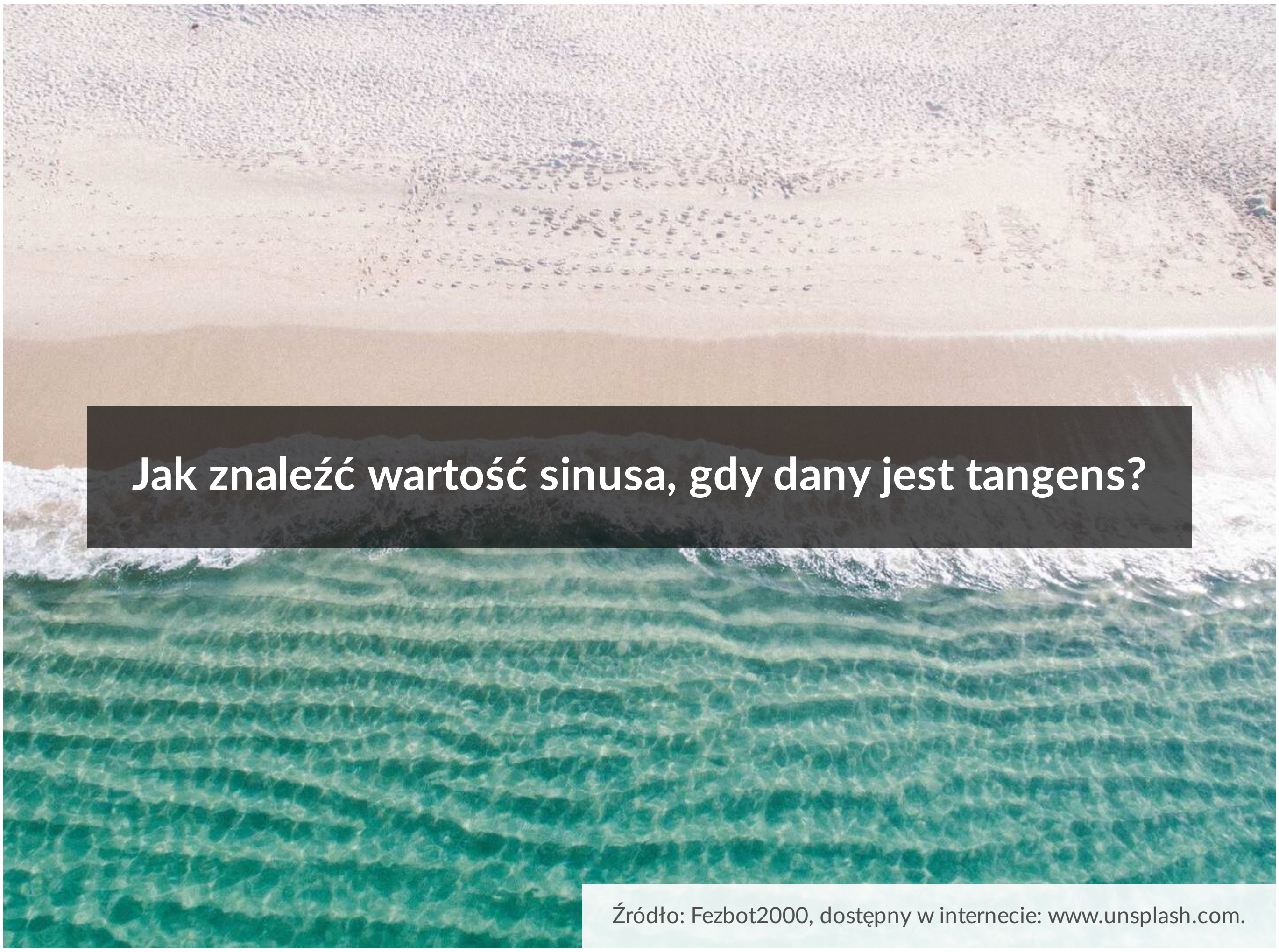
Jak znaleźć wartość sinusa, gdy dany jest tangens?



Źródło: Fezbot2000, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Nazwa tangens pochodzi od łacińskiego słowa *tangere* i oznacza dotykający, styczny. Prawdopodobnie pierwsze tablice tangensa zostały podane w IX wieku przez arabskiego matematyka. W tym materiale, mając dany tangens kąta ostrego, wyliczymy sinus tego kąta.

