



Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

Źródło: Joe Yates, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W starożytnym Egipcie, gdzie po każdym wylewie Nilu trzeba było na nowo wyznaczać granice działek, bardzo przydatna była metoda obliczenia pola podana przez Herona.

Geometria oznacza po grecku sztukę mierzenia ziemi.

W tym materiale wykorzystamy własności trójkątów w dowodzeniu twierdzeń.

Twoje cele

- Utrwalisz poznane twierdzenia dotyczące trójkątów.
- Zastosujesz wzory na pole trójkąta do dowodzenia twierdzeń.

Przeczytaj

W poniższych przykładach pokażemy, jak zastosować wzory na pole trójkąta w dowodzeniu twierdzeń.

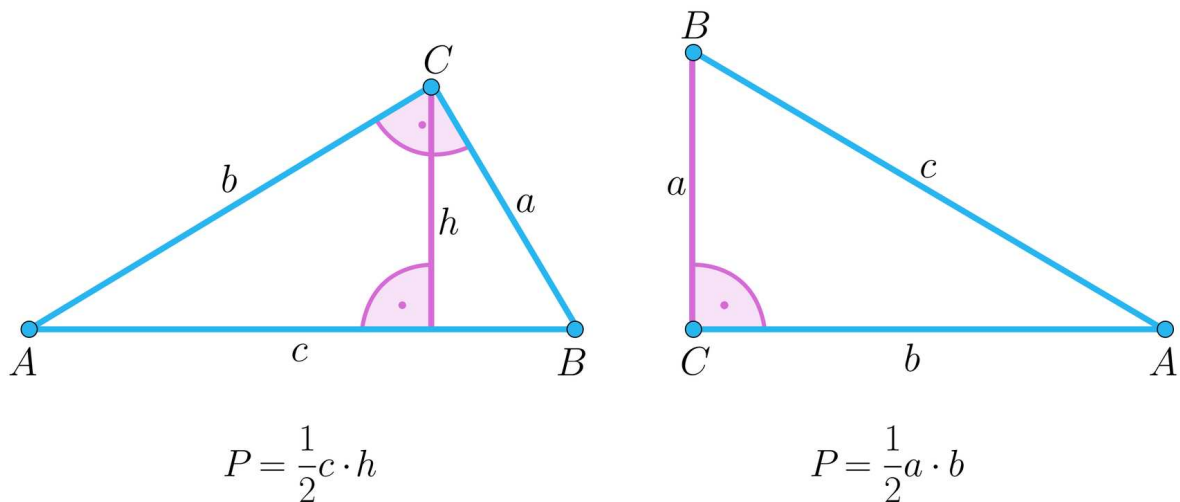
Przykład 1

Wykażemy, że długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b jest równa $h = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $|\angle ACB| = 90^\circ$; a, b – długości przyprostokątnych; c – długość przeciwprostokątnej.

Zastosujemy 2 wzory na pole trójkąta:



Porównujemy pola trójkąta, wyliczając wysokość:

$$\frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ stąd } h = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wyliczamy c :

$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ stąd } c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zatem:

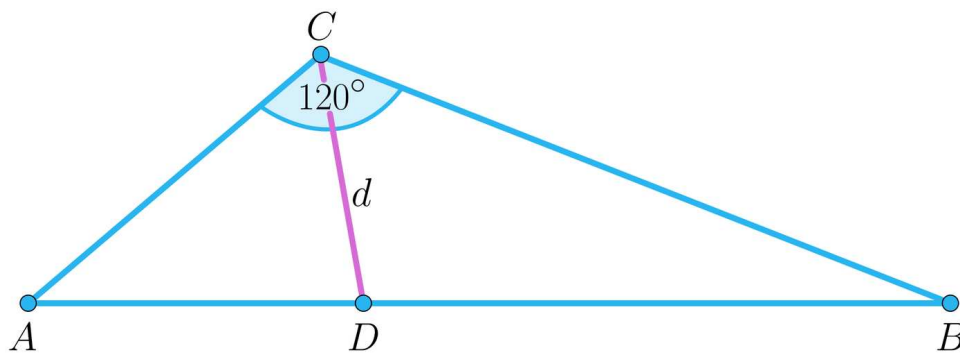
$$h = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Wykazaliśmy, że długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości a i b jest równa: $h = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Przykład 2

