Ciąg geometryczny

Przykłady ciągów geometrycznych. Ilustracja interaktywna: ciąg geometryczny utworzony z kartek o formatach A0, A1, A2,... Definicja ciągu geometrycznego. Iloraz ciągu geometrycznego. Własność ciągu geometrycznego. Wzór ogólny ciągu geometrycznego. 2 ilustracje interaktywne: graficzna interpretacja ciągów geometrycznych.

Przykłady ciągów geometrycznych. Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Prezentacja interaktywna: konstrukcja ciągu geometrycznego.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zasób zawiera 8 zadań, w tym zadania interaktywne.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera 11 zadań. Część zadań jest interaktywnych.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zadania o podwyższonym stopniu trudności. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera 9 zadań z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Ciąg geometryczny

Przykład 1

Spotykamy się czasem ze stwierdzeniem, że zeszyt, w którym piszemy, ma format $A4$ albo $A5$. Co to oznacza? Międzynarodowa norma definiuje 3 serie formatów $A,\ \mathrm{B}$ i C, przy czym formaty C związane są z określeniami formatów kopert.
Format $A0$ odpowiada prostokątowi o powierzchni $1\ m^2$, przy czym jego wymiary są tak dobrane, żeby stosunek dłuższego boku do krótszego był równy $\sqrt{2}$. Mamy więc wymiary arkusza formatu $A0$: $1188\ \ \mathrm{mm}$ i $\frac{1188}{\sqrt{2}}\ \mathrm{mm}$. Format $A1$ jest połową formatu $A0$, czyli krótszy bok arkusza formatu $A0$ to dłuższy bok arkusza formatu $A1$ i stosunek dłuższego boku do krótszego jest równy $\sqrt{2}$. Zatem kartka formatu $A1$ ma wymiary: $\frac{1188}{\sqrt{2}}\ \mathrm{mm}$ i $\frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^2}\ \mathrm{mm}$.
Otrzymujemy ciąg liczb, z których każda następna, oprócz pierwszej, jest $\sqrt{2}$ razy mniejsza od poprzedniej, czyli $\left(1188, \frac{1188}{\sqrt{2}}, \frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^2}, \frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^3}, \frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^4}, \ldots\right)$. Jakie wymiary będzie miał arkusz formatu $A5$?
Wymiary arkusza formatu $A5$ będą szóstą i siódmą liczbą w tym ciągu. Obliczamy

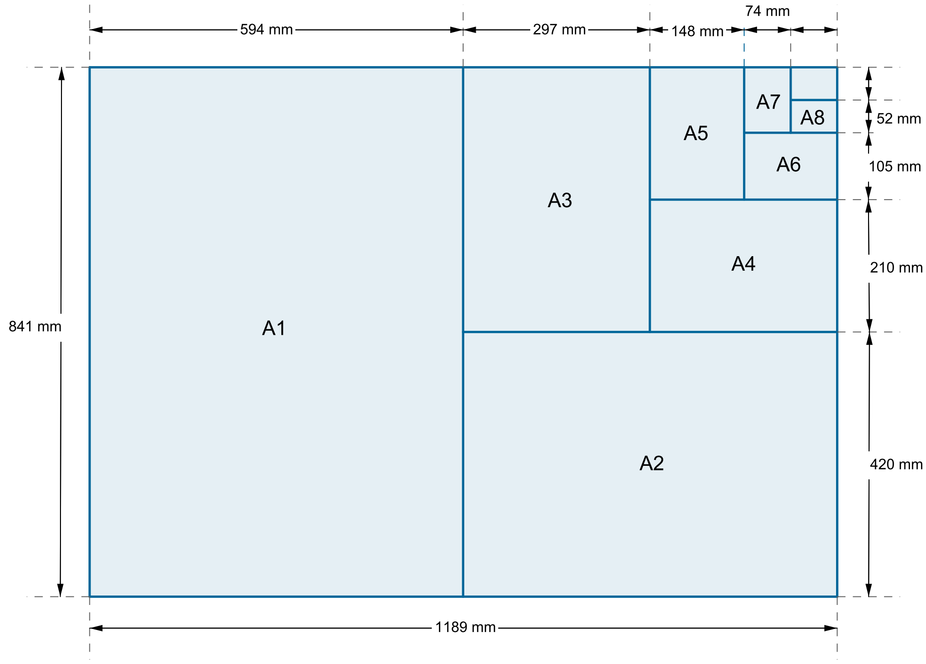
$$a_6 = \frac{a_5}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^5} = \frac{297}{\sqrt{2}}$$

oraz

$$a_7 = \frac{a_6}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^6} = \frac{1188}{8} = 148{,}5$$

