



Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych,
gdy dana jest wartość innej z funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość innej z funkcji

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Istnieje kilka różnych sposobów na wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych. W materiale posłużymy się trójkątem prostokątnym, prostokątnym układem współrzędnych oraz poznaczonymi wzorami z trygonometrii, nazywanymi tożsamościami trygonometrycznymi. Bazując na materiale teoretycznym oraz przedstawionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Obliczysz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej funkcji.
- Określisz znaki funkcji trygonometrycznych w różnych ćwiartkach układu współrzędnych.
- Wykorzystasz poznane wzory na jedynkę trygonometryczną i tangens dowolnego kąta do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych.
- Wyznaczysz wartości funkcji trygonometrycznych za pomocą trójkąta prostokątnego lub kąta skierowanego w układzie współrzędnych.

Przeczytaj

W materiale omówimy sposoby wyznaczania wartości funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej.

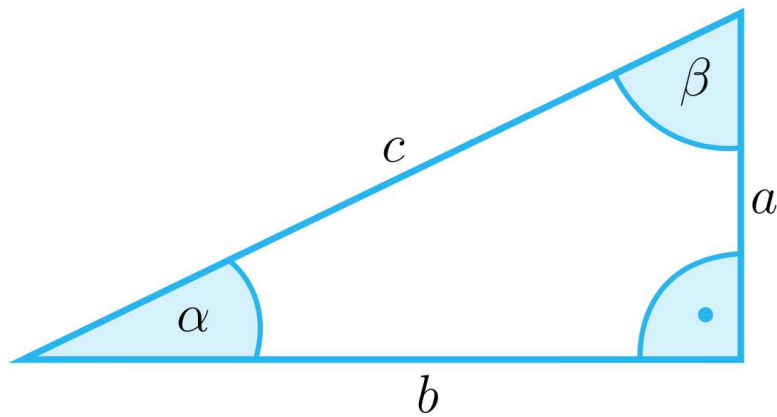
Ważne!

Jeżeli:

- $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, to $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$,
- $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha < 0$,
- $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha > 0$,
- $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, to $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$ oraz $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Sposoby wyznaczania wartości funkcji trygonometrycznych

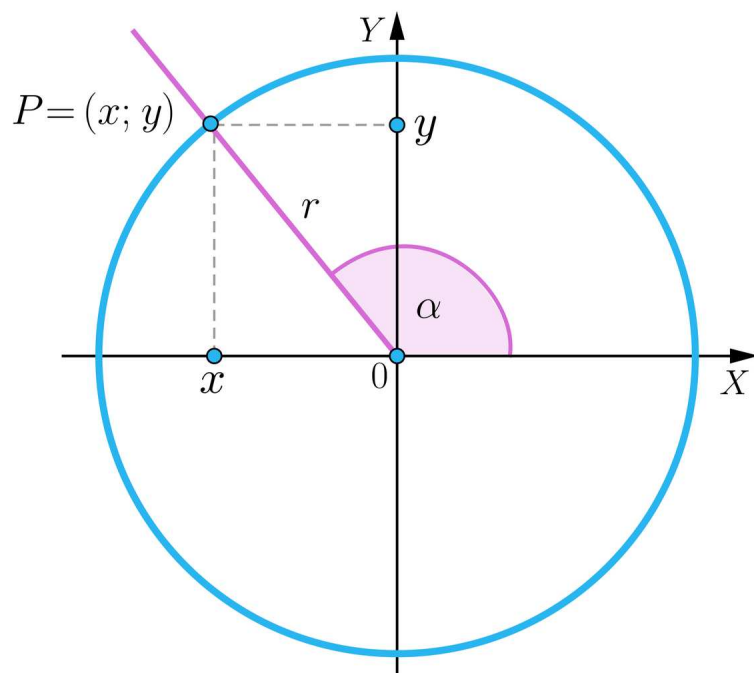
1. Z wykorzystaniem trójkąta prostokątnego



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c}, \cos \beta = \frac{a}{c}, \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}.$$

2. Z użyciem kąta skierowanego w prostokątnym układzie współrzędnych



$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \text{ oraz } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Za pomocą podstawowych tożsamości trygonometrycznych