W trójkącie ABC boki BC i AC mają długości odpowiednio 4 i 2, kąt przy wierzchołku C ma miarę 120° . Wykażemy, że długość odcinka **dwusiecznej kąta** ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC , wynosi $\frac{4}{3}$.

Rozwiązanie



Niech $d = |CD|$ będzie szukaną długością odcinka **dwusiecznej kąta** ACB .

Z treści zadania: $|BC| = 4$, $|AC| = 2$ i $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$.

Skoro CD jest dwusieczną kąta ACB , to: $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB| = 60^\circ$.

Zauważmy, że: $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC} + P_{\triangle DBC}$.

Skorzystamy ze wzoru na pole trójkąta postaci: $P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha$, gdzie a , b - długości boków trójkąta, zaś α - miara kąta zawartego między tymi bokami.

Mamy zatem:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\sphericalangle ACB)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 4 \cdot \sin(180^\circ - 60^\circ) = 4 \cdot \sin 60^\circ,$$

$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin(\sphericalangle ACD)$$

$$P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin 60^\circ = d \cdot \sin 60^\circ,$$

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |BC| \cdot \sin(\sphericalangle DCB)$$

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot d \cdot \sin 60^\circ.$$

Po podstawieniu dostajemy równanie:

$$4 \cdot \sin 60^\circ = d \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot d \cdot \sin 60^\circ.$$

Dzielimy obie strony równania przez $\sin 60^\circ$ i otrzymujemy:

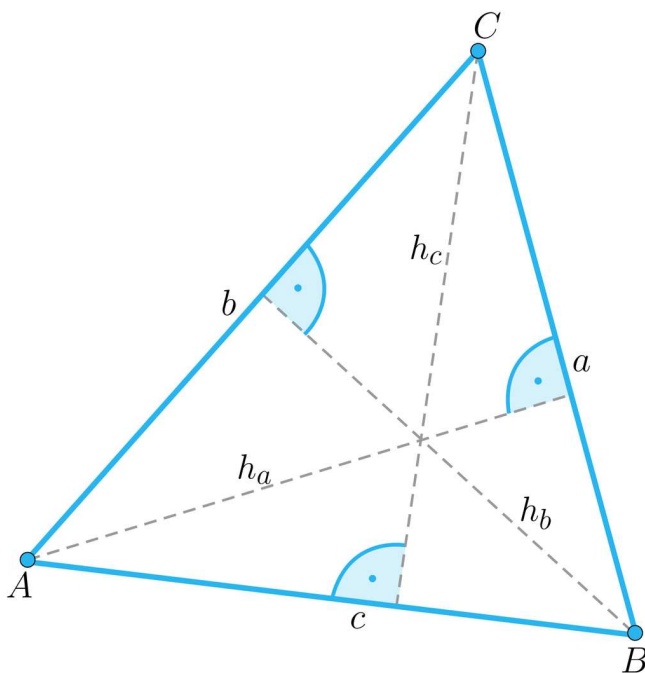
$$4 = d + 2d$$

$$4 = 3d, \text{ stąd } d = \frac{4}{3}.$$

Długość odcinka dwusiecznej kąta ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC wynosi $\frac{4}{3}$, co należało udowodnić.

Przykład 3

Niech a, b, c oznaczają długości boków trójkąta. Mając dane a i b oraz wiedząc, że suma długości wysokości opuszczonych na boki a i b jest równa długości trzeciej wysokości trójkąta, wykażemy, że $c = \frac{a \cdot b}{a+b}$.



