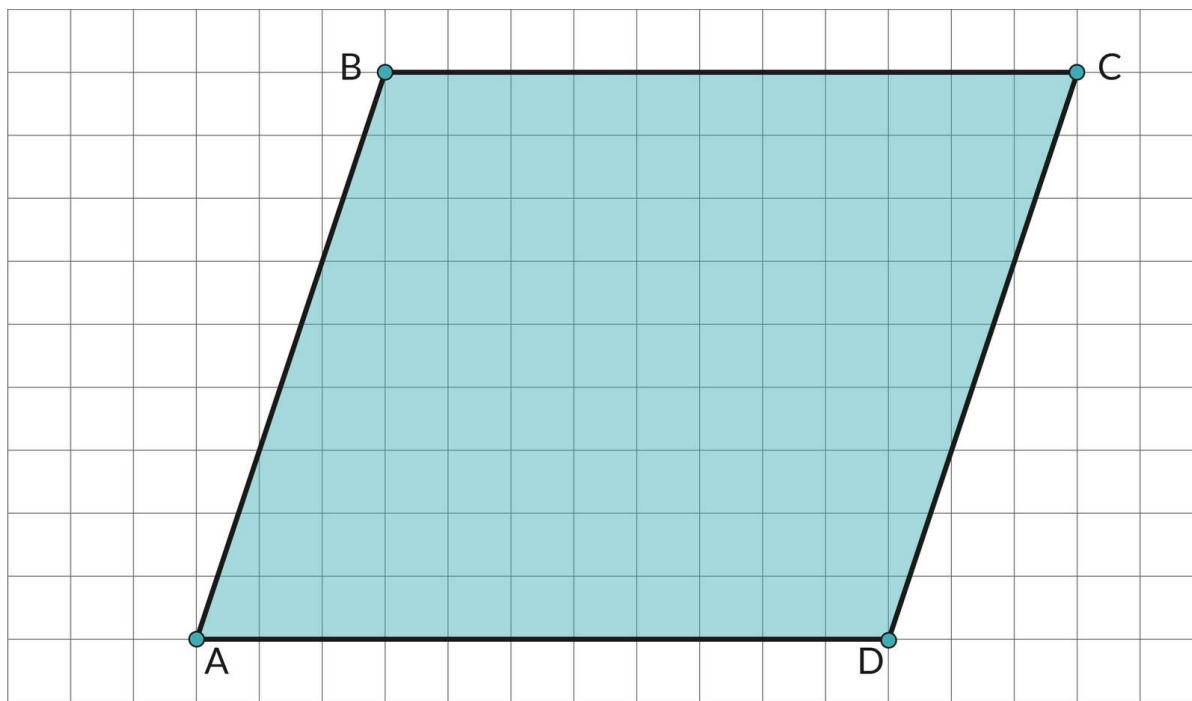


Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Co łączy wszystkie punkty leżące poza wielokątem? Jeśli poprowadzimy półproste z każdego punktu w dowolnym kierunku (np. w dół), to liczba ich przecięć z bokami wielokąta jest **parzysta** (zero traktujemy jako liczbę parzystą). Półproste wychodzące z punktów leżących w środku wielokąta przecinają jego boki **nieparzystą** liczbę razy.

Możemy wykorzystać ten fakt do stworzenia algorytmu, który na podstawie liczby tych przecięć określi, czy dany punkt $P = (x_p, y_p)$ należy do wielokąta, czy leży poza nim.

Ustalmy, jak będziemy definiowali nasz wielokąt. Rozpatrzmy to na przykładzie równoległoboku.

