




Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

Źródło: cottonbro, dostępny w internecie: <https://www.pexels.com/pl-pl/>.

Aby rozwiązać układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi możemy skorzystać z kilku metod. Możemy zastosować metodę graficzną lub algebraiczną. Bardzo często stosujemy algebraiczną metodę polegającą na wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z jednego z równań tego układu i podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego równania w miejsce wyznaczonej niewiadomej.

Taką metodę nazywamy metodą podstawiania.

Twoje cele

- Rozwiążesz układ równań liniowych metodą podstawiania.
- Przekształcisz równoważnie układ równań tak, aby otrzymać układ równań postaci
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$
- Przekształcisz równoważnie równania składowe układu równań doprowadzając je do najprostszej postaci.
- Wyznaczysz jedną z niewiadomych z dowolnego równania składowego.

Przeczytaj

Definicja: układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 nie są równocześnie równe zero. W powyższym układzie x oraz y oznaczają niewiadome, a_1 , a_2 , b_1 oraz b_2 - współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y , natomiast c_1 i c_2 nazywamy wyrazami wolnymi.

Definicja: rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem takiego układu równań jest każda para liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Taki układ równań może mieć jedno rozwiązanie, niekończące wiele rozwiązań lub może nie mieć rozwiązania.

Definicja: równoważne układy równań

Dwa układy równań liniowych nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie: równoważny układ równań

Jeśli z jednego układu równań wyznaczymy jedną niewiadomą i otrzymane wyrażenie podstawimy do drugiego równania, to układ równań złożony z pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania jest **równoważny** danemu.

Ważne!

Rozwiązywanie układów równań **metodą podstawiania** polega na:

- wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania,
- podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej,
- rozwiązaniu otrzymanego równania z jedną niewiadomą,
- podstawieniu otrzymanej wartości niewiadomej do pierwszego równania.

Przed rozwiązaniem równania, warto zastanowić się, którą z niewiadomych wyznaczyć. Ma to wpływ na stopień trudności rozwiązywanego równania z jedną niewiadomą.

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań liniowych metodą postawiania.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wybieramy niewiadomą, którą możemy najłatwiej wyznaczyć. W tym układzie równań taką niewiadomą jest x w drugim równaniu.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x = -2y \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do pierwszego równania w miejsce niewiadomej x .

$$\begin{cases} 2(-2y) + 3y = -1 \\ x = -2y \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$\begin{cases} -4y + 3y = -1 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = -1 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -2y \end{cases}$$

Otrzymaną wartość y podstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \cdot 1 \end{cases}$$

Obliczamy wartość niewiadomej x .

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań. (Sprawdź)

Przykład 2

Korzystając z metody postawiania, rozwiążemy układ równań liniowych.

$$\begin{cases} -15x + 3y = 21 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wybieramy niewiadomą, którą możemy najłatwiej wyznaczyć. W tym układzie nie ma niewiadomej, którą możemy wyznaczyć wykonując jedno przekształcenie. Łatwo jednak zauważyć, że w pierwszym równaniu wszystkie współczynniki są podzielne przez 3, a zatem możemy z tego równania wyznaczyć niewiadomą y .

$$\begin{cases} 3y = 15x + 21 \quad | : 3 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do drugiego równania w miejsce niewiadomej y .

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ -2(5x + 7) + 5x = -4 \end{cases}$$

Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ -10x - 14 + 5x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ -5x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5x + 7 \\ x = -2 \end{cases}$$

Otrzymaną wartość x podstawiamy do pierwszego równania.

$$\begin{cases} y = 5 \cdot (-2) + 7 \\ x = -2 \end{cases}$$

Obliczamy wartość niewiadomej y .

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań.