Zatem kartka formatu $A5$ ma wymiary $\frac{297}{\sqrt{2}}\mathrm{mm}$ i $\frac{1188}{\left(\sqrt{2}\right)^6} = 148{,}5\ \mathrm{mm}$.

W praktyce wymiary arkuszy są zaokrąglane do pełnych milimetrów. Otrzymujemy w ten sposób ciąg $(1188, 840, 594, 420, 297, \ldots)$.



Oba przykłady opisują ciągi, w których każdy kolejny wyraz jest iloczynem wyrazu poprzedniego przez pewną ustaloną liczbę. Takie ciągi nazywamy ciągami geometrycznymi.

Definicja: Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem geometrycznym**, jeżeli ma przynajmniej 3 wyrazy, jego pierwszy wyraz jest różny od 0, a każdy następny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego i oznaczamy przez q.

- Jeśli ciąg jest skończony i ma $k \geq 3$ wyrazów, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \bullet q$ dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq n \leq k-1$. Jeśli natomiast ciąg jest nieskończony, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \bullet q$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.
  Z definicji wynika, że
- jeśli $q \neq 0$, to, wobec warunku $a_1 \neq 0$, wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) sa różne od zera
- jeśli $q = 0$, to wyrazy ciągu$a_2,\ a_3, a_4, \ldots$ sa równe 0, czyli jest to ciąg postaci $a_1,\ 0{,}0, 0, \ldots$
- Ciąg geometryczny w pewnym sensie jest podobny do ciągu arytmetycznego. W ciągu arytmetycznym kolejny wyraz jest sumą poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. W ciągu geometrycznym kolejny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu oraz pewnej ustalonej liczby. Dlatego techniki, którymi będziemy się posługiwać w rozwiązywaniu zadań dotyczących ciągów geometrycznych i ciągów arytmetycznych, będą podobne, lecz wykonywane obliczenia będą inne.
- Żeby sprawdzić, czy ciąg jest geometryczny, postępujemy podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego. Tam badaliśmy, czy różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami jest

stała. W przypadku ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od zera, wystarczy zbadać, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.

- Dowolne trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 \neq 0$ i $a_n \neq 0$, spełniają równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, którą możemy zapisać w postaci

$$a_n{}^2 = a_{n+1} \bullet a_{n-1}$$

Dowolne trzy kolejne, różne od 0 wyrazy ciągu geometrycznego spełniają równość

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}},$$

którą możemy zapisać w postaci $a_n{}^2 = a_{n+1} \bullet a_{n-1}$

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/PV9tU9Xe7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY NC 3.0.

Własność: Własność ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od 0 jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ $(1 < n < k,$ ciąg (a_n) jest $k-$wyrazowy$)$ prawdziwa jest równość

$$a_n{}^2 = a_{n+1} \bullet a_{n-1}$$

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi, to równość $a_n{}^2 = a_{n+1} \bullet a_{n-1}$ możemy zapisać w postaci $a_n = \sqrt{a_{n+1} \bullet a_{n-1}}$.
Oznacza to, że wyraz a_n jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.

Zauważmy, że jeżeli w ciągu (a_n) jest $a_1 \neq 0$ oraz istnieją wyrazy równe 0 i wyrazy różne od 0, to z definicji wynika, że nie jest to ciąg geometryczny, mimo że może spełniać warunek $a_n{}^2 = a_{n+1} \bullet a_{n-1}$
Na przykład ciąg $(2, 0, 0, 3)$ spełnia warunki $a_2{}^2 = a_1 \bullet a_3$ oraz $a_3{}^2 = a_2 \bullet a_4$, lecz nie jest to ciąg geometryczny.