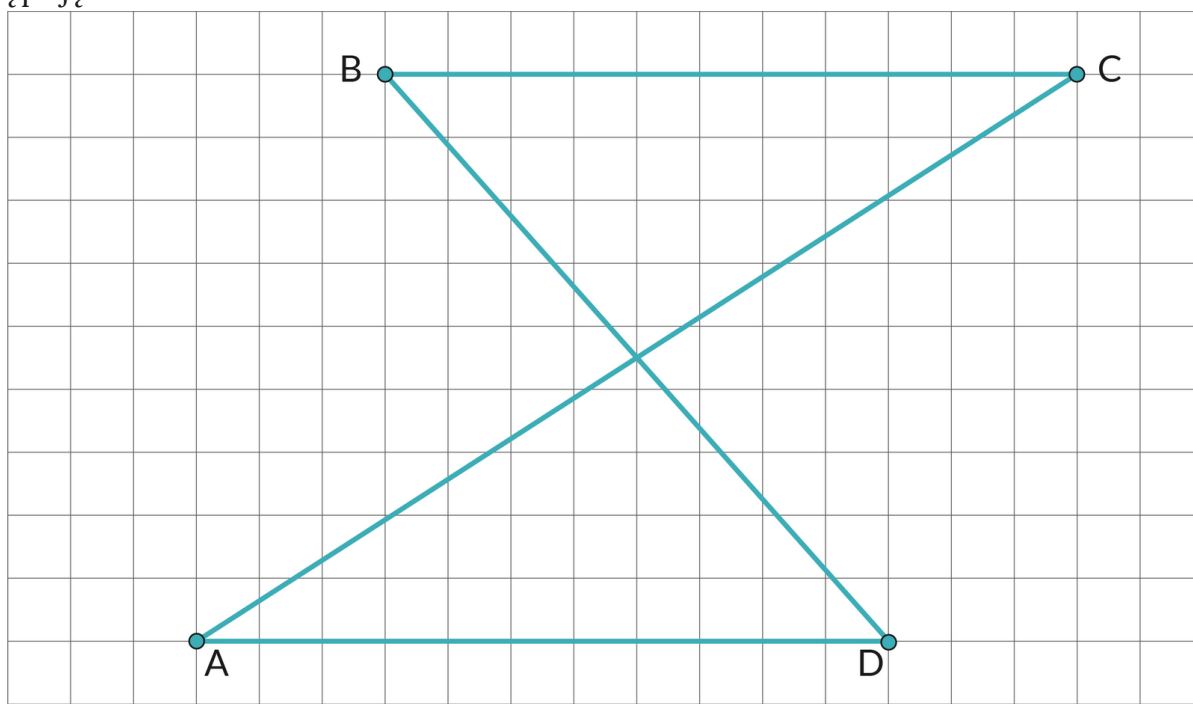


Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Każdy rozpatrywany przez nas wielokąt będzie **uporządkowaną listą kolejnych jego wierzchołków**. Oznacza to, że przedstawiony na rysunku wielokąt zapiszemy jako: A, B, C, D .

Uwaga!

Lista wierzchołków musi być podana w kolejności zgodnej z kierunkiem ruchu wskazówek zegara albo w przeciwniej. Dla kolejności: A, C, B, D wielokąt wyglądałby następująco:



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

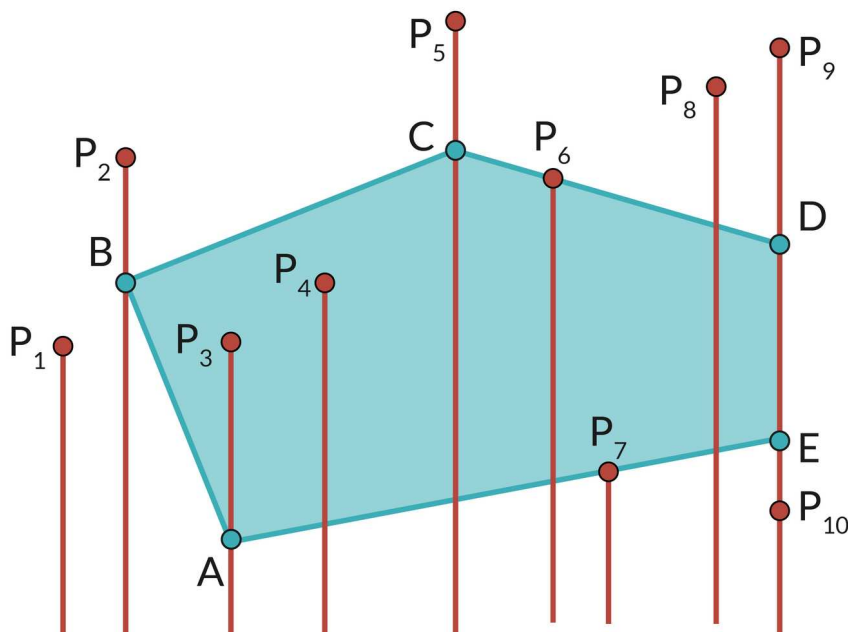
Wówczas algorytm mógłby dać nieoczekiwany rezultat.

Przed przystąpieniem do budowy algorytmu, warto omówić parę problematycznych sytuacji, które należy rozwiązać osobno. Zanim jednak do nich przejdziemy, musimy zdecydować się na wybór równania oraz zwrotu półprostej, której użyjemy do wyznaczenia przecięć. Możemy przypuszczać, że gdy wybrana półprosta będzie prostopadła lub równoległa do osi układu współrzędnych, tworzenie algorytmu będzie prostsze. Przypuszczenia te są uzasadnione, dlatego na potrzeby naszych rozważań została wybrana półprosta równoległa do osi OY, zwrócona w dół. Jej równanie jest następujące:

$$x = x_p$$

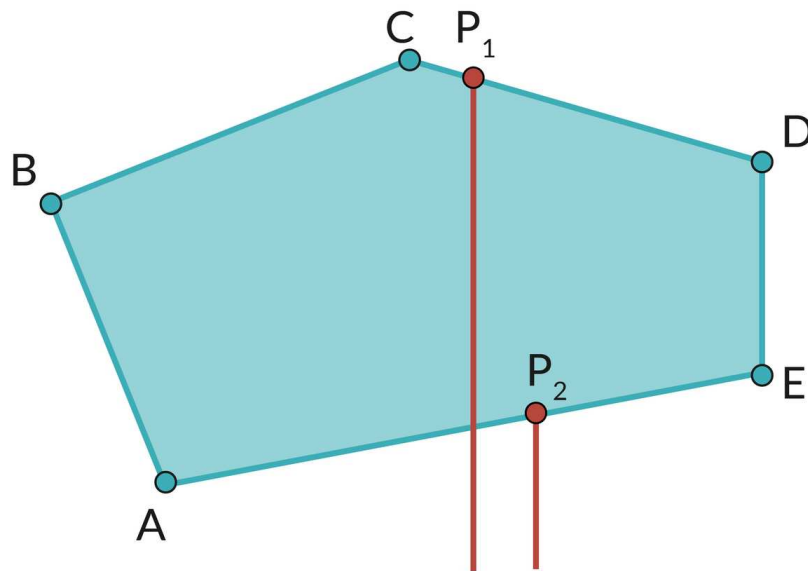
Zwrot w dół powoduje, że rozpatrywana będzie ona dla wartości $y < y_p$.

Oto rysunek, na którym ukazano niektóre przypadki, z jakimi możemy się spotkać:



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Pierwszy problematyczny przypadek to taki, w którym punkt P będzie leżał na bokach wielokąta (również jeśli będzie wierzchołkiem).



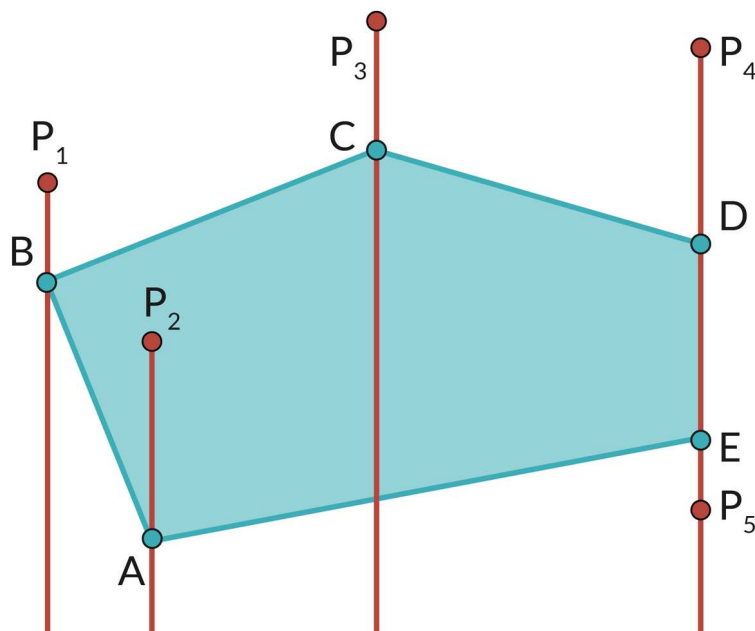
Półprosta poprowadzona z punktu P_1 przecina boki wielokąta parzystą liczbę razy. Półprosta poprowadzona z punktu P_2 przecina boki wielokąta nieparzystą liczbę razy. Według wprowadzonej reguły punkt P_1 zostałby uznany za nienależący do wielokąta, a punkt P_2 za należący. Przypadek ten należy rozpatrzyć oddzielnie.

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

W celu wyeliminowania tego przypadku, należy sprawdzić przynależność punktu P do każdego z boków wielokąta przed przystąpieniem do głównej części algorytmu.

Zagadnienie to zostało omówione powyżej w akapicie zatytułowanym „Przynależność punktu do odcinka”. Jeśli punkt P leży na boku wielokąta, możemy od razu stwierdzić, że należy do tego wielokąta.

Drugi przypadek to taki, gdy wybrana półprosta przetnie wielokąt w punkcie, który będzie równocześnie wierzchołkiem wielokąta. Niestety, przypadek ten jest trochę bardziej skomplikowany, ponieważ zawiera w sobie sytuację brzegową, którą należy zidentyfikować.



Przecięcie półprostej poprowadzonej z punktu P_2 mogłoby zostać policzone podwójnie – raz dla krawędzi AB, drugi raz dla krawędzi EA. Aby temu zapobiec, możemy założyć, że każdy wierzchołek należy tylko do jednej krawędzi wielokąta. Przykładowo: wierzchołek A należy do krawędzi AB, jednak nie należy do krawędzi EA. Rozwiązanie to nie zadziała jednak w przypadku punktów objętych sytuacją brzegową.

