



## Pole powierzchni graniastopu prawidłowego czworokątnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

Źródło: Ralph Ravi Kayden, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W geometrii przestrzennej znajdujemy takie problemy, których rozwiązanie jest o wiele łatwiejsze i szybsze, gdy rozpatrzemy ich analogiczny problem dwuwymiarowy. Takie podejście często jest stosowane przy obliczaniu pola powierzchni brył. W tym materiale dowiesz się, czym jest i w jaki sposób obliczyć pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.

### Twoje cele

- Zdefiniujesz pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.
- Obliczysz pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych dotychczas twierdzeń.

# Przeczytaj

Wśród ścian graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wyróżniamy dwie podstawy i cztery ściany boczne. Sumę powierzchni ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego nazywamy jego **powierzchnią boczną**. Zatem powierzchnia boczna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest sumą prostokątów a sumę pól tych prostokątów nazywamy **polem powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego**. Podstawami graniastosłupa prawidłowego czworokątnego są kwadraty a sumę ich pól nazywamy **polem podstaw graniastosłupa prawidłowego czworokątnego**.

## Definicja: Pole powierzchni całkowitej

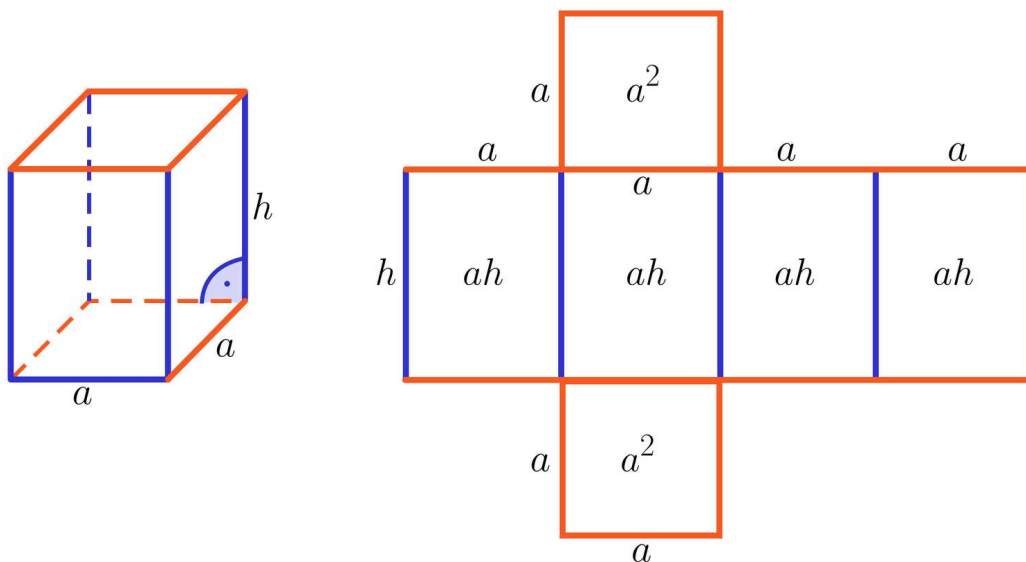
Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego definiujemy jako sumę pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej. Wobec tego pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe polu jego **siatki**. Zależność tę opisuje wzór:

$$P_c = 2P_p + P_b = 2a^2 + 4ah$$

gdzie:

$h$  – jest długością wysokości graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,

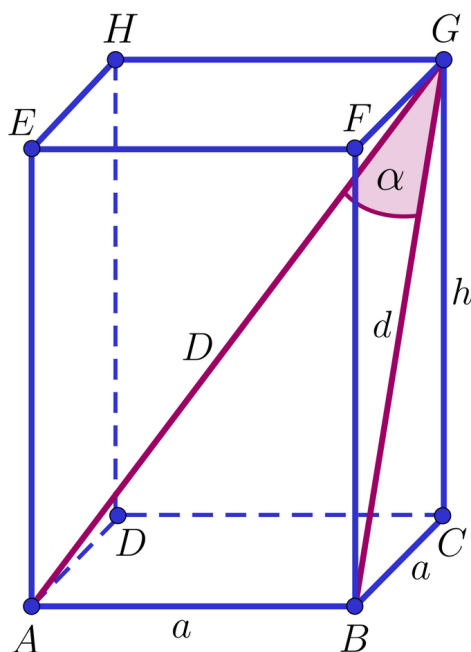
$a$  – jest długością krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego.