Przykład 2

Sprawdź, czy ciąg $\left(\sqrt{2}-1,\ 1,\ \sqrt{2}+1\right)$ jest ciągiem geometrycznym.
Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są różne od zera, więc możemy skorzystać z twierdzenia o własności ciągu geometrycznego. Wystarczy więc sprawdzić, czy $a_2{}^2 = a_1 \bullet a_3$.
Iloczyn

$$a_1 \bullet a_3 = \left(\sqrt{2}-1\right) \bullet \left(\sqrt{2}+1\right) = 2 - 1 = 1 = 1^2 = a_2{}^2,$$

więc wnioskujemy, że ten ciąg jest geometryczny.

Przykład 3

W ciągu geometrycznym kolejne wyrazy mają postać

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) \bullet q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = \left(a_1 q^2\right) \bullet q = a_1 q^3$$

i tak dalej.
Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu jest iloczynem wyrazu pierwszego oraz pewnej liczby czynników q. Czynników q jest o 1 mniej, niż wynosi numer wyrazu, który chcemy obliczyć, a więc wyraz a_n jest iloczynem wyrazu $a_1$oraz $n-1$ czynników q . Zatem n-ty wyraz ciągu jest równy $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) i q jest ilorazem tego ciągu, to dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ mamy $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/PV9tU9Xe7

Przykład 4

Oblicz ósmy wyraz ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 81$ oraz $q = -\frac{1}{3}$.
Zastosujemy podany wcześniej wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego. Ósmy wyraz ciągu jest więc równy

$$a_8 = a_1 q^7 = 81 \bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -3^4 \bullet 3^{-7} = -3^{-3} = -\frac{1}{27}$$

Przykład 5

Którym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_1 = 3$ oraz $q = 5$, jest liczba 1875
?
Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego mamy $3 \bullet 5^{n-1} = 1875$. Stąd otrzymujemy $5^{n-1} = 625 = 5^4$. Zatem $n - 1 = 4$, czyli $n = 5$. Liczba 1875 jest więc piątym wyrazem ciągu (a_n).

Przykład 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $a_1 = 1$, a trzeci wyraz tego ciągu jest o 2 większy od drugiego wyrazu tego ciągu. Oblicz iloraz q tego ciągu.
Drugi i trzeci wyraz ciągu są równe $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$. Ponieważ $a_1 = 1$, to $a_2 = 1 \bullet q = q$ oraz $a_3 = 1 \bullet q^2 = q^2$. Wyrazy te różnią się o 2, czyli $a_3 - a_2 = 2$, więc

$q^2 - q = 2$. Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z niewiadomą q. Ma ono dwa rozwiązania $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$. Są więc dwa takie ciągi geometryczne o ilorazach $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$.

Przykład 7

Pomiędzy liczby $\frac{64}{3}$ oraz 9 wstaw takie dwie liczby, żeby otrzymać czterowyrazowy ciąg geometryczny.
Liczba 9 jest czwartym, a liczba $\frac{64}{3}$ pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego. Stąd $9 = \frac{64}{3} q^3$, gdzie q oznacza iloraz tego ciągu. Zatem $q = \frac{3}{4}$. Drugi wyraz tego ciągu jest więc równy $x = \frac{64}{3} \bullet q = \frac{64}{3} \bullet \frac{3}{4} = 16$, a trzeci $y = x \bullet q = 16 \bullet \frac{3}{4} = 12$.

Przykład 8

Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_6 + a_5 = 540$ oraz $a_6 - a_4 = 1296$.
Korzystając ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, kolejne wyrazy ciągu geometrycznego zapisujemy $a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$, $a_5 = a_1 q^4$, $a_6 = a_1 q^5$. Równania dane w zadaniu zapisujemy więc w postaci układu równań

$$\begin{cases} a_1 q^5 + a_1 q^4 = 1944 \\ a_1 q^5 - a_1 q^3 = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 q^4 (q+1) = 1944 \\ a_1 q^3 \left(q^2 - 1\right) = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 q^4 (q+1) = 1944 \\ a_1 q^3 (q-1)\left(q+1\right) = 1296 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ oraz $q + 1 \neq 0$. Gdyby tak nie było, równanie byłoby sprzeczne, gdyż po lewej stronie mielibyśmy 0, a po prawej 1944.
Dzielimy więc stronami drugie równanie przez pierwsze. Wtedy otrzymujemy