Rozwiązanie

Pole tego trójkąta możemy zapisać następująco:

$$P = \frac{1}{2}a \cdot h_a \text{ lub } P = \frac{1}{2}b \cdot h_b \text{ lub } P = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Z porównania pól: $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ i $P = \frac{1}{2}b \cdot h_b$ otrzymujemy: $\frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b$, co możemy zapisać w postaci: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$.

$$\text{Ponadto } \frac{1}{2}a \cdot h_a + \frac{1}{2}b \cdot h_b = 2 \cdot \frac{1}{2}c \cdot h_c, \text{ zatem: } a \cdot h_a + b \cdot h_b = 2c \cdot h_c.$$

$$\text{Z treści zadania } h_c = h_a + h_b, \text{ więc: } a \cdot h_a + b \cdot h_b = 2c(h_a + h_b).$$

Dzielimy obie strony równanie przez h_b :

$$a \cdot \frac{h_a}{h_b} + b \cdot \frac{h_b}{h_b} = 2c \left(\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_b} \right)$$

$$a \cdot \frac{h_a}{h_b} + b = 2c \left(\frac{h_a}{h_b} + 1 \right).$$

Skoro $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$, to:

$$a \cdot \frac{b}{a} + b = 2c \left(\frac{b}{a} + 1 \right)$$

$$b + b = 2c \left(\frac{b}{a} + 1 \right)$$

$$b = c \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{a} \right)$$

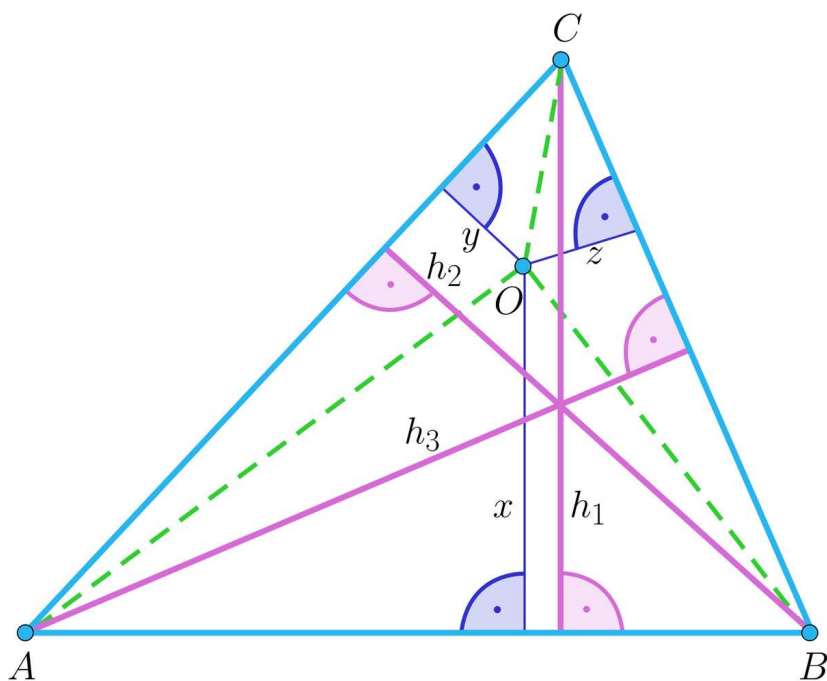
$$b = c \cdot \frac{b+a}{a}$$

$$c = \frac{a \cdot b}{b+a}.$$

Wykazaliśmy zatem, że $c = \frac{a \cdot b}{b+a}$.

Przykład 4

Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC . Odległości tego punktu od boków trójkąta są odpowiednio równe x, y, z , a odpowiednie wysokości trójkąta ABC mają długości h_1, h_2, h_3 . Udowodnimy, że: $\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} = 1$.



