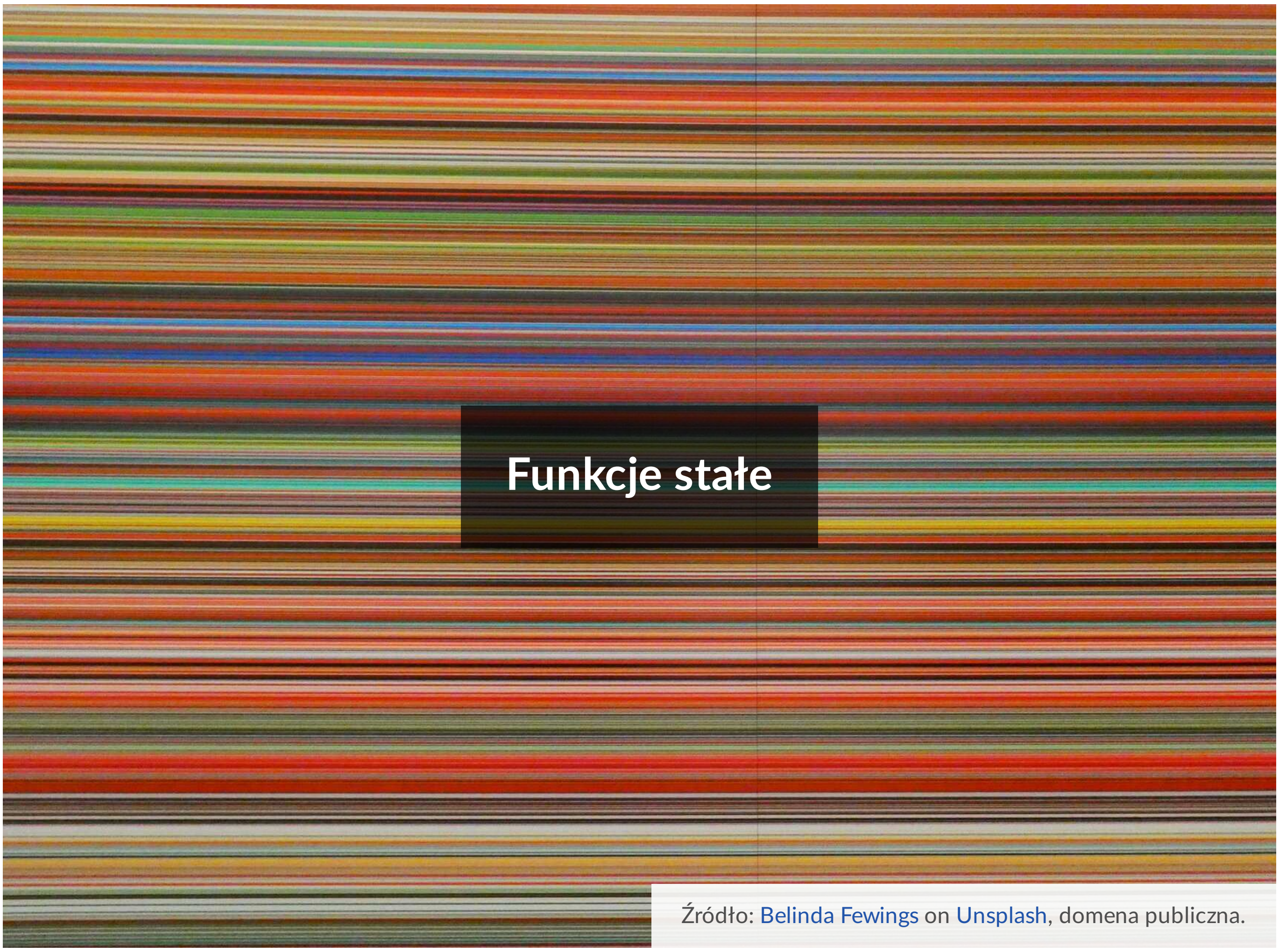
# Funkcje stałe



Źródło: Belinda Fewings on Unsplash, domena publiczna.

Jakie funkcje nazywamy stałymi?
Czy funkcja może być stała w całej dziedzinie?
Czy funkcja może być stała tylko w przedziale, czy też w sumie przedziałów?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz po uważnej analizie poniższego materiału.