Sytuacja brzegowa ma miejsce wówczas, gdy wybrana półprosta przechodzi przez wierzchołek najbardziej wysunięty w stronę ujemnych lub dodatnich wartości x . Na rysunku będą to zatem punkty P_1 , P_4 , oraz P_5 . Wykluczaliśmy już sytuację, w której punkt P leży na krawędzi wielokąta. Jeśli wykryjemy, że punkt ten ma taką samą współrzędną x -ową co najbardziej wysunięte w lewo lub prawo punkty wielokąta, możemy od razu stwierdzić, że nie należy on do wielokąta. Musimy w tym celu sprawdzić, jaki jest zakres zajmowanych przez wielokąt współrzędnych. Wyszukujemy dwie wartości:

- $x_{\max}$ – maksymalną wartość pierwszej współrzędnej (x) wierzchołków wielokąta,
- $x_{\min}$ – minimalną wartość pierwszej współrzędnej (x) wierzchołków wielokąta.

Następnie sprawdzamy, czy $x_p = x_{\max}$ lub $x_p = x_{\min}$. Jeśli warunek jest spełniony, punkt P nie leży wewnątrz wielokąta.

Rozwiązaliśmy wszystkie problematyczne sytuacje, zatem teraz możemy już przejść do głównej części algorytmu.

1. Narysuj półprostą wychodzącą z punktu, który sprawdzamy.
2. Przejdź po wszystkich krawędziach wielokąta i policz, ile z nich przecina narysowana w pierwszym kroku półprosta. W tym kroku pamiętamy, że przecięcie uznajemy, jeśli wypadło w pierwszym punkcie krawędzi, a nie uznajemy, jeśli wypadło w drugim punkcie.
3. Jeżeli policzona liczba jest parzysta, punkt leży poza wielokątem. W przeciwnym wypadku punkt należy do tego wielokąta.

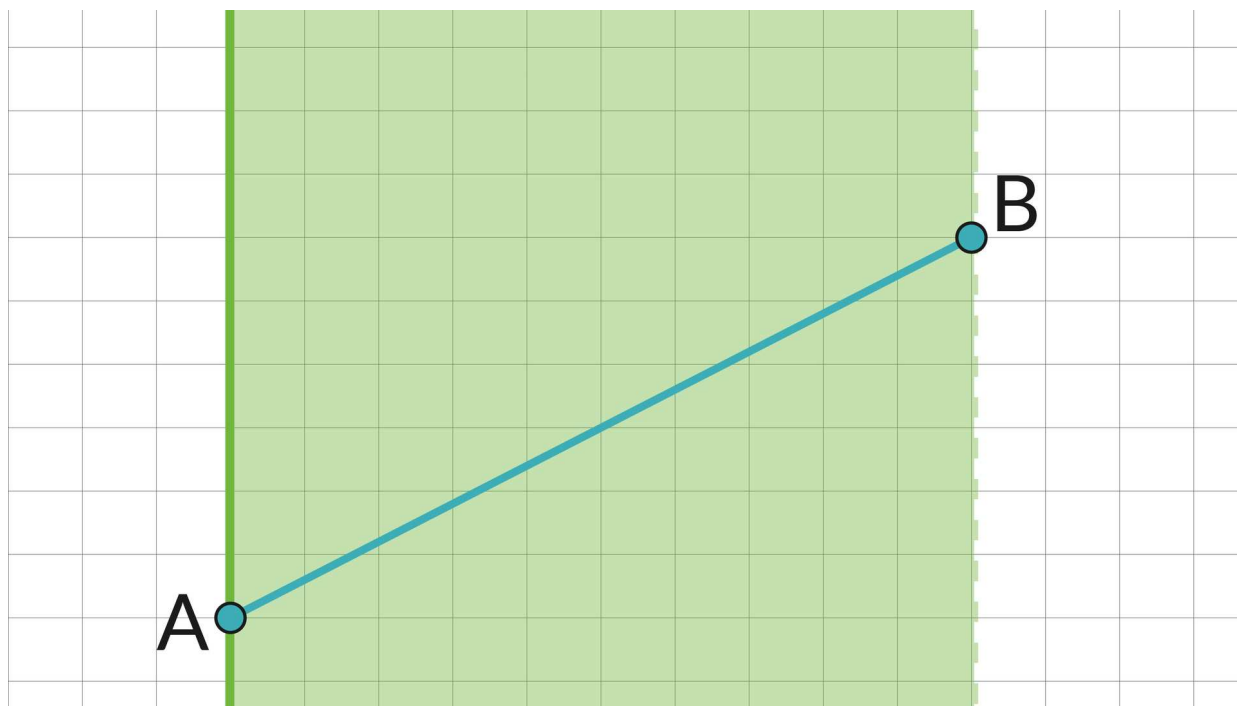
Pozostaje tylko pytanie: jak sprawdzimy, czy półprosta przecina daną krawędź wielokąta?