## Przykład 1

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCDEFGH$  przedstawionym na poniższym rysunku wysokość  $h$  jest o 2 dłuższa od krawędzi podstawy  $a$ . Przekątna  $D$

tego graniastosłupa tworzy z przekątną  $d$  ściany bocznej kąt  $\alpha$  taki, że  $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$ .  
Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



### Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że  $h = a + 2$ . Z trójkąta  $ABG$  mamy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{d} = 0,6, \text{ a stąd } a = 0,6d.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCG$  mamy:

$$d^2 = (a + 2)^2 + a^2 = 2a^2 + 4a + 4.$$

Po podstawieniu zależności  $a = 0,6d$ , wykonaniu działań oraz redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie:

$$7d^2 - 60d - 100 = 0.$$

Wyróżnik równania wynosi  $\Delta = (-60)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-100) = 6400$ .

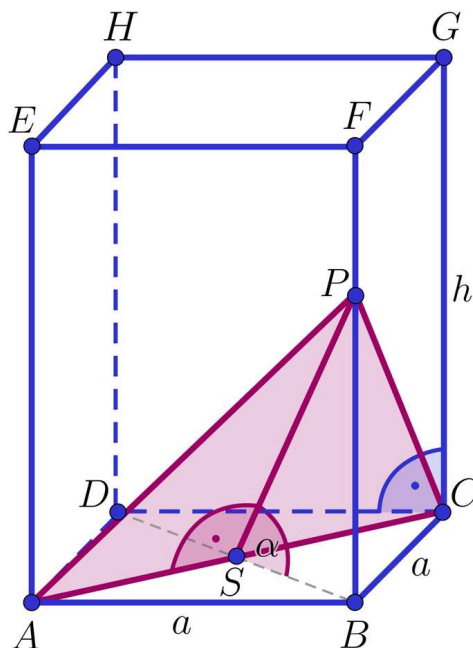
Otrzymujemy następujące rozwiązania:  $d = \frac{-10}{7} < 0$  lub  $d = 10$ . Stąd wynika, że  $a = 0,6d = 6$  oraz  $h = a + 2 = 8$ .

Obliczymy teraz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 264.$$

### Przykład 2

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCDEFGH$  przedstawionym na poniższym rysunku stosunek długości wysokości  $h$  do długości krawędzi podstawy  $a$  wynosi 2. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem ostrym, którego tangens wynosi  $2\sqrt{2}$ . Pole otrzymanego przekroju wynosi 24. Obliczmy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



### Rozwiązanie:

Przekrój  $APC$  jest trójkątem równoramiennym. Jego podstawą jest odcinek  $|AC| = a\sqrt{2}$ , a wysokością odcinek  $|PS|$ . Pole przekroju graniastosłupa obliczymy zatem ze wzoru  $P_{ACP} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot |PS|$ .

Wyznamy zależność wysokości  $|PS|$  od długości krawędzi graniastosłupa  $a$  z trójkąta prostokątnego  $PBS$ :

$$\cos \alpha = \frac{|SB|}{|PS|}.$$

$$\text{Stąd otrzymujemy, że } |PS| = \frac{|SB|}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cos \alpha}.$$

Wiemy, że  $\text{tg } \alpha = 2\sqrt{2}$ .

$$\text{Stąd } \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{2}, \text{ czyli } \sin \alpha = 2\sqrt{2} \cos \alpha.$$

Podstawiając tę zależność do [jedynki trygonometrycznej](#) otrzymujemy:

$$8 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ co daje: } \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Możemy obliczyć wysokość trójkąta  $APC$ :

$$|PS| = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Podstawiamy tę zależność do wzoru na pole przekroju i otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{2} = 24.$$

