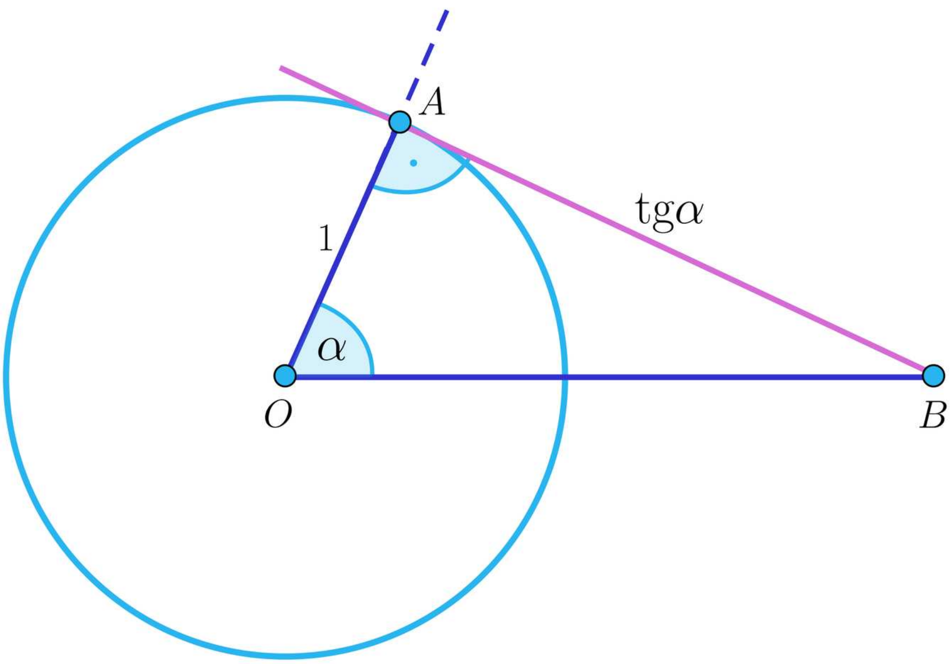
Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Funkcje trygonometryczne znajdują zastosowanie w wielu działach matematyki oraz w technice. Słowo tangens pochodzi od łacińskiego *tangere* – dotykający, styczny, co oznaczało długość odcinka stycznego do okręgu jednostkowego. Podczas lekcji wprowadzimy definicję funkcji tangens w kontekście trójkąta prostokątnego.



Twoje cele

- Poznasz definicję funkcji tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
- Wyznaczysz wartości funkcji tangens dla niektórych kątów.
- Zastosujesz definicję funkcji tangens w trójkącie prostokątnym do rozwiązywania problemów.

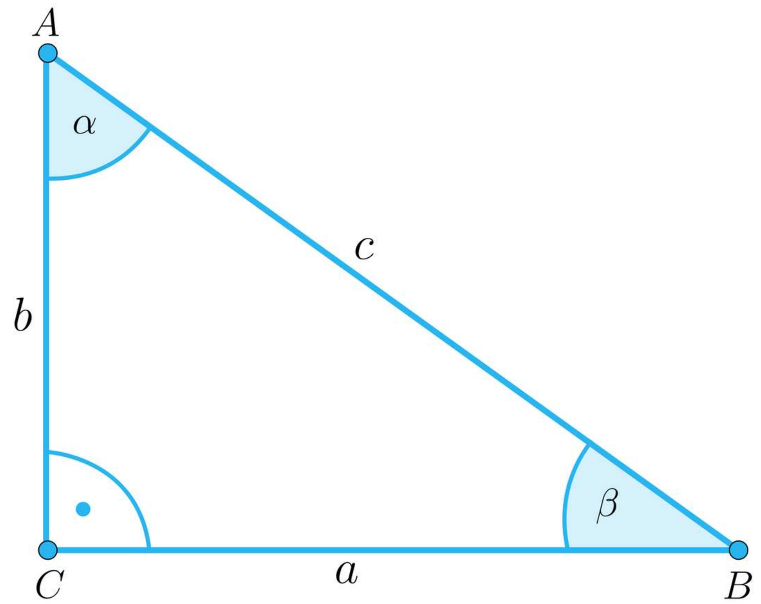
Przeczytaj

Już wiesz

- **Sinusem** kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej.
- **Cosinusem** kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej.

Definicja: Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw tego kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie.



Do oznaczenia funkcji tangens używa się skrótu **tg**.

Wzór funkcji możemy zapisać słownie:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta}}{\text{długość przyprostokątnej leżącej przy kącie}}$$

Zapisując wzór za pomocą symboli matematycznych, mamy, że:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Ważne!