Rozwiązanie

Łączymy punkt O z wierzchołkami trójkąta ABC . Otrzymujemy trzy trójkąty: ABO , BCO i CAO .

Zauważmy, że:

$$P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} = P_{\triangle ABC},$$

gdzie:

$$P_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}|AB| \cdot x; P_{\triangle BCO} = \frac{1}{2}|CB| \cdot z; P_{\triangle CAO} = \frac{1}{2}|AC| \cdot y \text{ i } P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_1.$$

Mamy zatem:

$$\frac{1}{2}|AB| \cdot x + \frac{1}{2}|CB| \cdot z + \frac{1}{2}|AC| \cdot y = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_1.$$

Dzielimy obie strony równania przez $\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1$ i otrzymujemy:

$$\frac{x}{h_1} + \frac{|CB| \cdot z}{|AB| \cdot h_1} + \frac{|AC| \cdot y}{|AB| \cdot h_1} = 1 \quad (1).$$

Pole trójkąta ABC może zapisać na trzy sposoby:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 = \frac{1}{2}|CA| \cdot h_2 = \frac{1}{2}|CB| \cdot h_3.$$

Wykorzystamy związki: $\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 = \frac{1}{2}|CA| \cdot h_2$ oraz $\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 = \frac{1}{2}|CB| \cdot h_3$.

Z równości: $\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 = \frac{1}{2}|CA| \cdot h_2$ mamy $|AB| \cdot h_1 = |AC| \cdot h_2$,
czyli $\frac{h_1}{h_2} = \frac{|AC|}{|AB|} \quad (2).$

Z równości: $\frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 = \frac{1}{2}|CB| \cdot h_3$ mamy $|AB| \cdot h_1 = |CB| \cdot h_3$,
czyli $\frac{h_1}{h_3} = \frac{|CB|}{|AB|} \quad (3).$

Związki (2) i (3) podstawiamy do równości (1):

$$\frac{x}{h_1} + \frac{|CB|}{|AB|} \cdot \frac{z}{h_1} + \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{y}{h_1} = 1$$

$$\frac{x}{h_1} + \frac{h_1}{h_3} \cdot \frac{z}{h_1} + \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{y}{h_1} = 1$$

$$\frac{x}{h_1} + \frac{z}{h_3} + \frac{y}{h_2} = 1.$$

Ostatecznie otrzymujemy: $\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} = 1$, co należało udowodnić.

Słownik

dwusieczna kąta

półprosta o początku w wierzchołku kąta i dzieląca ten kąt na dwa kąty przystające

dwusieczna kąta trójkąta

odcinek, który jest częścią wspólną trójkąta i dwusiecznej kąta wewnętrznego tego trójkąta

odległość punktu od boku trójkąta

długość odcinka prostopadłego do boku trójkąta, którego jednym końcem jest punkt O , który nie należy do rozważanego boku trójkąta, a drugim końcem jest punkt należący do tego boku

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą zastosowania pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń.
Następnie rozwiąż polecenia znajdujące się pod nią.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DUVxDY6X1>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowań pojęcia pola w dowodzeniu.

Polecenie 2

Wykaż, że jeżeli trójkąt ma dwie wysokości o równych długościach, to jest równoramienny.

Polecenie 3

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości $a = 5$, $b = 12$. Wykaż, że długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną wynosi $\frac{60}{13}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Można wykazać, że jeśli α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta ABC i $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta > \sin^2 \gamma$, to:

☐ $\gamma = 90^\circ$

☐ $\gamma \geq 90^\circ$

☐ $\gamma > 90^\circ$

☐ $\gamma < 90^\circ$

Ćwiczenie 2



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 120° . Można wykazać, że:

☐ Jeśli $|AC| = a, |BC| = b$, to długość odcinka dwusiecznej kąta ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC wynosi $\frac{b}{a+1}$.