Stąd wyliczamy długość krawędzi podstawy  $a$  i wysokość  $h$ :

$$\frac{3}{2}a^2 = 24, \text{ czyli } a = 4$$

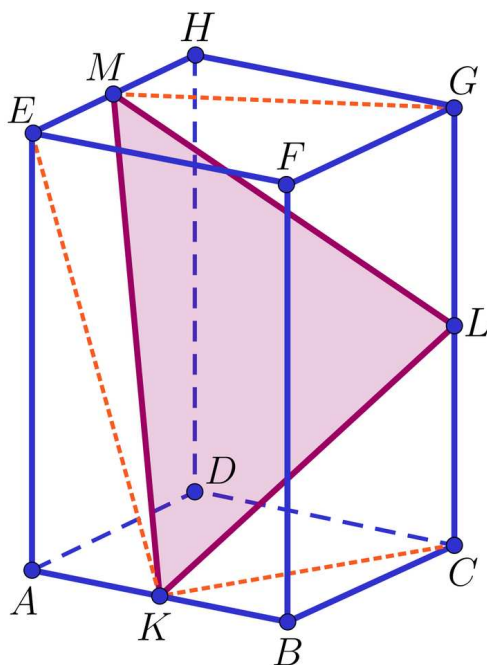
Wiemy, że  $\frac{h}{a} = 2$ , zatem wysokość graniastosłupa  $h = 2a$ , czyli:  $h = 8$ .

Obliczymy pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 16 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 160.$$

### Przykład 3

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCDEFGH$  przedstawionym na poniższym rysunku połączono środki trzech krawędzi graniastosłupa, z których żadne dwie nie leżą w jednej płaszczyźnie i otrzymano trójkąt równoramienny  $KLM$  o bokach długości 12, 12,  $12\sqrt{2}$ . Obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



### Rozwiązanie:

Niech  $a$  oznacza długość krawędzi podstawy rozważanego graniastosłupa prawidłowego czworokątnego,  $h$  oznacza długość jego wysokości.

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów  $KBC$ ,  $MHG$  oraz  $EAK$  otrzymujemy

$$|KC|^2 = |MG|^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{5}{4}a^2,$$

$$|KE|^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

Następnie stosujemy [twierdzenie Pitagorasa](#) dla trójkątów  $KCL$ ,  $KEM$ ,  $MGL$  i jednocześnie podstawiamy otrzymane wcześniej wyniki. Mamy:

W  $\triangle KCL$ :

$$|KL|^2 = |KC|^2 + |CL|^2$$

$$\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}h^2 = 144$$

W  $\triangle KEM$ :

$$|KM|^2 = |EM|^2 + |KE|^2$$

$$h^2 + \frac{1}{2}a^2 = 288$$

W  $\triangle MGL$ :

$$|LM|^2 = |KL|^2$$

$$\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}h^2 = 144$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}h^2 = 144 \\ h^2 + \frac{1}{2}a^2 = 288 \end{cases}$$

Rozwiązując układ, otrzymujemy

$$\begin{cases} \frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{4}h^2 = 144 \quad | \cdot 4 \\ h^2 + \frac{1}{2}a^2 = 288 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5a^2 + h^2 = 576 \\ h^2 + \frac{1}{2}a^2 = 288 \end{cases}$$

$$4, 5a^2 = 288$$

$$a^2 = 64$$

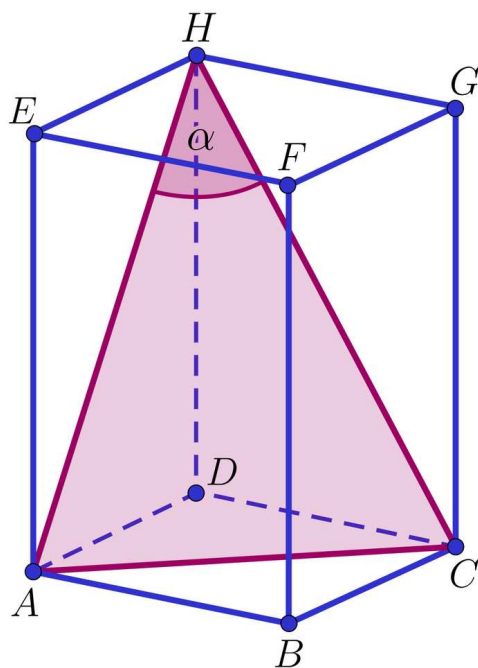
Stąd:  $a = 8$  oraz  $h = 16$ .