Przykład 3

Zauważmy, że układ równań liniowych z Przykładu 2 możemy rozwiązać metodą podstawienia wykorzystując inne podstawienie.

$$\begin{cases} -15x + 3y = 21 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dzielimy obie strony pierwszego równania przez 3.

$$\begin{cases} -15x + 3y = 21 \quad |: 3 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x + y = 7 \\ -2y + 5x = -4 \end{cases}$$

Możemy zauważyć, że w każdym z równań występuje wyrażenie $5x$. A zatem wyznaczamy to właśnie wyrażenie np. z drugiego równania.

$$\begin{cases} -5x + y = 7 \\ 5x = 2y - 4 \end{cases}$$

Podstawiamy wyznaczone wyrażenie do pierwszego równania w miejsce wyrażenia $5x$.

$$\begin{cases} -(2y - 4) + y = 7 \\ 5x = 2y - 4 \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie.

$$\begin{cases} -2y + 4 + y = 7 \\ 5x = 2y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = 3 \\ 5x = 2y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ 5x = 2y - 4 \end{cases}$$

Otrzymaną wartość y podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy równanie z niewiadomą x .

$$\begin{cases} y = -3 \\ 5x = 2 \cdot (-3) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3 \\ 5x = -10 \quad |: 5 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb, będącą rozwiązaniem układu równań.

$$\begin{cases} y = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Przykład 4

Rozwiążemy kolejny układ równań liniowych.

$$\begin{cases} \frac{x+3y}{2} - \frac{2x-y}{3} = 2 \\ 4(x-2) + 5(2-y) = 7x \end{cases}$$

Rozwiązanie

Aby móc zastosować metodę podstawiania, musimy doprowadzić układ równań do najprostszej postaci. Możemy w tym celu pomnożyć obie strony pierwszego równania przez 6 (wspólny mianownik ułamków występujących w równaniu).

$$\begin{cases} 3(x+3y) - 2(2x-y) = 2 \cdot 6 \\ 4(x-2) + 5(2-y) = 7x \end{cases}$$

Teraz w każdym z równań usuwamy nawiasy, redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy układ.

$$\begin{cases} 3x + 9y - 4x + 2y = 12 \\ 4x - 8 + 10 - 5y = 7x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 11y = 12 \\ -3x - 5y = -2 \end{cases}$$

Możemy teraz zastosować metodę postawiania, wyznaczając z pierwszego równania niewiadomą x .

$$\begin{cases} -x + 11y = 12 \\ -3x - 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11y - 12 \\ -3(11y - 12) - 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11y - 12 \\ -33y + 36 - 5y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11y - 12 \\ -38y = -38 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 11y - 12 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Otrzymaliśmy parę liczb $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$, będącą rozwiązaniem tego układu równań.

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y = 10\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + y = 7 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Zastosujemy metodę podstawiania. Wyznaczymy y z drugiego równania i otrzymane wyrażenie podstawimy do pierwszego równania w miejsce niewiadomej y .

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y = 10\sqrt{2} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3\sqrt{2}(7 - \sqrt{2}x) = 10\sqrt{2} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 21\sqrt{2} - 6x = 10\sqrt{2} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3} - 6)x = -11\sqrt{2} \quad | : (\sqrt{3} - 6) \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-11\sqrt{2}}{\sqrt{3}-6} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

Usuujemy niewymierność z mianownika w otrzymanym rozwiązaniu.

$$\begin{cases} x = \frac{-11\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+6)}{(\sqrt{3}-6)(\sqrt{3}+6)} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-11\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+6)}{3-36} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-11\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+6)}{-33} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3}+6)}{3} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \\ y = 7 - \sqrt{2}x \end{cases}$$

Obliczamy wartość niewiadomej y .

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \\ y = 7 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \\ y = 7 - \frac{2\sqrt{3}+12}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{9-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb niewymiernych $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{9-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Przykład 6

Rozwiążemy układ równań.

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Tym razem zastosujemy najpierw podstawienie $\begin{cases} a = \frac{1}{x} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases}$ i otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 3a - 2b = 4 \end{cases}$$

Stosujemy teraz metodę podstawiania: wyznaczamy b z pierwszego równania i postawiamy otrzymaną wartość do drugiego równania. Następnie rozwiązujemy układ równań liniowych z niewiadomymi a i b .

$$\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 3a - 2(5 - 2a) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 3a - 10 + 4a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 - 2a \\ 7a = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 - 2a \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

A więc wracając do początkowego podstawienia otrzymujemy:

$$a = \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ oraz } b = \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$.

Przykład 7

Zbadamy liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ 2x + my = 10 \end{cases}$ w zależności od parametru m .