Oznaczmy sprawdzaną krawędź jako parę punktów (A, B) , gdzie $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$.

Należy tu skorzystać z dwóch warunków.

Pierwszy z nich będzie sprawdzał, czy pierwsza współrzędna (x) punktu P zawiera się między pierwszymi współrzędnymi krańców rozpatrywanej krawędzi. Dopuszczalna jest sytuacja, w której x_p jest równe x_a , jednak nie może być równe x_b . Możliwe są dwie sytuacje:

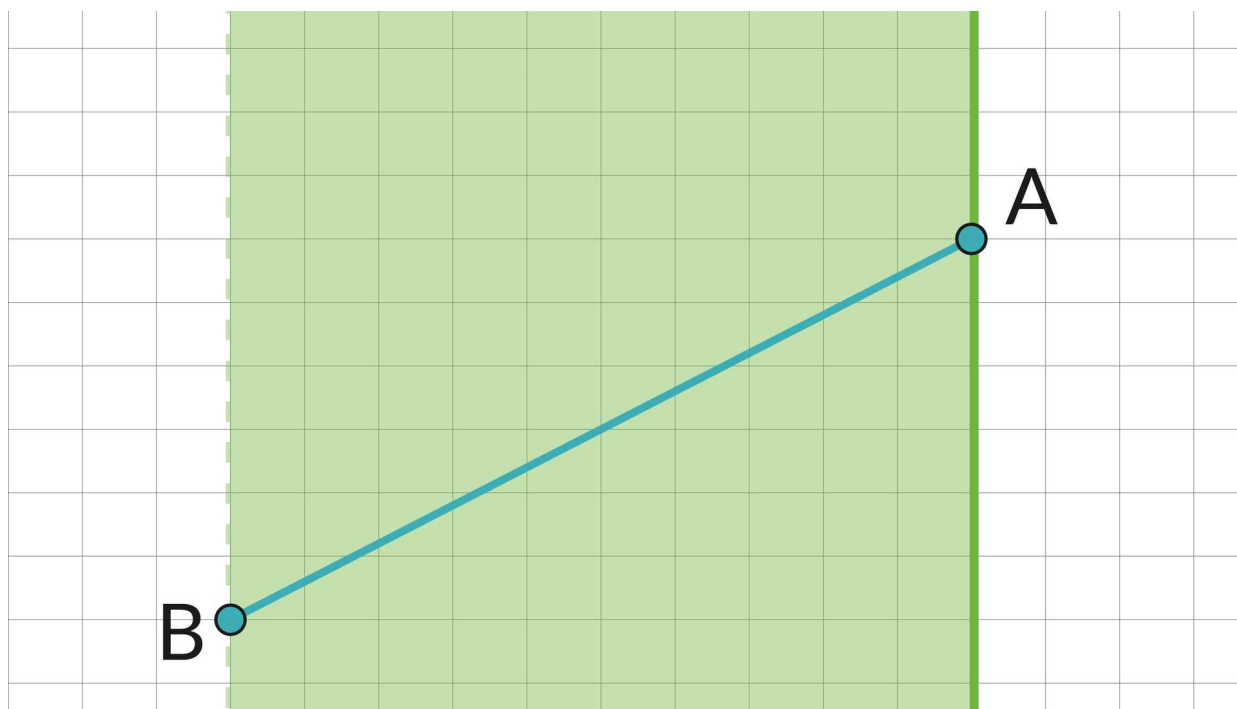
$$x_a \leq x_p < x_b$$



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

lub

$$x_a \geq x_p > x_b$$



Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Drugi warunek, który ma być spełniony, powinien sprawdzać, czy punkt P jest położony nad odcinkiem AB . Oznacza to, że y_p musi być większe niż wartość prostej AB w punkcie x_p .

Odwołując się do wiedzy z lekcji matematyki, możemy wyprowadzić równanie prostej AB :

$$AB: f(x) = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}(x - x_a) + y_a$$

Zatem ostateczna postać tego warunku to:

$$y_p > \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}(x_p - x_a) + y_a$$

Uwaga!

Przypadek, w którym prosta AB nie jest funkcją (czyli gdy $x_a = x_b$), nie musi być rozpatrywany. W przypadku wielokąta wypukłego możliwe jest to tylko wtedy, gdy wierzchołki A i B są najbardziej wysuniętymi w lewo lub prawo wierzchołkami. Sytuacja taka została sprawdzona wcześniej.