Obliczamy pole powierzchni całkowitej graniastopy:

$$P_{pc} = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 64 + 4 \cdot 8 \cdot 16 = 640.$$

#### Przykład 4

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym  $ABCDEFGH$  przedstawionym na poniższym rysunku o krawędzi podstawy długości 6 poprowadzono płaszczyznę przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i wierzchołek górnej podstawy. Płaszczyzna ta wyznaczyła przekrój graniastosłupa, który jest trójkątem równoramiennym. Wiedząc, że na tym trójkącie można opisać okrąg o promieniu  $5\sqrt{2}$  obliczymy pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



#### Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia  $|HC| = |AH| = d$  oraz  $\sphericalangle AHC = \alpha$ .

Z treści zadania mamy  $|AB| = |BC| = 6$ , stąd przekątna podstawy  $|AC| = 6\sqrt{2}$ .

Z [twierdzenia sinusów](#) dla trójkąta  $ACH$  mamy:

$$\frac{6\sqrt{2}}{2 \sin \alpha} = 5\sqrt{2}, \text{ zatem } \frac{3}{\sin \alpha} = 5, \text{ stąd } \sin \alpha = 0,6.$$

Korzystając z [jedynki trygonometrycznej](#) możemy wyliczyć wartość funkcji cosinus kąta  $\alpha$ . Mamy

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8.$$

Zastosujemy [twierdzenie cosinusów](#) do trójkąta  $ACH$ . Mamy

$$(6\sqrt{2})^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos \alpha,$$

$$72 = 2d^2 - 1,6d^2 = 0,4d^2,$$

$$d^2 = 180,$$

$$d = 6\sqrt{5}.$$

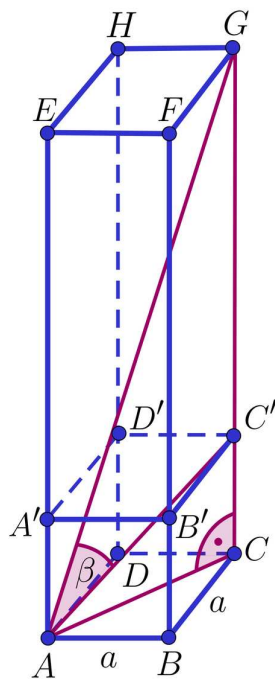
Stosując **twierdzenie Pitagorasa** do trójkąta  $ABE$  otrzymujemy:  $h = \sqrt{180 - 36} = 12$ .

Możemy obliczyć pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_c = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 36 + 4 \cdot 6 \cdot 12 = 360.$$

### Przykład 5

Z  $n$  jednakowych sześcianów zbudowano **graniastosłup prawidłowy czworokątny**  $ABCDEFGH$ .



Przekątna tego graniastosłupa o długości 9 tworzy z przekątną sześcianu  $ABCD A' B' C' D'$  kąt, którego cosinus jest równy  $\frac{7}{9}$ . Obliczymy, z ilu sześcianów zbudowany jest graniastosłup oraz jakie jest jego pole powierzchni całkowitej.

### Rozwiązanie:

Z treści zadania mamy  $|AG| = d = 9$  oraz  $\cos \beta = \frac{7}{9}$ .

Wprowadźmy oznaczenia:  $\sphericalangle C'AC = \alpha$ ,  $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = h = n \cdot a$ ,  $|CC'| = a$  oraz przekątna  $AC'$  sześcianu o krawędzi  $a$  ma długość  $a\sqrt{3}$ . Wynika stąd, że  $|C'G| = (n-1)a$  oraz  $|\sphericalangle GC'A| = 90^\circ + \alpha$ .

Z **jedyńki trygonometrycznej** oraz wzoru redukcyjnego  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$  otrzymujemy:

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

a w trójkącie  $ACC'$ :

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Zastosujemy **twierdzenie sinusów** w trójkącie  $AC'G$ . Mamy:

$$\frac{9}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{(n-1)a}{\sin \beta}.$$

Podstawiając wyliczone wcześniej wartości funkcji trygonometrycznych otrzymujemy:

$$\frac{9}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{(n-1)a}{\frac{4\sqrt{2}}{9}},$$

$$(n-1)a = \frac{9}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$(n-1)a = 4\sqrt{3}.$$

Zatem  $|CG| = a + 4\sqrt{3}$ . Zastosujemy **twierdzenie Pitagorasa** do trójkąta  $ACG$ :

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a + 4\sqrt{3}\right)^2 = 9^2,$$

Po wykonaniu potęgowania oraz redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$3a^2 + 8\sqrt{3}a - 33 = 0.$$

Wyróżnik równania wynosi  $\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-33) = 3 \cdot 196 = 588$ .

