



Określanie przedziałów monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Określanie przedziałów monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru

Źródło: dostępny w internecie: pixy.org, domena publiczna.

Monotoniczność funkcji jest bardzo ważnym elementem badania przebiegu zmienności funkcji. Najczęściej funkcje liczbowe opisywane są za pomocą wzoru. Przykłady pokazane w poniższym materiale przybliżą ci sposoby określania monotoniczności funkcji, gdy jest ona opisana za pomocą jednego wzoru lub wzoru zbudowanego z kilku wyrażeń algebraicznych.

Jakie funkcje nazywamy funkcjami monotonicznymi?

Czy funkcja liczbową jest zawsze rosnąca, malejąca lub stała w całej dziedzinie?

Odpowiedzi na powyższe pytania uzyskasz po analizie poniższego materiału.

Twoje cele

- Poznasz sposoby określania monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru.
- Sprawdzisz, czy funkcja opisana za pomocą wzoru jest funkcją rosnącą, malejącą, czy stałą.
- Określisz przedziały, w których funkcja maleje, rośnie lub jest stała.
- Udowodnisz, że funkcja w podanym przedziale jest funkcją malejącą, rosnącą lub stałą.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja rosnąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją rosnącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję, która jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, nazywamy **funkcją rosnącą**.

Definicję funkcji rosnącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją rosnącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$$

Zwrot „dla każdego x ” nazywa się kwantyfikatorem ogólnym, kwantyfikatorem dużym lub kwantyfikatorem uniwersalnym wiążącym zmienną x . Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall_x$.

Definicja: Funkcja malejąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją malejącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcję, która jest malejąca w całej swojej dziedzinie, nazywamy **funkcją malejącą**.

Definicję funkcji malejącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją malejącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$$

Zwrot „dla każdego x ” nazywa się kwantyfikatorem ogólnym, kwantyfikatorem dużym lub kwantyfikatorem uniwersalnym wiążącym zmienną x . Kwantyfikator ogólny oznaczamy symbolem $\forall_x$.

Definicja: Funkcja stała

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją stałą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika równość

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Funkcję, która jest stała w całej dziedzinie, nazywamy **funkcją stałą**.

Definicję funkcji stałej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest stała w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)]$$

Definicja: Funkcja nierosnąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją nierosnącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definicję funkcji nierosnącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją nierosnącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$$

Definicja: Funkcja niemalejąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją niemalejącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definicję funkcji niemalejącej możemy również zapisać krócej.

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją niemalejącą w zbiorze A ,

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$$

Analizując definicje funkcji nierosnącej i niemalejącej, możemy zauważyć, że:

- każda funkcja rosnąca jest jednocześnie funkcją niemalejącą,
- każda funkcja malejąca jest jednocześnie funkcją nierosnącą,
- każda **funkcja stała** jest jednocześnie funkcją nierosnącą i niemalejącą.

Funkcje rosnące, malejące, stałe, nierosnące i niemalejące nazywamy **funkcjami monotonicznymi**.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = (x + 3)^2, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Wykażemy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -3)$ i rosnąca w przedziale $\langle -3, \infty)$.

Rozwiązanie:

a. $x \in (-\infty, -3)$

Założenie:

$$f(x) = (x + 3)^2, x_1, x_2 \in (-\infty, -3) \text{ oraz } x_1 < x_2.$$

Teza:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Dowód:

Obliczymy różnicę wartości funkcji dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 3)^2 - (x_2 + 3)^2$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$f(x_1) - f(x_2) = [(x_1 + 3) - (x_2 + 3)] \cdot [(x_1 + 3) + (x_2 + 3)]$$

Opuszczamy nawiasy zwykłe.

$$f(x_1) - f(x_2) = [x_1 - x_2 + 3 - 3] \cdot [x_1 + x_2 + 3 + 3]$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6)$$

Określimy znak otrzymanego iloczynu:

$$x_1 - x_2 < 0 - \text{z założenia wiemy, że } x_1 < x_2$$

$$x_1 + x_2 + 6 < 0 - \text{z założenia wiemy, że } x_1 < -3 \text{ i } x_2 < -3, \text{ zatem } x_1 + x_2 < -6.$$

$$\text{Stąd } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6) > 0.$$

Dla dowolnych liczb x_1, x_2 należących do przedziału $(-\infty, -3)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -3)$.