Przypadek, gdy zachodzi równość powyższej nierówności, został wyeliminowany przez wcześniejsze sprawdzenie, czy punkt P leży na krawędziach wielokąta.

Jeżeli spełnione są jednocześnie oba warunki, wiemy, że półprosta przetnie bok wielokąta. Przedstawmy zatem algorytm w całości w postaci pseudokodu:

Specyfikacja problemu:

Dane:

- n – liczba wierzchołków wielokąta
- $\text{tab}[1..n][1..2]$ – tablica uporządkowanych wierzchołków wielokąta; każdy wierzchołek jest reprezentowany przez tablicę dwóch liczb zmiennoprzecinkowych, z których pierwsza oznacza pierwszą współrzędną (x), a druga – drugą współrzędną (y)
- $P[1, 2]$ – sprawdzany punkt; tablica dwóch liczb zmiennoprzecinkowych, z których pierwsza oznacza pierwszą współrzędną (x), a druga – drugą współrzędną (y)

Wynik:

Program wypisuje, czy dany punkt P zawiera się wewnątrz wielokąta, czy nie.

```
1 funkcja czy_punkty_są_współliniowe(A[1..2], B[1..2], C[1..2])
2     jeżeli (B[1] - A[1]) * (C[2] - A[2]) = (B[2] - A[2]) * (C[1]
3         zwróć prawda
4     zwróć fałsz
5
```

```

6 funkcja czy_punkt_należy_do_krawędzi(P[1..2], A[1..2], B[1..2])
7   jeżeli czy_punkty_są_współliniowe(P, A, B):
8       jeżeli (A[1] <= P[1] oraz P[1] <= B[1]) lub (A[1] >= P[1]
9           jeżeli (A[2] <= P[2] oraz P[2] <= B[2]) lub (A[2] >=
10               zwróć prawda
11   zwróć fałsz
12
13 funkcja czy_półprosta_przecina_krawędź(P[1..2], A[1..2], B[1..2])
14   // pierwszy warunek
15   jeżeli (A[1] <= P[1] oraz P[1] < B[1]) lub (A[1] >= P[1] oraz
16       // drugi warunek
17       jeżeli P[2] > (A[2] - B[2]) / (A[1] - B[1]) * (P[1] - A[1]
18           zwróć prawda
19   zwróć fałsz
20
21 // sprawdź, czy punkt P leży na krawędziach wielokąta
22 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj:
23     pierwszy_wierzchołek ← tab[i]
24     jeżeli i = n:
25         drugi_wierzchołek ← tab[1]
26     w przeciwnym wypadku:
27         drugi_wierzchołek ← tab[i + 1]
28
29     jeżeli czy_punkt_należy_do_krawędzi(P, pierwszy_wierzchołek,
30         wypisz "Punkt P należy do wielokąta"
31     zakończ wykonywanie programu
32
33 // sprawdź, czy półprosta przecina wielokąt w najbardziej wysunię
34 max_x ← tab[1][1]
35 min_x ← tab[1][1]
36
37 dla i = 2, 3, ..., n wykonuj:
38     jeżeli tab[i][1] > max_x:
39         max_x ← tab[i][1]
40     w przeciwnym wypadku jeżeli tab[i][1] < min_x:
41         min_x ← tab[i][1]
42
43 jeżeli P[1] = max_x lub P[1] = min_x:
44     wypisz "Punkt P nie należy do wielokąta"
45     zakończ wykonywanie programu
46
47 // policz, ile razy półprosta przecina wielokąt

```

```

48 przecięcia ← 0
49
50 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj:
51     pierwszy_wierzchołek ← tab[i]
52     jeżeli i = n:
53         drugi_wierzchołek ← tab[1]
54     w przeciwnym wypadku:
55         drugi_wierzchołek ← tab[i + 1]
56
57     jeżeli czy_półprosta_przecina_krawędź(P, pierwszy_wierzchołek
58         przecięcia ← przecięcia + 1
59
60 jeżeli przecięcia mod 2 = 0:
61     wypisz "Punkt P nie należy do wielokąta"
62 w przeciwnym wypadku:
63     wypisz "Punkt P należy do wielokąta"
64 zakończ wykonywanie programu

```

Słownik

geometria analityczna

dział geometrii, który zajmuje się opisywaniem i badaniem własności figur opisanych za pomocą równań i wzorów

wielokąt wypukły

wielokąt, którego kąty wewnętrzne są równe lub mniejsze niż 180°

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z symulacją interaktywną. Możesz w niej zmienić położenie punktów wielokąta oraz położenie głównego punktu.

Po uruchomieniu testu przynależności program wykryje, czy punkt należy do wielokąta.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dm7YuHaBW>

Źródło: Contentplus.pl sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Zapisz algorytm, wykorzystując listę kroków.