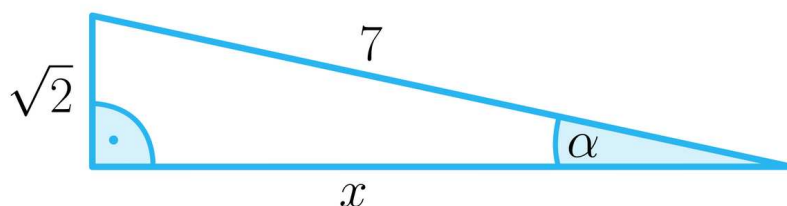
- jedynka trygonometryczna: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
- wzór na tangens dowolnego kąta: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, gdzie $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1

Wyznamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α , jeżeli $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$.

Rozwiązanie

Narysujmy trójkąt prostokątny i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, zapisujemy równanie:

$$x^2 + (\sqrt{2})^2 = 7^2.$$

Zatem $x^2 = 47$, więc $x = \sqrt{47}$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy, że:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{47}}{7},$$

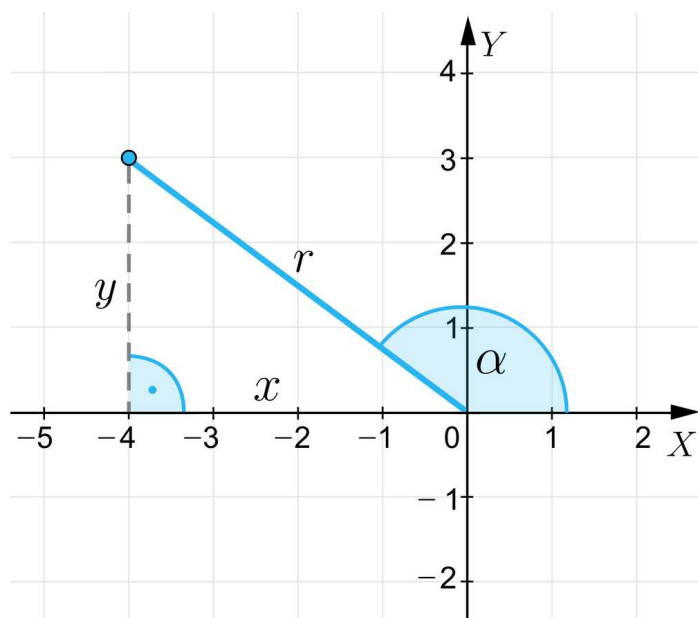
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{47}} = \frac{\sqrt{94}}{47}.$$

Przykład 2

Wyznamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$.

Rozwiązanie

Przedstawmy dane z zadania na rysunku w prostokątnym układzie współrzędnych.



Zatem $x = -4$ oraz $y = 3$.

Obliczamy $r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Korzystając ze wzorów na $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$, otrzymujemy, że:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ oraz } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Przykład 3

Wyznamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli wiadomo, że $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ oraz $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$.

Rozwiązanie

Po podstawieniu do wzoru na jedynkę trygonometryczną otrzymujemy, że $\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1$.

Rozwiązując równanie otrzymujemy, że $\sin^2 \alpha = \frac{24}{25}$, zatem $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ lub $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Ponieważ $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, więc $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Wobec tego $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$.

Przykład 4

Wyznamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 5$ oraz $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, otrzymujemy, że $5 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, więc $\sin \alpha = 5 \cdot \cos \alpha$.

Otrzymaną zależność podstawiamy do [tożsamości trygonometrycznej](#) - jedynki trygonometrycznej. Otrzymujemy równanie:

$$(5 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1.$$

Zatem $26 \cdot \cos^2 \alpha = 1$, więc $\cos \alpha = \frac{\sqrt{26}}{26}$ lub $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$.

Ponieważ $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, więc $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{26}$ oraz $\sin \alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

Jeżeli dana jest wartość jednej funkcji trygonometrycznej kąta, to pozostałe przybliżone wartości możemy odczytać z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

Przykład 5

Wiadomo, że $\operatorname{tg} \alpha = 0,2679$. Wyznamy wartość $\sin \alpha$ oraz $\cos \alpha$.

Rozwiązanie

Z tablic wartości funkcji trygonometrycznych odczytujemy, że $\alpha = 15^\circ$.