b. $x \in \langle -3, \infty)$

Z definicji funkcji rosnącej wiemy, że:

funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest rosnąca w zbiorze

$$A \subset X \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)].$$

$$x_1 \in \langle -3, \infty) \text{ i } x_2 \in \langle -3, \infty) \text{ i } x_1 < x_2$$

$$x_1 < x_2$$

Do obu stron nierówności dodajemy liczbę 3.

$$x_1 + 3 < x_2 + 3$$

Obie strony nierówności podnosimy do kwadratu.

$$(x_1 + 3)^2 < (x_2 + 3)^2$$

Znak nierówności nie ulega zmianie, ponieważ $x_1 + 3 \geq 0$ i $x_2 + 3 \geq 0$.

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Zatem prawdziwa jest implikacja

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow [f(x_1) < f(x_2)].$$

Stąd wniosek, że funkcja f jest **funkcją rosnącą** w przedziale $\langle -3, \infty \rangle$.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru

$$f(x) = \sqrt{6 - 3x}, \text{ gdy } x \in (-\infty, -2).$$

Określimy monotoniczność funkcji f .

Rozwiązanie:

$$x_1 \in (-\infty, -2) \text{ i } x_2 \in (-\infty, -2) \text{ i } x_1 < x_2 \text{ i } f(x) = \sqrt{6 - 3x}.$$

Określimy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$.

$$f(x_1) = \sqrt{6 - 3x_1}$$

$$f(x_2) = \sqrt{6 - 3x_2}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{6 - 3x_1} - \sqrt{6 - 3x_2}$$

Rozpatrzmy wyrażenie

$$\frac{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}}{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}}$$

Możemy zauważyć, że

1. $\sqrt{6 - 3x_1} + \sqrt{6 - 3x_2} > 0$, bo $x_1 \leq -2$ i $x_2 \leq -2$ oraz $x_1 < x_2$,
2. Różnicę $\sqrt{6 - 3x_1} - \sqrt{6 - 3x_2}$ możemy pomnożyć przez wyrażenie $\frac{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}}{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}} = 1$ bez zmiany jej wartości.

$$f(x_1) - f(x_2) = (\sqrt{6 - 3x_1} - \sqrt{6 - 3x_2}) \cdot \frac{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}}{\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2}}$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ i otrzymujemy:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(6-3x_1)-(6-3x_2)}{\sqrt{6-3x_1}+\sqrt{6-3x_2}} = \frac{-3(x_1-x_2)}{\sqrt{6-3x_1}+\sqrt{6-3x_2}}$$

Określmy znak otrzymanego wyrażenia:

- $x_1 < x_2$ czyli $x_1 - x_2 < 0$, stąd $-3(x_1 - x_2) > 0$ jako iloczyn dwóch liczb ujemnych.
- $\sqrt{6-3x_1} + \sqrt{6-3x_2} > 0$, jako suma dwóch wyrażen dodatnich.

Zatem $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Z warunku $x_1 < x_2 \leq -2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

To znaczy, że funkcja $f(x) = \sqrt{6-3x}$, gdy $x \in (-\infty, -2)$ jest funkcją malejącą.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} 0, 8x, & \text{gdy } x < 0 \\ -8x^2, & \text{gdy } x \geq 0 \end{cases}$$

Wykażemy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz malejąca w przedziale $(0, \infty)$.

Rozwiązanie:

a. $x \in (-\infty, 0)$

Założenie: $f(x) = 0, 8x$, $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ oraz $x_1 < x_2$.

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$.

Dowód:

Obliczymy różnicę wartości funkcji dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) - f(x_2) = 0, 8x_1 - 0, 8x_2 = 0, 8(x_1 - x_2)$$

Określmy znak otrzymanego iloczynu:

- $x_1 - x_2 < 0$ – z założenia wiemy, że $x_1 < x_2$,
- $0, 8(x_1 - x_2) < 0$ – iloczyn liczby dodatniej przez liczbę ujemną.