Rozwiązanie

Możemy wyznaczyć x z drugiego równania

$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ x = \frac{10-my}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + 3y = 12 \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

Podstawiamy $x = 5 - \frac{m}{2}y$ do pierwszego równania i wyznaczamy wartość y w zależności od parametru m .

$$\begin{cases} m(5 - \frac{m}{2}y) + 3y = 12 \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5m - \frac{m^2}{2}y + 3y = 12 \quad | \cdot 2 \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10m - m^2y + 6y = 24 \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6 - m^2)y = 24 - 10m \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

W tym miejscu dzielimy obie strony pierwszego równania przez $(6 - m^2)$, więc musimy założyć, że $m \neq \sqrt{6}$ i $m \neq -\sqrt{6}$. Zauważmy, że jeśli $m = \sqrt{6}$ lub $m = -\sqrt{6}$, to w pierwsze równanie przyjmie postać $0 = 24 \pm 10\sqrt{6} \neq 0$. Tym samym dla rozważanych wartości parametru m równanie nie ma rozwiązań.

Wyznamy rozwiązania w pozostałych przypadkach.

$$\begin{cases} y = \frac{24-10m}{6-m^2} \\ x = 5 - \frac{m}{2}y \end{cases}$$

Otrzymaną wartość y podstawiamy w odpowiednie miejsce do drugiego równania.

$$\begin{cases} y = \frac{24-10m}{6-m^2} \\ x = 5 - \frac{m}{2} \cdot \frac{24-10m}{6-m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{24-10m}{6-m^2} \\ x = 5 - \frac{m(12-5m)}{6-m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{24-10m}{6-m^2} \\ x = \frac{5(6-m^2)}{6-m^2} - \frac{m(12-5m)}{6-m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{30-12m}{6-m^2} \\ y = \frac{24-10m}{6-m^2} \end{cases}$$

Taki układ równań:

- nie ma rozwiązania dla $m = -\sqrt{6}$ lub $m = \sqrt{6}$
- ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci $\begin{cases} x = \frac{30-12m}{6-m^2} \\ y = \frac{24-10m}{6-m^2} \end{cases}$ dla $m \neq -\sqrt{6}$ i $m \neq \sqrt{6}$.

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układ równań postaci $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

równoważne układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi

układy równań, które mają ten sam zbiór rozwiązań

metoda podstawiania

metoda polegająca na wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania i podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej niewiadomej

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowania metody podstawiania do rozwiązywania układów równań przedstawionymi w animacji. Następnie wykonaj samodzielnie polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DkRXOVy50>

Film nawiązujący do treści materiału na temat rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania.

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań metodą podstawiania.

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y = 4\sqrt{6} \\ \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{2}y = \frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Dla jakich wartości parametru m rozwiązanie układu równań
$$\begin{cases} x - y = m \\ 3x + 2y = m + 5 \end{cases}$$
 spełnia warunek
$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}?$$

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań metodą podstawiania
$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{10}{y} = 6 \end{cases}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Rozwiązywanie układów równań z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa: IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania,
- tworzy algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania

- dyskusja,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji,
- wędrujące plakaty.

Formy zajęć:

- praca całego zespołu klasowego,

- praca w grupach,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą wędrujących plakatów.
3. Uczniowie w parach przypominają sobie wiadomości na temat układów równań.
4. Chętni uczniowie podają przykłady układów równań, które zostają zapisane na plakatach.

Faza realizacyjna:

1. Pracując w parach, uczniowie zapoznają się z przykładami zawartymi w części Przeczytaj i w animacji, a następnie wykonują polecenie umieszczone pod animacją.
2. Uczniowie pracują w czteroosobowych grupach. Ich zadaniem jest rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania. Każda grupa na swoim plakacie rozwiązuje zapisane wcześniej układy równań. Następnie zapisuje wymyślony przez siebie układ i zapisuje pierwsze równoważne przekształcenie.
3. Plakat wręcza następnej grupie, która dopisuje następne przekształcenie i podaje plakat dalej. W ten sposób rozwiązywane są kolejne układy równań.
4. Nauczyciel nadzoruje pracę grup i wyjaśnia wątpliwości.
5. Uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 - 4. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszytach, sprawdzając w materiale ich poprawność.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia pracę grup oraz wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5-8,

Materiały pomocnicze:

[Układ równań liniowych](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów do utrwalenia wiadomości z lekcji oraz podczas lekcji podsumowujących rozwiązywanie układów równań różnymi metodami.