



Jak obliczyć pochodną funkcji złożonej?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Określanie nowych wartości na podstawie starej wartości i wielkości jej zmiany, obliczanie szybkości zmian, przewidywanie dynamiki przyszłej populacji, modelowanie szybkości rozprzestrzeniania się wirusa, to tylko niektóre zagadnienia, w których zrozumieniu i analizie pomagają instrumenty rachunku różniczkowego. Zanim jednak przejdziemy do analizy i przewidywania dynamiki złożonych zjawisk musimy nauczyć się sprawnie stosować narzędzia potrzebne do tego celu.

Twoje cele

- Dowiesz się jak obliczać pochodną funkcji złożonej.

Przeczytaj

Przypomnimy wzory na pochodne niektórych funkcji:

| Wzór funkcji $y = f(x)$ | Pochodna $f'(x)$ funkcji f | Uwagi |
|-------------------------|------------------------------|----------------------|
| $f(x) = c$ | $(c)' = 0$ | $c \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$ | $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| $f(x) = \ln x$ | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ |
| $f(x) = \sin x$ | $(\sin x)' = \cos x$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos x$ | $(\cos x)' = -\sin x$ | $x \in \mathbb{R}$ |

Twierdzenie: o pochodnej funkcji złożonej

Jeżeli

- funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 ,
- funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $f(x_0)$,

to

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Ważne!

Prawdziwy jest analogiczny wzór dla dowolnej liczby składanych funkcji oraz dla pochodnych jednostronnych i pochodnych niewłaściwych. Należy pamiętać, że operacja składania funkcji nie jest przemienna.

Przykład 1

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = \sin^2 x$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jest złożeniem funkcji $g(x) = \sin x$ oraz $h(x) = x^2$.

Funkcja g jest funkcją wewnętrzną, a funkcja h jest funkcją zewnętrzną.

Wówczas pochodna funkcji wewnętrznej jest równa $g'(x) = \cos x$ oraz pochodna funkcji zewnętrznej $h(x) = 2x$.

Stąd, na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

Przykład 2

Obliczymy pochodną funkcji $f(x) = (3x^2 + 1)^3$.

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x)$ jest **złożeniem funkcji** $g(x) = 3x^2 + 1$ oraz $h(x) = x^3$.

Funkcja g jest funkcją wewnętrzną, a funkcja h jest funkcją zewnętrzną.

Wówczas pochodna funkcji wewnętrznej jest równa $g'(x) = 6x$ oraz pochodna funkcji zewnętrznej $h(x) = 3x^2$.

Stąd na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$f'(x) = 18x(3x^2 + 1)^2.$$

Przykład 3

Obliczymy pochodną funkcji $h(x) = \ln \cos(x^2 + 1)$.

Rozwiązanie:

Niech $\cos(x^2 + 1) > 0$.

Funkcja $h(x)$ jest funkcją dwukrotnie złożoną.

Funkcją „najbardziej” wewnętrzną jest funkcja $f_1(x) = x^2 + 1$, następnie $f_2(x) = \cos x$. Funkcją zewnętrzną jest $f_3(x) = \ln x$.

Korzystając z reguły liczenia pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy

$$h'(x) = -2x \sin(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\cos(x^2+1)} = \frac{-2x \sin(x^2+1)}{\cos(x^2+1)} = -2x \operatorname{tg}(x^2 + 1).$$

Przykład 4

Ropa wycieka ze studni w ilości 2500 litrów dziennie. Promień okrągłej kałuży ropy zmienia się zgodnie z funkcją czasu $r(t) = 4t$. Obliczymy szybkość rozprzestrzeniania się plamy oleju.

Rozwiązanie:

Szybkość rozprzestrzeniania się plamy oleju określona jest jako pochodna pola rozlewiska względem czasu.

Pole rozlewiska $P(r) = \pi r^2(t)$ jest funkcją złożoną, gdzie funkcją wewnętrzną jest $r(t) = 4t$, a jej pochodna wynosi 4.

Funkcją zewnętrzną jest $P(r) = \pi r^2$, a jej pochodna na argumencie $r(t)$ wynosi $2\pi \cdot 4t$.

Obliczamy pochodną funkcji złożonej. Otrzymujemy

$$P'(t) = 4 \cdot 2\pi \cdot 4t = 32\pi t.$$

Przykład 5

Koń ciągnie powóz po polnej drodze. Ilość energii E (w kaloriach) spalonych przez konia zależy od przebytej drogi s (w kilometrach) i dana jest wzorem $E(s) = 2s^3 - 15$. Również odległość pokonana przez konia zależy od czasu t (w godzinach) i dana jest wzorem $s(t) = \sqrt{t}$. Zapiszemy wzór, określający w jakim tempie koń zużywa energię.

Rozwiązanie:

Tempo spalania kalorii przez konia jest określona przez pochodną $E'(s) = 6s^2$, natomiast szybkość poruszania się konia przez pochodną $s'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Zatem, tempo zużywania kalorii jest pochodną funkcji złożonej daną wzorem

$$E'(t) = E'(s) \cdot s'(t) = 6(\sqrt{t})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = 3\sqrt{t}.$$

Słownik

złożenie funkcji

jeśli funkcja $f : X \rightarrow Y$ i funkcja $g : Y \rightarrow Z$, to funkcję $h : X \rightarrow Z$ określoną wzorem $h(x) = g(f(x))$ nazywamy złożeniem funkcji f i g ; funkcję f nazywamy funkcją wewnętrzną, a funkcję g – funkcją zewnętrzną

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samuczkiem, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod filmem.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dw18TCyN3>



Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący obliczania pochodnej funkcji złożonej.

Polecenie 2

Polecenie 3

Wyznamy pochodną funkcji $h(x) = (2x^3 + 5)^2 \cdot (x^2 - 1)^3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x) = \cos^3 2x$.

Ćwiczenie 5



Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x) = (2x^2 + 1) \sin 3x$.

Ćwiczenie 6



Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x) = \operatorname{Intg} \frac{x}{6}$ dla $\frac{x}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla każdego całkowitego k oraz $\operatorname{tg} \frac{x}{6} > 0$.

Ćwiczenie 7



Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$ dla $\sin x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ dla każdego całkowitego k .

Ćwiczenie 8



Wyznacz pochodną funkcji określonej wzorem $f(x) = \sin(x^2 \ln x)$ dla $x > 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Agnieszka Niemczynowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć pochodną funkcji złożonej?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie pochodnej funkcji w punkcie;
- wykorzystuje podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego do obliczania pochodnej funkcji, w tym funkcji złożonej;
- zna proste zastosowania funkcji złożonej do modelowania zjawisk rzeczywistych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja panelowa;
- dyskusja;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji: „Jak obliczyć pochodną funkcji złożonej?”.
2. Wybrani uczniowie przypominają pochodne funkcji elementarnych.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3 – 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Film samouczek”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2 – 3 z sekcji „Film samouczek”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1 – 2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3 – 5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6 – 7 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Pochodne funkcji elementarnych Działania na pochodnych](#)

Wskazówki metodyczne:

Medium z sekcji „Film samouczek” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału wyznaczaniu przedziałów monotoniczności funkcji.