Z przyjętych oznaczeń wynika, że $\beta = 90^\circ - \alpha$, więc $\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{a}$.

Ciekawostka

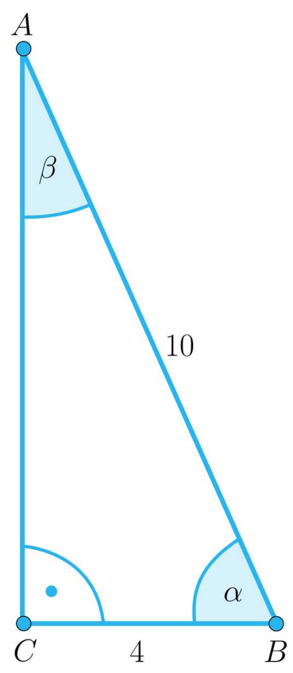
Odwrotność funkcji tangens możemy przedstawić jako funkcję cotangens, co zapisujemy w skrócie:

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

W wielu krajach do oznaczenia funkcji tangens używa się skrótu $\tan$. Stąd w wielu programach komputerowych, aby wyznaczyć tangens danego kąta musimy użyć właśnie tego skrótu.

Przykład 1

Obliczymy wartości tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym z rysunku.



Oznaczmy długość brakującej przyprostokątnej jako x.

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $x^2 + 4^2 = 10^2$.

Z równania wynika, że $x^2 = 84$, zatem $x = 2\sqrt{21}$ lub $x = -2\sqrt{21}$.

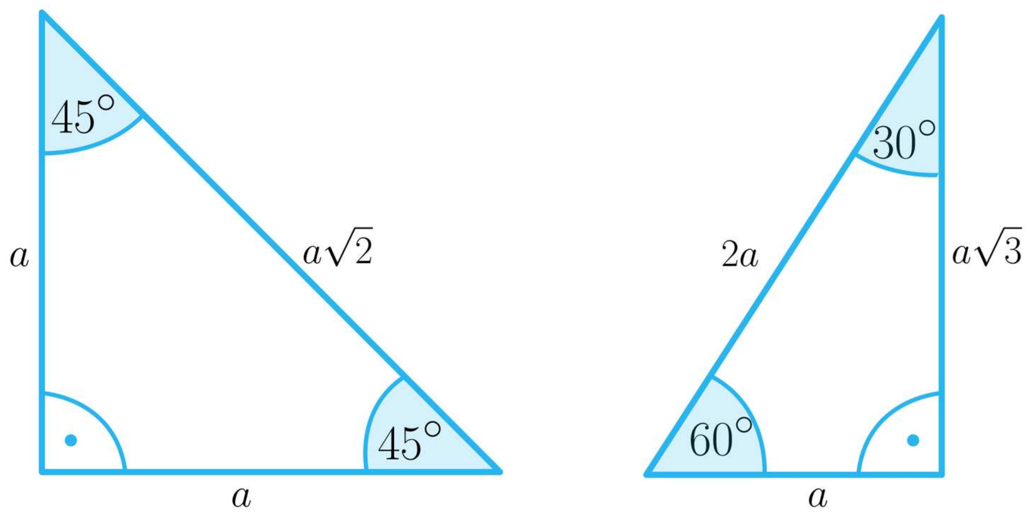
Ponieważ $x > 0$, więc $x = 2\sqrt{21}$.

Z definicji funkcji tangens otrzymujemy, że:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$,

$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{2\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$.

Wyznaczymy wartości tangensów niektórych kątów ostrych. Wykorzystamy do tego trójkąty charakterystyczne.



Korzystając z definicji funkcji tangens otrzymujemy, że:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

$$\operatorname{tg}60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

Przykład 2

Wyznaczymy wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ}$.