**Twoje cele**

- Poznasz pojęcie funkcji stałej.
- Sprawdzisz, czy dana funkcja jest stała.
- Uzasadnisz, że dana funkcja jest stała.

# Przeczytaj

**Definicja: Funkcja stała**

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest funkcją stałą w zbiorze $A$, $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych argumentów $x_1, x_2$, należących do zbioru $A$ zachodzi równość

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Funkcję, która jest stała w całej swojej dziedzinie, nazywamy funkcją stałą.

**Definicję funkcji stałej możemy również zapisać krócej:**

Funkcja liczbowa $f : X \to Y$ jest stała w zbiorze $A$,

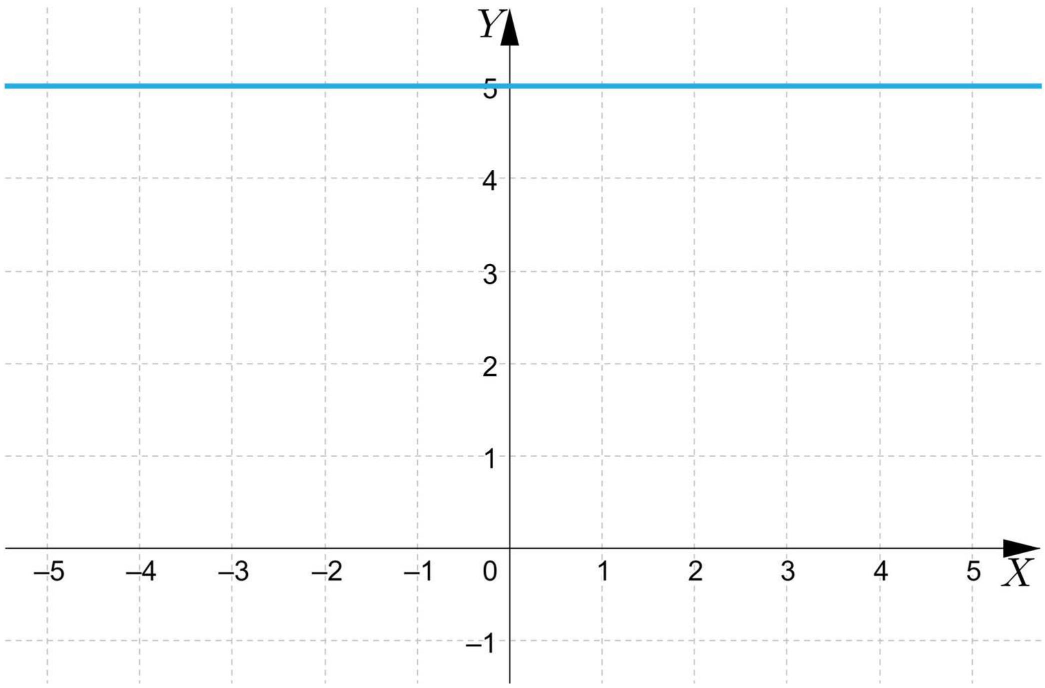
$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} \ [f(x_1) = f(x_2)]$$

Zwrot „dla każdego $x$" nazywa się *kwantyfikatorem ogólnym*, *kwantyfikatorem dużym* lub *kwantyfikatorem uniwersalnym* wiążącym zmienną $x$. Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall_x$.

Poniższe przykłady pokażą nam sposoby sprawdzania, czy podana funkcja jest funkcją stałą.

**Przykład 1**

Funkcja $f(x) = 5$ opisana jest za pomocą wykresu.




Pokażemy, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Rozwiązanie:**

Obserwując wykres funkcji zauważamy, że wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji $f$ nie zmieniają się.

Odczytajmy z wykresu wartości funkcji dla argumentów: $(-2)$, 1.

$f(-2) = 5$

$f(1) = 5$

Z nierówności $-2 < 1$ wynika równość $f(-2) = f(1)$.

Możemy wybrać inną parę argumentów. Np. $(-1)$ i $2$ i podobnie odczytać z wykresu wartości funkcji.