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Zatem prawdziwa jest implikacja

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow [f(x_1) < f(x_2)]$$

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją rosnącą w przedziale $(-\infty, 0)$.

b. $x \in (0, \infty)$

Założenie:

$$f(x) = -8x^2, x_1, x_2 \in \langle 0, \infty \rangle \text{ oraz } x_1 < x_2.$$

Teza:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Dowód:

Obliczymy różnicę wartości funkcji dla argumentów x_1 i x_2 oraz korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$$f(x_1) - f(x_2) = -8x_1^2 - (-8x_2^2) = -8(x_1^2 - x_2^2) = -8(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

Określimy znak otrzymanego iloczynu:

- $x_1 - x_2 < 0$ – z założenia wiemy, że $x_1 < x_2$,
- $x_1 + x_2 > 0$ – suma dwóch liczb dodatnich,
- $-8(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$ – iloczyn dwóch liczb ujemnych przez liczbę dodatnią.

$$\text{Zatem } f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

Z warunku $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Zatem prawdziwa jest implikacja

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow [f(x_1) > f(x_2)].$$

Stąd wniosek, że funkcja f jest **funkcją malejącą** w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \log_2(x + 5).$$

Określimy jej dziedzinę i wykażemy, że funkcja f jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.

Rozwiązanie:

Określimy dziedzinę funkcji f .

Z własności logarytmu wiemy, że liczba logarytmowana musi być liczbą dodatnią, czyli:

$$x + 5 > 0$$

$$x > -5$$

$$\text{Stąd } D_f = (-5, \infty)$$

Wykażemy, że funkcja $f(x) = \log_2(x + 5)$, gdy $x \in (-5, \infty)$ jest funkcją rosnącą.

Założenie: $f(x) = \log_2(x + 5)$, $D_f = (-5, \infty)$, $x_1, x_2 \in (-5, \infty)$, $-5 < x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód:

Obliczymy różnicę wartości funkcji dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) - f(x_2) = \log_2(x_1 + 5) - \log_2(x_2 + 5)$$

Określimy znak otrzymanej różnicy.

Z własności logarytmu wiemy, że gdy podstawa logarytmu jest liczbą większą od jednośc, to ten logarytm jest większy, którego liczba logarytmowana jest większa.

Z założenia wiemy, że:

- $x_1 < x_2$, czyli $x_1 + 5 < x_2 + 5$

Zatem $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

Prawdziwa jest implikacja

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow [f(x_1) < f(x_2)].$$

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją rosnącą w przedziale $(-5, \infty)$.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{3}, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Określimy jej monotoniczność.

Rozwiązanie:

Korzystając z własności pierwiastków arytmetycznych drugiego stopnia, możemy zapisać wzór funkcji f w inny, równoważny sposób.

$$f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{3} = \frac{|x+2|}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x+2), & \text{gdy } x < -2 \\ \frac{1}{3}(x+2), & \text{gdy } x \geq -2 \end{cases}$$

Określimy monotoniczność funkcji f .

Wzór funkcji składa się z dwóch wyrażeń.

a. $x \in (-\infty, -2)$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x+2), D_f = (-\infty, -2), x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2$$

Określimy znak różnicy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{3}(x_1 + 2) - \left[-\frac{1}{3}(x_2 + 2)\right] = -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

Wyznaczymy znak otrzymanego iloczynu:

- $x_1 < x_2$ czyli $x_1 - x_2 < 0$,
- $-\frac{1}{3}(x_1 - x_2) > 0$ – iloczyn dwóch liczb ujemnych.

Stąd $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

Zatem $f(x_1) > f(x_2)$.

Z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, -2)$.

b. $x \in \langle -2, \infty \rangle$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 2), D_f = \langle -2, \infty \rangle, x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2$$

Określimy znak różnicy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 2) - \left[\frac{1}{3}(x_2 + 2)\right] = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(x_1 - x_2)$$

Wyznaczymy znak otrzymanego iloczynu:

- $x_1 < x_2$ czyli $x_1 - x_2 < 0$,
- $\frac{1}{3}(x_1 - x_2) < 0$ – iloczyn dwóch liczb o różnych znakach.

Stąd $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

Zatem $f(x_1) < f(x_2)$.

Z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -2, \infty \rangle$.

Funkcja $f(x) = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{3}$, gdy $x \in \mathbb{R}$ jest funkcją malejącą w przedziale $(-\infty, -2)$ oraz funkcją rosnącą w przedziale $\langle -2, \infty \rangle$.

Ważne!

- Funkcja jest rosnąca, jeżeli większemu argumentowi odpowiada większa wartość funkcji.
- Funkcja jest malejąca, jeżeli większemu argumentowi odpowiada mniejsza wartość funkcji.
- Funkcja jest stała, jeżeli każdemu argumentowi odpowiada taka sama wartość funkcji.