$$\frac{a_1 q^3 (q-1)(q+1)}{a_1 q^4 (q+1)} = \frac{1296}{1944}$$

czyli

$$\frac{q-1}{q} = \frac{2}{3}$$

Stąd $3q - 3 = 2q$. Zatem $q = 3$. Z równania $a_1 q^4 (q+1) = 1944$ i $q = 3$, otrzymujemy

$$a_1 = \frac{1944}{q^4 (q+1)} = \frac{1944}{3^4 (3+1)} = 6$$

Ciąg geometryczny może być malejący, rosnący, stały, niemalejący, nierosnący albo w ogóle może nie być monotoniczny. Zależy to od wartości ilorazu oraz znaku pierwszego wyrazu. Na

przykład ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 4$ oraz $q = 2$, a więc ciąg $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$ jest rosnący, gdyż każdy kolejny wyraz ciągu jest dwa razy większy od poprzedniego i pierwszy wyraz jest dodatni.
Korzystając z poniższego apletu, zbadaj monotoniczność kilku ciągów geometrycznych.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://epodreczniki.pl/b/PV9tU9Xe7

Ćwiczenie 1

Przeciągnij pasujące elementy z dolnej sekcji do górnej.

<math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mfrac><mn>1</mn><mn>2</mn></mfrac><mi>n</mi><mo>-</mo><mn>3</mn></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mn>5</mn><mo>+</mo><mn>2</mn><mi>n</mi></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mfrac><mn>1</mn><msup><mn>2</mn><mrow><mi>n</mi><mo>+</mo><mn>1</mn></mrow></msup></mfrac></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mfrac><mrow><mn>3</mn><mi>n</mi><mo>-</mo><mn>5</mn></mrow><mn>2</mn></mfrac></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><msup><mn>5</mn><mi>n</mi></msup></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mfrac><msup><mn>7</mn><mi>n</mi></msup><mn>3</mn></mfrac></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mo>-</mo><mfrac><mn>3</mn><mn>4</mn></mfrac><mi>n</mi><mo>+</mo><mn>5</mn></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><msup><mn>2</mn><mrow><mi>n</mi><mo>-</mo><mn>2</mn></mrow></msup></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mn>6</mn><mo>+</mo><mo>n</mo></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mn>5</mn><mi>n</mi></math>, <math><msub><mi>a</mi><mi>n</mi></msub><mo>=</mo><mfrac><mn>1</mn><mn>2</mn></mfrac><msup><mn>3</mn><mi>n</mi></msup></math>

ciąg arytmetyczny	

ciąg geometryczny	

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Połącz w pary wzór ogólny ciągu geometrycznego z odpowiednimi wartościami a_1 i q.

$a_n = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$a_1 = 4, \quad q = \frac{1}{4}$
$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$	$a_1 = \frac{1}{2}, \quad q = 8$
$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n$	$a_1 = 8, \quad q = -\frac{1}{2}$
$a_n = \frac{1}{16} \cdot 8^n$	$a_1 = -8, \quad q = \frac{1}{2}$
$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$a_1 = 2, \quad q = \frac{1}{8}$
$a_n = -16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$a_1 = 8, \quad q = \frac{1}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3

Sprawdź, czy podany ciąg jest geometryczny. Jeżeli jest, to znajdź jego iloraz.

1. $a_n = (0{,}3)^n$
2. $b_n = \frac{2^n}{7}$
3. $c_n = 3^{n+4}$

Ćwiczenie 4

Połącz w pary ciąg geometryczny z odpowiadającym mu ilorazem.

$\frac{1}{2}$	$(-12, 6, -3, \ldots)$
2	$(2, 6, 18, \ldots)$
-3	$(3, -6, 12, \ldots)$
-2	$(-2, 6, -18, \ldots)$
3	$(3, 6, 12, \ldots)$
$-\frac{1}{2}$	$(12, 6, 3, \ldots)$

Ćwiczenie 5

Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n), w którym

1. $a_1 = 10$ oraz $a_6 = \frac{5}{16}$
2. $a_3 = \frac{1}{2}$ oraz $a_6 = \frac{125}{2}$

Ćwiczenie 6

Ustaw wyrazy w odpowiedniej kolejności, tak żeby utworzyły ciąg geometryczny, którego iloraz jest mniejszy od 1.