$f(-1) = 5$

$f(2) = 5$

Z nierówności $-1 < 0$ wynika równość $f(-1) = f(2)$.

Przypuszczamy, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

Na podstawie wzoru funkcji wnioskujemy, że dla każdych dwóch różnych argumentów, wartości funkcji są takie same. Zatem istotnie, funkcja jest stała.

**Przykład 2**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$\{(-5,\ 2),\ (-4,\ 2),\ (-3,\ 2),\ (-2,\ 2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)\}$.

Pokażemy, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Rozwiązanie:**

Z nierówności $-5 < -4$ wynika równość $(f(-5) = 2) = (f(-4) = 2)$.

Z nierówności $-3 < 2$ wynika równość $(f(-3) = 2) = (f(2) = 2)$.

Analizując zbiór par uporządkowanych zauważamy, że również w pozostałych przypadkach wraz ze wzrostem argumentów nie zmienia się wartość funkcji.

Stąd wniosek, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Przykład 3**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą tabelki.

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $8$ | $8$ | $8$ | $8$ | $8$ | $8$ |

Pokażemy, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Rozwiązanie:**

Analizując tabelkę opisującą funkcję $f$ zauważamy, że wzrost argumentu nie powoduje zmiany wartości funkcji. Np.

- z nierówności $-4 < 0$ wynika równość $(f(-4) = 8) = (f(0) = 8)$;
- z nierówności $1 < 5$ wynika równość $(f(1) = 8) > (f(5) = 8)$.

Stąd wniosek, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Przykład 4**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = |2x - 6| - |2x + 8|$, gdy $x \in \langle 4,\ 10\rangle$.

Korzystając z definicji wykażemy, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Rozwiązanie:**

Sprawdzimy, jaki znak mają wyrażenia, znajdujące się pod znakiem wartości bezwzględnej, gdy $x \in \langle 4,\ 10\rangle$.

$2x - 6 \geq 0$ oraz $2x + 8 \geq 0$

$2x \geq 6$ oraz $2x \geq -8$

$x \geq 3$ oraz $x \geq -4$

Dla $x \in \langle 4,\ 10\rangle$ oba wyrażenia są nieujemne.

Przekształcimy wzór funkcji $f$.

$f(x) = (2x - 6) - (2x + 8) = 2x - 6 - 2x - 8 = -14$

Dla każdego $x \in \langle 4,\ 10\rangle$ wartość funkcji jest stała i równa $(-14)$.

Pokazaliśmy więc, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Przykład 5**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

a. $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$, gdy $x \in (-\infty,\ 4)$,
b. $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$, gdy $x \in (4,\ \infty)$,
c. $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Sprawdzimy, czy funkcja $f$ jest funkcją stałą.

**Rozwiązanie:**

a. Założenie: $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$, $x_1, x_2 \in (-\infty,\ 4)$ oraz $x_1 < x_2$
   Teza: $f(x_1) = f(x_2)$
   Dowód:
   Obliczamy wartości funkcji $f$ dla argumentów $x_1$ i $x_2$.
   $f(x_1) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4}$
   $f(x_2) = \frac{|x_2-4|}{x_2-4}$
   Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$.
   Możemy zauważyć, że $x - 4 < 0$ dla $x \in (-\infty,\ 4)$.
   $f(x_1) - f(x_2) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4} - \left(\frac{|x_2-4|}{x_2-4}\right) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4} - \frac{|x_2-4|}{x_2-4} =$
   $= \frac{-(x_1-4)}{x_1-4} - \frac{-(x_2-4)}{x_2-4} = -1 + 1 = 0$
   Dla dowolnych dwóch liczb $x_1$, $x_2$ należących do przedziału $(-\infty,\ 4)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika równość $f(x_1) = f(x_2)$.
   Zatem funkcja $f$ jest stała w przedziale $(-\infty,\ 4)$.
b. Założenie: $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$, $x_1, x_2 \in (4,\ \infty)$ oraz $x_1 < x_2$
   Teza: $f(x_1) = f(x_2)$
   Dowód:
   Obliczamy wartości funkcji $f$ dla argumentów $x_1$ i $x_2$.
   $f(x_1) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4}$
   $f(x_2) = \frac{|x_2-4|}{x_2-4}$
   Obliczamy różnicę wartości funkcji:
   $f(x_1) - f(x_2)$.
   Możemy zauważyć, że $x - 4 > 0$ dla $x \in (4,\ \infty)$.
   $f(x_1) - f(x_2) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4} - \left(\frac{|x_2-4|}{x_2-4}\right) = \frac{|x_1-4|}{x_1-4} - \frac{|x_2-4|}{x_2-4} =$
   $= \frac{(x_1-4)}{x_1-4} - \frac{(x_2-4)}{x_2-4} = 1 - 1 = 0$
   Dla dowolnych dwóch liczb $x_1$, $x_2$ należących do przedziału $(4,\ \infty)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika równość $f(x_1) = f(x_2)$.
   Zatem funkcja $f$ jest stała w przedziale $(4,\ \infty)$.
c. W poprzednich podpunktach wykazaliśmy, że funkcja $f$ jest stała w przedziale $(-\infty,\ 4)$ oraz w przedziale $(4,\ \infty)$. Sprawdzimy, czy jest stała w sumie przedziałów.
   Weźmy dwa argumenty funkcji $f$ należące do zbioru $\mathbb{R} \setminus \{4\}$,
   $x_1 = -5$ oraz $x_2 = 5$.
   I obliczmy wartości funkcji dla tych argumentów:

$f(-5) = -1$ oraz $f(5) = 1$.
Okazuje się, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Stąd funkcja $f$ nie jest stała w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

**Ważne!**

- Funkcja jest stała, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów wartość funkcji jest stała.
- Funkcja jest stała w przedziale, ale nie w sumie przedziałów.

## Słownik

**funkcja stała**

funkcja jest stała, jeżeli ze wzrostem argumentów wartości funkcji są takie same

# Animacja

**Polecenie 1**

Przeanalizuj uważnie materiał przedstawiony w animacji. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane przykłady, a następnie porównaj je z podanymi rozwiązaniami.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DJMwkzKlS

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego funkcji stałych.

---

Po uważnym przeanalizowaniu przykładów przedstawionych w animacji wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

**Polecenie 2**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}, & \text{gdy } x > 2 \\ a, & \text{gdy } \ x = 2 \end{cases}.$$

Dla jakiej wartości parametru $a$ funkcja $f$ jest funkcją stałą?

**Polecenie 3**

Funkcja $f$ opisana jest za pomocą wzoru.

$f(x) = |2x - 6| - 2 \cdot |x|$, gdy $x \geq 3$

Uzasadnij, że funkcja $f$ jest funkcją stałą.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

## Ćwiczenie 1

## Ćwiczenie 2

## Ćwiczenie 3

## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

## Ćwiczenie 6

## Ćwiczenie 7

## Ćwiczenie 8

# Dla nauczyciela

**Autor:** Anna Jeżewska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Funkcje stałe**

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna pojęcie funkcji stałej
- sprawdza, czy funkcja jest stała
- uzasadnia, że funkcja jest stała

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- metaplan
- dyskusja

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, podzieleni na dwie grupy, tworzą metaplan dotyczący:
   Grupa pierwsza – własności wartości bezwzględnej oraz przekształcania wyrażeń algebraicznych zawierających wartość bezwzględną.
   Grupa druga – własności pierwiastków kwadratowych i prawa działań na pierwiastkach.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje przemyślenia w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj".
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują uzyskane informacje. Wspólna dyskusja – w jaki jeszcze inny sposób niż przedstawiony w materiałach, można sprawdzić, czy dana funkcja jest funkcją stałą. Następnie, podzieleni na dwie grupy, uzgadniają wnioski i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest funkcją stałą i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

**Faza podsumowująca:**

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

**Praca domowa:**

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 – 8.
2. Zadanie dla chętnych:
   Dla jakiego $a$ wartość funkcji $f(x) = a(\sin x)^2 + a(\cos x)^2 + a$, gdy $x \in \mathbb{R}$, jest równa $6$ ?

**Materiały pomocnicze:**

Monotoniczność funkcji

**Wskazówki metodyczne:**

Animację można wykorzystać przy omawianiu własności funkcji liniowej.