Następnie, korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytujemy, że:

$\sin \alpha = 0,2588$ oraz $\cos \alpha = 0,9659$.

Przykład 6

Wyznamy wartości funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli tangens tego kąta jest 3 razy większy od cosinusa kąta oraz $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$.

Rozwiązanie

Z danych w zadaniu wynika, że $\operatorname{tg} \alpha = 3 \cdot \cos \alpha$, zatem $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \cdot \cos \alpha$.

Z tej równości otrzymujemy, że $\cos^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{3}$.

Po podstawieniu tego wzoru do wzoru na jedynkę trygonometryczną otrzymujemy równanie:

$$\sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha}{3} = 1.$$

Jeżeli zrobimy podstawienie $t = \sin \alpha$, to równanie jest postaci:

$$3t^2 + t - 3 = 0.$$

$$\text{Obliczamy } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) = 37.$$

$$\text{Zatem } t_1 = \frac{-1 - \sqrt{37}}{6} \text{ oraz } t_2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}.$$

$$\text{Ponieważ } t = \sin \alpha \text{ oraz } t_1 < -1, \text{ zatem } \sin \alpha = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}.$$

Wobec tego:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}}{3} = \frac{-1 + \sqrt{37}}{18}, \text{ czyli } \cos \alpha = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{37}}{18}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 3 \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{37}}{18}}.$$

Słownik

funkcje trygonometryczne kąta ostrego

funkcje matematyczne wyrażające stosunek między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych

tożsamości trygonometryczne

podstawowa zależność pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Polecenie 2

Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli:

a) $\sin \alpha = \frac{5}{6}$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$,

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$ oraz $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Jeżeli $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ oraz $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$, to:

☐ $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}$.

☐ $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{15}$.

☐ $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ćwiczenie 2



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem tak, aby w danym oknie znajdowały się równości związane z tym samym kątem. Przenieś i upuść w wyznaczone miejsca. Możesz też kliknąć w odpowiedź, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową grupę.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego α :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{14}}{7}$$

Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego α :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Ćwiczenie 3



Wiadomo, że $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$. Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐ Wartość wyrażenia $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$ jest równa $\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

☐ Wartość $\cos \alpha$ wynosi $\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$.

☐ Wartość $\operatorname{tg} \alpha$ wynosi $\left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right)$.

☐ Wartość $\operatorname{tg} \alpha$ wynosi $\frac{\sqrt{42}}{21}$.

Ćwiczenie 4



Połącz w pary wartości funkcji trygonometrycznych tego samego kąta α , jeżeli α jest kątem ostrym.

$$\operatorname{tg} \alpha = 3$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ćwiczenie 5



Wstaw odpowiednie wartości funkcji trygonometrycznych. Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Jeżeli $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = -3$, to:

$$\sin \alpha = \boxed{},$$

$$\cos \alpha = \boxed{}.$$

Jeżeli $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$ oraz $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{10}$, to:

$$\sin \alpha = \boxed{},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \boxed{}.$$

$$-\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij tekst, wpisując odpowiednie liczby.

Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = 5$ oraz $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$, to $\sin \alpha = \boxed{} \cos \alpha$.

Zatem $\boxed{} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, czyli $\boxed{} \cos^2 \alpha = 1$.

Wobec tego $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{26}}{26}$.

Jeżeli $\operatorname{tg} \alpha = -2$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, to $\sin \alpha = \boxed{} \cos \alpha$.

Zatem $\boxed{} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, czyli $\boxed{} \cos^2 \alpha = 1$.

Wobec tego $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , jeżeli $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość innej z funkcji

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej funkcji,
- określa znaki funkcji trygonometrycznych w ćwiartkach układu współrzędnych,
- wykorzystuje poznane wzory na jedynkę trygonometryczną i tangens dowolnego kąta do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych,
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- metoda kota i myszy;
- liga zadaniowa;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość innej z funkcji” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 4-osobowych grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy; odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”, a następnie wykonują zawarte w tej części polecenie. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia najważniejsze etapy realizacji polecenia.
3. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 w sekcji „Sprawdź się” na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie wykonują metodą kot i mysz ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość innej z funkcji”).

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu wyznaczania wartości funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest wartość innej z funkcji.