Polecenie 3

Zastanów się, czy przedstawiony w symulacji algorytm jest odpowiedni w każdym przypadku.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Podaj trzy zastosowania algorytmów geometrycznych.

Ćwiczenie 2



Dana jest prosta o równaniu $2x + 3y + 3 = 0$. Zdecyduj, czy punkt $(-\frac{3}{2}, 0)$ należy do tej prostej.

☐ nie

☐ tak

Ćwiczenie 3



Przez punkty $A(\sqrt{3}, 9)$, $B(1, 3\sqrt{3})$ poprowadzono prostą. Oceń, czy punkt $C(10, 10\sqrt{3})$ należy do tej prostej.

☐ nie

☐ tak

Ćwiczenie 4



Odległość między dwoma punktami oznaczonymi odpowiednio $A(x_a, y_a)$ oraz $B(x_b, y_b)$ możemy opisać wzorem:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Aby sprawdzić, czy punkt należy do koła, konieczne jest ustalenie, czy odległość tego punktu od środka okręgu jest mniejsza lub równa promieniowi koła. Dla punktu C oraz koła o środku w punkcie $O(x_o, y_o)$ i promieniu r daje to nierówność:

$$d(C, O) \leq r.$$

Dane jest koło o środku w punkcie $O(10, 10)$ oraz długości promienia $r = 5$.

Zaznacz wszystkie punkty, które należą do podanego koła.

☐ $D(8, 6)$

☐ $C(10, 10)$

☐ $A(0, 0)$

☐ $E(13, 12)$

☐ $B(5, 5)$

Ćwiczenie 5



Wskaż, która z własności może zostać wykorzystana do napisania algorytmu sprawdzającego, czy z podanych trzech punktów można utworzyć trójkąt.

☐ przynależność punktu do prostej

☐ przynależność punktu do odcinka

☐ twierdzenie sinusów

☐ współliniowość punktów

Ćwiczenie 6



Wskaż, z których trójek punktów można utworzyć trójkąt.

☐ $(2, 5); (2, 1); (2, 2)$

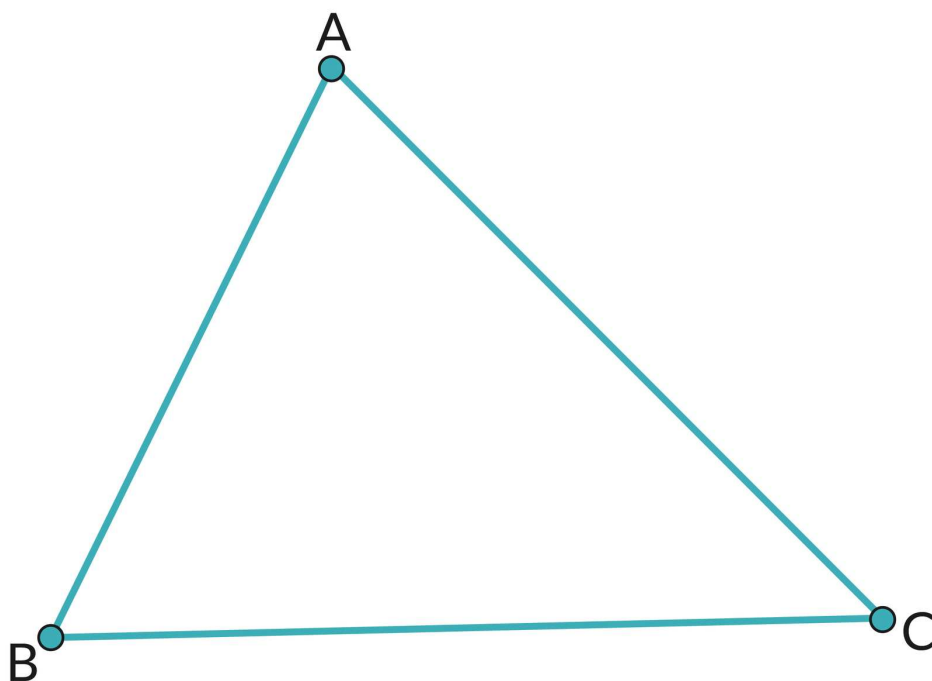
☐ $(1, 0); (1, 1); (2, 1)$

☐ $(0, 0); (1, 1); (2, 2)$

Ćwiczenie 7



Wskaż, która z odpowiedzi nie przedstawia uporządkowanej listy punktów, opisującej trójkąt ABC .