1. $\frac{125}{4}, \ \frac{25}{2}, \ 5, \ 2, \ \frac{4}{5}, \ \frac{8}{25}, \ \frac{16}{125}$
2. $128\sqrt{3}, \ \frac{32}{3}, \frac{8}{\sqrt{3}}, 2, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{8}$

Ćwiczenie 7

Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego $a_6 = 20$, $a_8 = 80$. Wtedy

- [ ] $a_7 = 50$
- [ ] $a_4 = 5$
- [ ] $q = 2$ lub $q = -2$

Ćwiczenie 8

Liczby $x - 1,\ 2x + 2,\ 6x + 6$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Ćwiczenie 9

Suma trzech wyrazów tworzących ciąg geometryczny jest równa -7, a ich iloczyn jest równy 27. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 10

Udowodnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$.

Ćwiczenie 11

W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a iloraz $\frac{1}{3}$. Dwudziesty wyraz tego ciągu można zapisać wzorem

- $a_{20} = 3 \bullet \left(\frac{1}{3}\right)^{19}$
- $a_{20} = 3 \bullet \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$
- $a_{20} = \frac{1}{3} \bullet (3)^{19}$
- $a_{20} = \frac{1}{3} \bullet (3)^{20}$

Ćwiczenie 12

Piąty wyraz rosnącego ciągu geometrycznego jest równy $5\frac{1}{3}$, a siódmy $21\frac{1}{3}$. Iloraz tego ciągu jest równy

- -2
- 2
- 4
- -4

Ćwiczenie 13

Który z ciągów jest geometryczny?

- $\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$
- $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{9}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$
- $\frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{2+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}$
- $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

Ćwiczenie 14

W ciągu geometrycznym mamy $a_2 = \frac{3}{4}$ oraz $a_5 = \frac{16}{9}$. Wtedy

- $a_1 \bullet a_3 = \frac{1}{3}$
- $a_1 \bullet a_3 = \frac{4}{3}$
- $a_1 \bullet a_3 = \frac{9}{16}$
- $a_1 \bullet a_3 = 1$

Ćwiczenie 15

W ciągu geometrycznym dane są $a_1 = 3$ oraz $a_4 = 192$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 16

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ oraz $a_4 = \frac{3}{4}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu.

Ćwiczenie 17

W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = \frac{45}{16}$ oraz $a_6 = \frac{405}{4}$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Ćwiczenie 18

Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = -3$ oraz ilorazie $q = -2$. Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 96?

Ćwiczenie 19

Stosunek sumy trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy wyrazów pierwszego i trzeciego jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 20

Jaką liczbę trzeba dodać do każdej z liczb:$-2,\ 2,\ 22$, żeby otrzymane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

Ćwiczenie 21

Ćwiczenie 22

Wykaż, że jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, to każdy z ciągów (b_n) i (c_n) określonych wzorami $b_n = \frac{2}{a_n}$ oraz $c_n = a_{3n}$ też jest geometryczny.

Ćwiczenie 23

Znajdź x, wiedząc, że

1. ciąg $(2,\ \mathrm{x},\ 98)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.
2. ciąg $\left(2+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, x\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 24

Pomiędzy liczby 432 oraz 250 wstaw takie dwie liczby a i b, żeby ciąg $(432,\ \mathrm{a},\ \mathrm{b},\ 250)$ był geometryczny.

Ćwiczenie 25

Ciąg geometryczny składa się z ośmiu wyrazów. Suma pierwszych sześciu wyrazów jest równa 1, a suma sześciu ostatnich jest równa 16. Oblicz iloraz tego ciągu.

Ćwiczenie 26

Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (a_n), w którym $a_4 + 17a_2 = 1$ oraz $a_2 + a_4 + a_6 = 1$.

Ćwiczenie 27

Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, które są liczbami całkowitymi różnymi od zera, jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

Ćwiczenie 28

Wykaż, że liczby 5, 6 i 7 nie mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.