Słownik

funkcja rosnąca

funkcja jest rosnąca, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów rosną jej wartości

funkcja malejąca

funkcja jest malejąca, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów maleją jej wartości

funkcja stała

funkcja jest stała, jeżeli dla wszystkich argumentów przyjmuje stałą, tę samą wartość

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w animacji. Najpierw samodzielnie rozwiąż zadania, a następnie porównaj swoje wyniki z pokazanymi w animacji rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D10VSGdoL>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący określania przedziałów monotoniczności.

Po zapoznaniu się z animacją, rozwiąż samodzielnie poniższe polecenia.

Polecenie 2

Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = x^2 - 2, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$ dla $x \in (0, 2)$. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Funkcja f jest nierosnąca.

☐ Funkcja f jest stała.

☐ Funkcja f jest stała w przedziałach $(0, 1)$ i $(1, 2)$.

☐ Funkcja f jest niemalejąca.

Ćwiczenie 2



Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^2 - 1$ dla $x \in (-1, 3)$. Przeciągnij w odpowiednie miejsca poprawne przedziały monotoniczności funkcji f .

f jest rosnąca w przedziale .

f jest malejąca w przedziale .

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |x - 1|$ dla $x \in (0, 4)$. Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

☐ $(0, 2)$

☐ $(0, 1)$

☐ $(0, 2)$

☐ $(0, 1)$

Ćwiczenie 5



Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja $f(x) = 3 - |x + 2|$ jest rosnąca.

☐ $(-\infty, -3)$

☐ $\langle -3, \infty)$

☐ $(-\infty, -2)$

☐ $\langle -2, \infty)$

Ćwiczenie 6



Podaj przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x^2, & \text{dla } x \in \langle -1, \infty) \end{cases}.$$

f jest rosnąca w przedziale .

f jest malejąca w przedziale .

f jest stała w przedziale .

$(-\infty, -1)$

$(-\infty, -1)$

$(-\infty, 0)$

$\langle -1, 0)$

$\langle 0, \infty)$

$\langle -1, \infty)$

$(-1, 0)$

Ćwiczenie 7



Podaj przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dla } x \in (-3, -1) \\ 1, & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ 5 - x, & \text{dla } x \in \langle 2, 4) \end{cases}.$$

f jest rosnąca w przedziale .

f jest malejąca w przedziale .

f jest stała w przedziale .

Ćwiczenie 8



Podaj przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{dla } x \in \langle -1, 0) \\ \sqrt{x}, & \text{dla } x \in \langle 0, 4) \\ -\frac{1}{2}x + 4, & \text{dla } x \in \langle 4, 8) \end{cases}.$$

f jest rosnąca w przedziale/przedziałach .

f jest malejąca w przedziale/przedziałach .

Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie przedziałów monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna sposoby określania monotoniczności funkcji opisanej za pomocą wzoru
- sprawdza, czy funkcja opisana za pomocą wzoru jest funkcją rosnącą, malejącą, czy stałą
- określa przedziały, w których funkcja opisana za pomocą wzoru maleje, rośnie lub jest stała
- udowadnia, że funkcja w podanym przedziale jest funkcją malejącą, rosnącą lub stałą

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- „praca bez słów”
- kosz i walizka
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie metodą „praca bez słów”, powtarzają wiadomości dotyczące sposobów wyznaczania dziedziny funkcji liczbowej. Nauczyciel zapisuje na tablicy wzór funkcji, dla której należy obliczyć dziedzinę. Uczeń, który ma ochotę wykonać obliczenia, podchodzi do tablicy, rozwiązuje zadanie. Jednocześnie, bez użycia słów, tłumaczy, w jaki sposób wykonał obliczenia. Na koniec chętni uczniowie uzupełniają regułę dotyczącą sposobów wyznaczania dziedziny funkcji liczbowej, rozpoczętą przez nauczyciela.
3. Podsumowując tę część zajęć, nauczyciel również nie używa słów, ale posługuje się gestami, symbolami, itp.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy, poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie”. Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest malejąca lub rosnąca i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie, stosując metodę kosza i walizki, wybierają najważniejsze umiejętności, które należy zapamiętać.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 – 8.
2. Zadanie dla chętnych:
Określ przedziały monotoniczności funkcji f , opisanej za pomocą wzoru $f(x) = \log_5(x^2 - 4)$.

Materiały pomocnicze:

[Monotoniczność funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację do powtórzenia wiadomości na temat monotoniczności funkcji.