☐ Jeśli $|AC| = 6, |BC| = 9$, to długość odcinka dwusiecznej kąta ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC wynosi 3, 6.

☐ Jeśli $|AC| = b, |BC| = a$, to długość odcinka dwusiecznej kąta ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC wynosi $\frac{ab}{a+b}$.

☐ Jeśli $|AC| = 12, |BC| = 16$, to długość odcinka dwusiecznej kąta ACB , który jest zawarty w trójkącie ABC wynosi $\frac{16}{13}$.

Ćwiczenie 3



Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości a i b . Dopasuj długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną do podanych długości boków a i b .

$$a = 9, b = 40$$

$$h = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$$

$$h = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$$

$$h = \frac{36}{5}$$

$$a = 9, b = 12$$

$$h = \frac{360}{41}$$

Ćwiczenie 4



Dany jest trójkąt o bokach długości: a, b, c , w którym suma długości wysokości opuszczonych na boki a i b jest równa długości trzeciej wysokości tego trójkąta. Przeciągnij w poprawne miejsca odpowiednie liczby tak, aby można było wykazać prawdziwość poniższych zdań.

Jeśli $a = 20, b = 30$, to trzeci bok ma długość $c =$.

Jeśli $a = 4\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$, to trzeci bok ma długość $c =$ $\cdot \sqrt{3}$.

Jeśli $a = \sqrt{50}, b = \sqrt{8}$, to trzeci bok ma długość $c =$ $\cdot \sqrt{2}$.

Ćwiczenie 5



Zaznacz poprawną odpowiedź. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Z wierzchołka C prowadzimy na bok AB odcinek CD taki, że $|AD| = \frac{1}{3}|BD|$. Można wykazać, że:

☐ $\frac{P_{\triangle BCD}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{4}{3}$

☐ $\frac{P_{\triangle BCD}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{3}$

☐ $\frac{P_{\triangle BCD}}{P_{\triangle ABC}} = 0,25$

☐ $\frac{P_{\triangle BCD}}{P_{\triangle ABC}} = 0,75$

Ćwiczenie 6



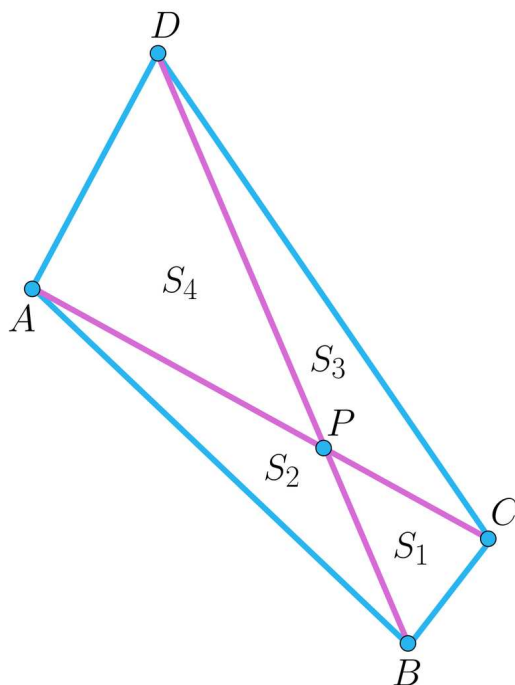
Dany jest trójkąt ABC , w którym: $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = 4b$ oraz kąt przy wierzchołku C ma miarę γ . Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Jeśli $\gamma = 150^\circ$, to długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C jest równa $\frac{4b^2}{c}$.	☐	☐
Jeśli $\gamma = 120^\circ$, to długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C jest równa $\frac{2b^2}{c}$.	☐	☐
Jeśli $\gamma = 135^\circ$, to długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C jest równa $\frac{2\sqrt{2}b^2}{c}$.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Czworokąt $ABCD$ podzielono przekątnymi na cztery trójkąty o polach S_1, S_2, S_3, S_4 (jak na rysunku).