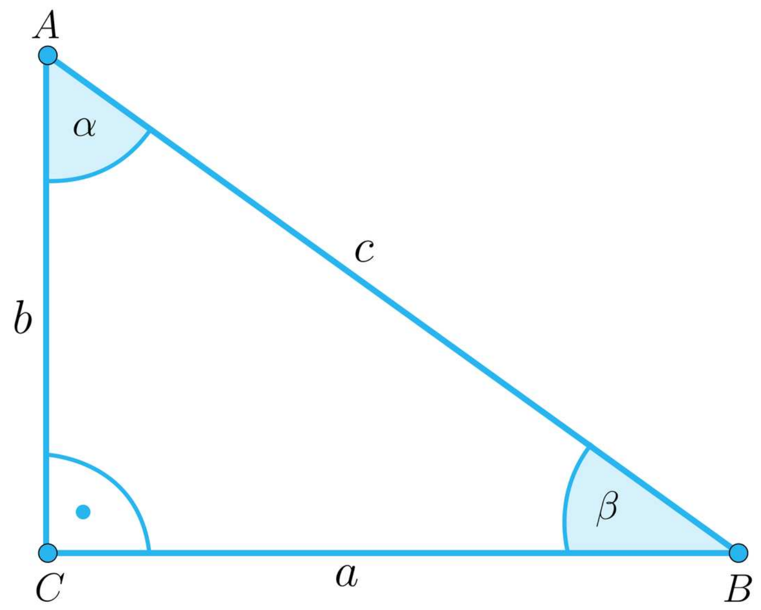
Po podstawieniu mamy

$\frac{\operatorname{tg}30^\circ + \operatorname{tg}45^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 3

Wiadomo, że suma tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 3. Obliczymy iloczyn sinusów tych kątów.

Wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Z rysunku mamy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 3$.

Stosując oznaczenia z rysunku, otrzymujemy równanie:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy, że:

$\frac{a^2+b^2}{ab} = 3$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $a^2 + b^2 = c^2$, więc mamy zależność $\frac{c^2}{ab} = 3$.

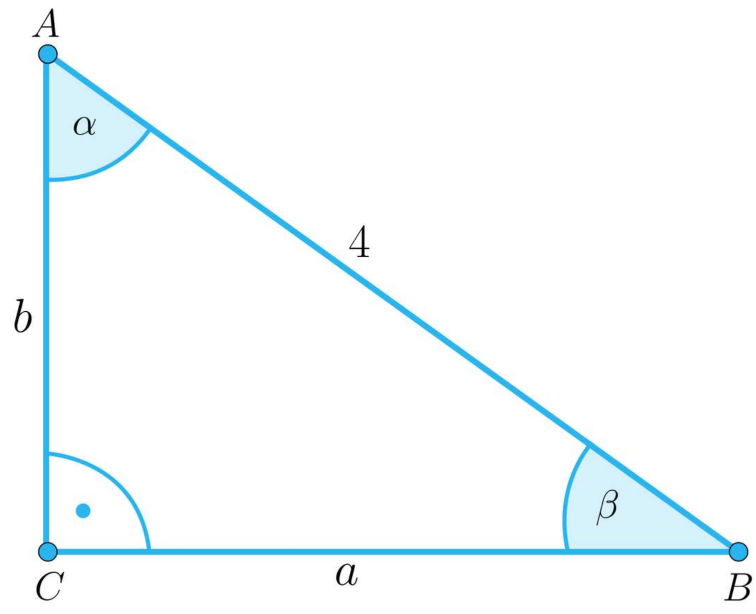
Równanie możemy zapisać w postaci $\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{3}$.

Zatem $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = \frac{1}{3}$.

Z definicji funkcji sinus otrzymujemy, że $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{3}$.

Przykład 4

Wyznaczymy długości przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej długości 4, jeżeli wiadomo, że tangens jednego kąta ostrego jest dwa razy większy od tangensa drugiego kąta ostrego.



Z warunków zadania wynika, że $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$ oraz $c = 4$.

Z trójkąta prostokątnego z rysunku mamy, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ oraz $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

Po podstawieniu do zależności $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$ mamy, że:

$\frac{a}{b} = 2 \cdot \frac{b}{a}$, czyli $a^2 = 2b^2$.

Zatem $a = \sqrt{2}b$ lub $a = -\sqrt{2}b$.

Ponieważ $a > 0$ i $b > 0$, więc $a = \sqrt{2}b$.

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $\left(\sqrt{2}b\right)^2 + b^2 = 4^2$, więc $3b^2 = 16$.

Zatem $b^2 = \frac{16}{3}$, czyli $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ lub $b = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ponieważ $b > 0$, więc $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Czyli $a = \sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Zatem przyprostokątne mają długości $a = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ oraz $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ważne!

Funkcja tangens jest funkcją rosnącą dla $\alpha \in (0, 90^\circ)$.

Słownik

tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przyprostokątnej leżącej przy kącie

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą definicji funkcji tangens oraz wyznaczania tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1FuIdTVo

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Polecenie 2

Wyznacz tangensy kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, jeżeli długości jego boków są kolejnymi liczbami parzystymi.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wiadomo, że suma tangensów kątów ostrych w trójkącie prostokątnym wynosi 2. Wyznacz iloczyn cosinusów tych kątów.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30°$, $45°$, $60°$;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje definicję funkcji tangens w trójkącie prostokątnym;
- odkrywa zależności występujące w trójkącie prostokątnym;
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja panelowa;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji w temacie: „Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym”.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Kolejne ćwiczenia nr 3-5 uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym”.