Otrzymujemy następujące rozwiązania:

$$a = \frac{-11\sqrt{3}}{3} < 0 \text{ (odrzucaamy, bo jest ujemne)} \text{ oraz } a = \sqrt{3}.$$

Zatem  $(n-1)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ , skąd wynika, że  $n = 5$ , czyli graniastosłup został zbudowany z 5 jednakowych sześcianów.

Możemy wyliczyć wysokość  $h$  graniastosłupa:  $h = n \cdot a = 5\sqrt{3}$ .

Obliczymy teraz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa

$$P_{pc} = 2a^2 + 4ah = 2 \cdot 3 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 66.$$

## Słownik

### **graniastosłup prawidłowy czworokątny**

graniastosłup prosty, którego podstawą jest kwadrat

### **siatka graniastosłupa prawidłowego czworokątnego**

przedstawienie graniastosłupa na płaszczyźnie w taki sposób, aby po wycięciu dało się złożyć jego model

### **twierdzenie sinusów**

w dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie

### **twierdzenie cosinusów**

w dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

### **twierdzenie Pitagorasa**

w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

### **jedynka trygonometryczna**

dla dowolnego kąta  $\alpha$  zachodzi tożsamość

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

# Animacja 3D

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie wykonaj polecenia zamieszczone pod animacją.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D7Qymog8E>

Film nawiązujący do treści materiału

---




## Polecenie 2

## Polecenie 3

W graniastostupie prawidłowym czworokątnym przekątna o długości  $2\sqrt{2}$  tworzy z wysokością graniastostupa kąt  $30^\circ$ . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

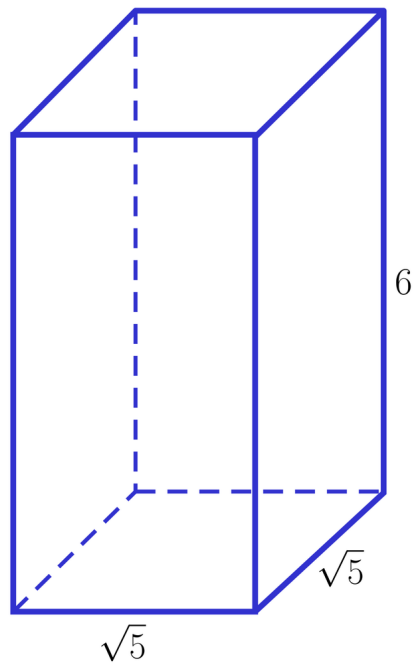
## Ćwiczenie 1



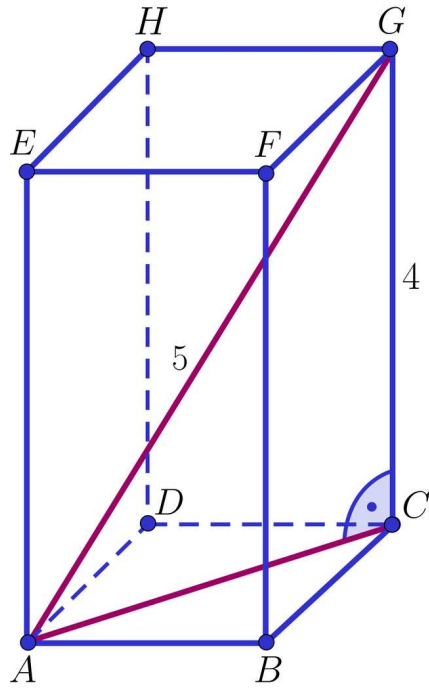
Na rysunkach poniżej przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny.

Na podstawie danych z rysunku oblicz pole powierzchni całkowitej i zaznacz prawidłową odpowiedź.