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Można wykazać, że:

☐ Jeśli $S_2 = 5S_1$, to $S_4 - S_3 = 4S_3$

☐ $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$

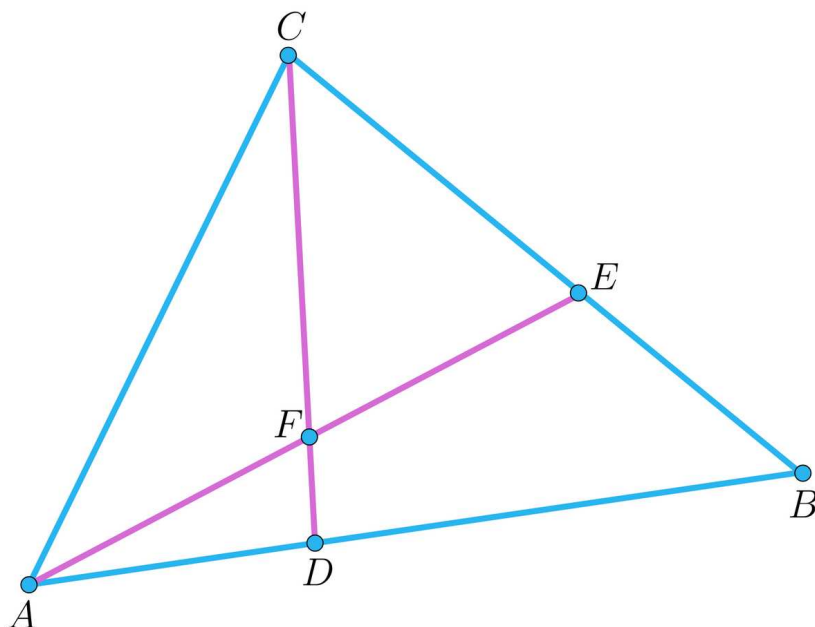
☐ $S_1 = \frac{S_2 \cdot S_3}{S_4}$

☐ Jeśli $S_2 = 3S_1$, to $S_4 - S_3 = 3S_3$

Ćwiczenie 8



Można udowodnić, że jeśli w dowolnym trójkącie ABC (jak na rysunku): $2|AD| = |BD|$ oraz $3|DF| = |CF|$, to która z poniższych równości jest prawdziwa?



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $2|BE| = 3|CE|$

☐ $5|BE| = |CE|$

☐ $3|BE| = 2|CE|$

☐ $|BE| = |CE|$

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje poznane wzory na pole do dowodzenia twierdzeń
- stosuje poznane twierdzenia do rozwiązywania zadań i problemów
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają wzory na pole trójkąta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje animację.
2. Omawia wraz z uczniami dwa pierwsze zadania z animacji.
3. Metodą „burzy mózgów” uczniowie podają metodę rozwiązania zadania trzeciego do samodzielnego rozwiązania, z animacji.
4. Chętny uczeń zapisuje rozwiązanie zadania na tablicy.
5. Uczniowie porównują rozwiązanie z zaprezentowanym w animacji.
6. Nauczyciel prosi o zapoznanie się z przykładem 2 w sekcji „Przeczytaj”.
7. Uczniowie proponują alternatywne metody rozwiązania przykładu 2.
8. Uczniowie rozwiązują wskazane przez nauczyciela ćwiczenia interaktywne.
9. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek oraz zwraca uwagę na poprawność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Chętni uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.

2. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- [Pole trójkąta](#)
- [Obliczanie pól i obwodów trójkątów](#)
- [Pole trójkąta](#)
- [Przystawanie trójkątów](#)
- [Cechy podobieństwa trójkątów](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów. Animację można wykorzystać podczas realizacji lekcji „Pole trójkąta” oraz pierwszy przykład z animacji jest ciekawą alternatywą dla zadań w lekcji „Pole czworokąta o danych przekątnych”.