☐ $(C, A); (A, B); (B, C)$

☐ $(B, A); (A, B); (A, C)$

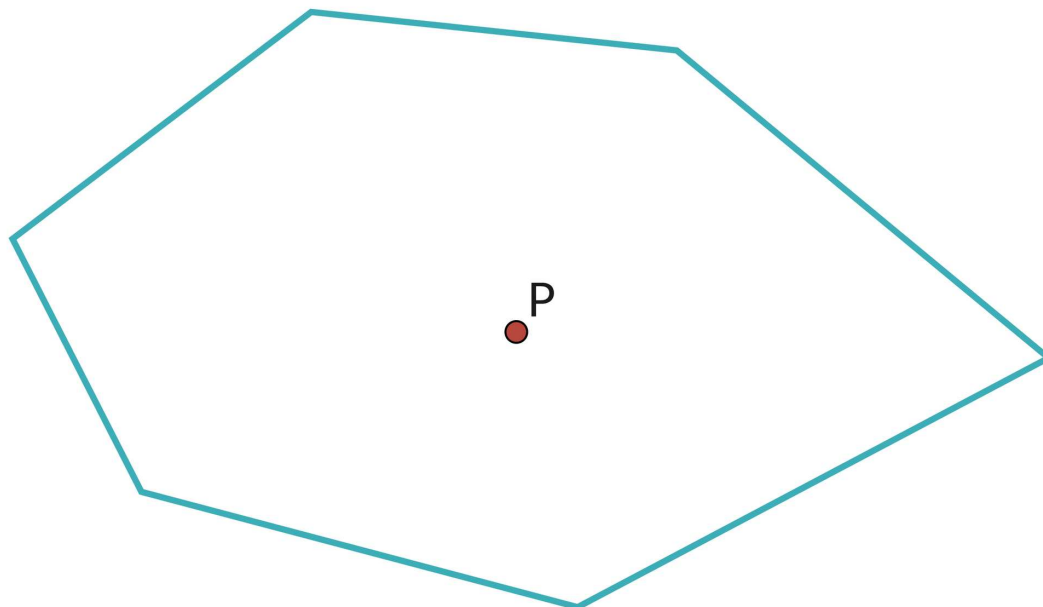
☐ $(A, B); (B, C); (C, A)$

Ćwiczenie 8



Dokończ zdanie.

Jeśli poprowadzimy dowolną półprostą z punktu P, to liczba przecięć każdej z tych półprostych z bokami wielokąta będzie...



☐ nieparzysta.

☐ parzysta.

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Algorytmy geometryczne

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.
- II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

- I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 4) porównuje działanie różnych algorytmów dla wybranego problemu, analizuje algorytmy na podstawie ich gotowych implementacji;
- 5) sprawdza poprawność działania algorytmów dla przykładowych danych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 2) do realizacji rozwiązania problemu dobiera odpowiednią metodę lub technikę algorytmiczną i struktury danych;
- 3) objaśnia dobrany algorytm, uzasadnia poprawność rozwiązania na wybranych przykładach danych i ocenia jego efektywność;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zapisuje za pomocą listy kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

j) badania położenia punktu względem prostej i przynależności punktu do odcinka,

2) wykorzystuje znane sobie algorytmy przy rozwiązywaniu i programowaniu rozwiązań następujących problemów:

e) badania przecinania się odcinków, przynależności punktu do trójkąta,

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

a) wyszukiwanie elementów liniowe i przez połowienie (do znajdowania elementów w zbiorze, sortowania przez wstawianie, przybliżonego rozwiązywania równań, sprawdzania przynależności punktu do wielokąta wypukłego),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz pojęcie geometrii analitycznej i zdefiniujesz przedmiot badań geometrycznych.
- Prześledzisz, czy punkt zdefiniowany za pomocą dwóch liczb leży na dowolnej prostej opisanej równaniem lub dwoma innymi punktami.
- Opiszysz zasadę działania uniwersalnego algorytmu sprawdzającego, czy punkt należy do wielokąta wypukłego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- kartka, linijka, ołówek, cyrkiel.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Algorytmy geometryczne”. Uczniowie zapoznają się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom temat zajęć oraz cele. Prosi, by na ich podstawie uczniowie sformułowali kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Nauczyciel ocenia, na podstawie informacji na platformie, stan przygotowania uczniów do zajęć. Jeżeli jest ono niewystarczające, prosi wybraną osobę o przedstawienie najważniejszych informacji z sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z ultimedium.** Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią sekcji „Symulacja interaktywna” i wykonują polecenia 1 i 2. Na forum klasy dzielą się swoimi spostrzeżeniami.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-5 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel ponownie wyświetla na tablicy temat i cele lekcji zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W kontekście ich realizacji następuje omówienie ewentualnych

problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenie 6-8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Oficjalna dokumentacja techniczna dla języka C++.
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla kompilatora GCC/G++ 4.5 (lub nowszej wersji).

Wskazówki metodyczne:

- Uczniowie mogą wykorzystać treści w sekcjach: „Przeczytaj”, „Symulacja interaktywna”, „Sprawdź się” jako materiał do lekcji powtórkowej.