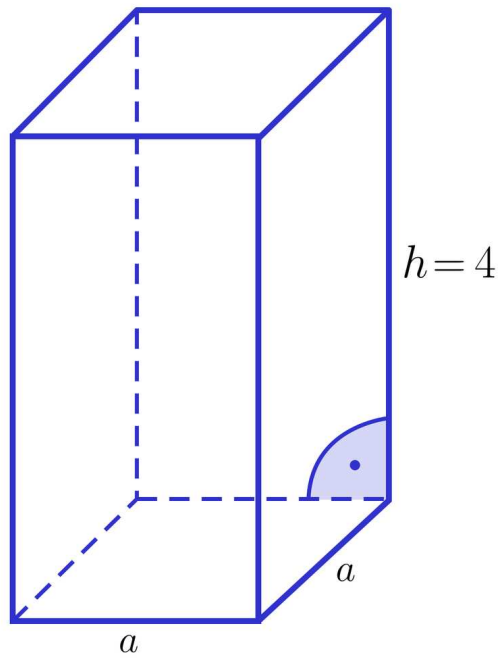
a)



b)



c)



$$V = 36$$

Ćwiczenie 2



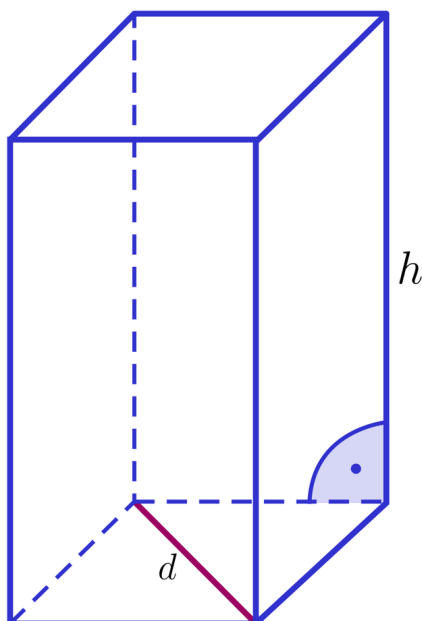
Ćwiczenie 3



#### Ćwiczenie 4



Na poniższym rysunku przedstawiono graniastosłup prawidłowy czworokątny.



#### Ćwiczenie 5



Przekątna graniastostupa prawidłowego czworokątnego ma długość  $\sqrt{66}$ , a jego objętość wynosi 100. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa, wiedząc, że jego wymiary (długość krawędzi podstawy i wysokości) są liczbami naturalnymi.

#### Ćwiczenie 6



W graniastostupie prawidłowym czworokątnym przekątna ściany bocznej ma długość  $p$  a przekątna podstawy ma długość  $d$ . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastostupa.

#### Ćwiczenie 7



Jaka powinna być długość krawędzi podstawy i wysokości graniastostupa prawidłowego czworokątnego, którego objętość jest równa 45 a pole powierzchni całkowitej wynosi 78? Krawędź podstawy i wysokość są liczbami całkowitymi dodatnimi.

## Ćwiczenie 8



W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod takim kątem  $\alpha$ , że  $\sin \alpha = 0,5$ . Objętość graniastosłupa jest równa 12000. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Agnieszka Niemczynowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X. Stereometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony.

Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna pojęcie pola powierzchni bocznej, pola powierzchni podstaw oraz pola powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego;
- wykorzystuje podstawowe własności graniastosłupów prostych i prawidłowych do obliczania jego pola powierzchni całkowitej;
- stosuje funkcje trygonometryczne oraz własności trójkątów prostokątnych do obliczania długości odpowiednich odcinków w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym;
- stosuje twierdzenie sinusów i cosinusów.

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- metoda tekstu przewodniego;
- dyskusja.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do Internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

- Uczniowie zapoznają się z treściami z poprzednich lekcji dotyczącymi graniastosłupów prostych, pochyłych i prawidłowych.

#### **Faza wstępna:**

1. Prowadzący wyświetla na tablicy interaktywnej zawartość sekcji „Wprowadzenie” i omawia cele do osiągnięcia w trakcie lekcji na temat: „Pole powierzchni graniastosłupa prawidłowego czworokątnego”.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami z sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w sekcji „Animacja 3D”. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują wspólnie polecenia nr 2–3 z sekcji „Animacja 3D”. Następnie nauczyciel omawia je wraz z uczniami wyjaśniając ewentualne wątpliwości.
4. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1–2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.
5. Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3–5 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza otrzymuje oceny za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6–7 z działu „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

#### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują ćwiczenie nr 8 z sekcji „Sprawdź się”.

#### **Materiały pomocnicze:**

[Pole powierzchni graniastosłupa](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Animację 3D można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału o graniastosłupach lub jako uzupełnienie materiału „Kąty między odcinkami w graniastosłupach”.