Twoje cele

- Wykorzystasz definicje funkcji trygonometrycznych kątów ostrych do rozwiązywania zadań.
- Zastosujesz związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego do rozwiązania zadań z planimetrii.
- Mając daną wartość funkcji tangens, wyznaczysz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.

Przeczytaj

W tym materiale wyznaczymy wartość sinusa kąta ostrego, gdy dany jest tangens tego kąta. Pokażemy dwie metody rozwiązywania tego typu problemów. Jeden sposób będzie opierał się na konstrukcji trójkąta prostokątnego o odpowiednich własnościach, drugi na związkach algebraicznych między funkcjami trygonometrycznymi.

I metoda: konstrukcyjna

Jeśli α jest kątem ostrym, to możemy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta obliczyć, budując trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α do drugiej przyprostokątnej jest równy wartości tangensa tego kąta.

Zapiszmy równanie dla kąta ostrego α : $\operatorname{tg} \alpha = k$, gdzie $k \in \mathbb{R}_{+}$.

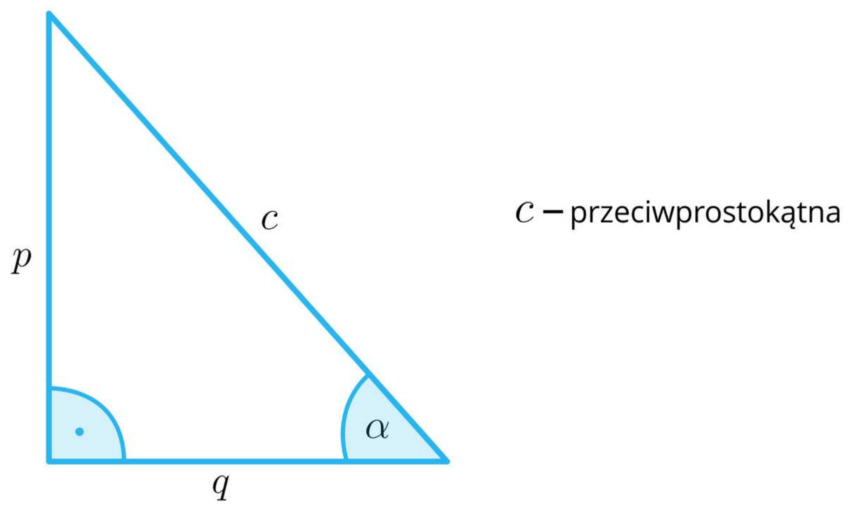
Każdą liczbę $k \in \mathbb{R}_{+}$ możemy zapisać w postaci $k = \frac{p}{q}$, gdzie $q \in \mathbb{Z}_{+}$.

Po zapisaniu $\operatorname{tg} \alpha$ w postaci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{q},$$

budujemy trójkąt, w którym przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta α jest długości p, a druga przyprostokątna jest długości q.

Teraz, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, wyznaczamy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = p^2 + q^2,$$

czyli

$$c=\sqrt{p^2+q^2}.$$

Stosując definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\sin\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \text{ oraz } \cos\alpha=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

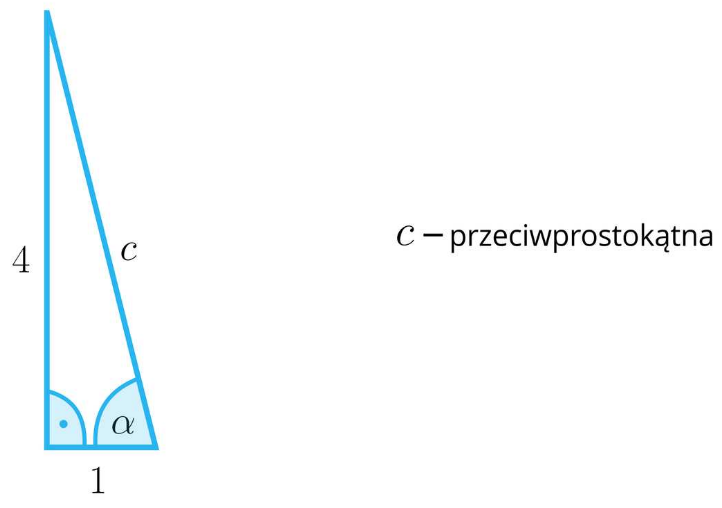
Przykład 1

Wyznaczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\operatorname{tg}\alpha=4$.

Zauważmy, że

$\operatorname{tg}\alpha=4=\frac{4}{1}$.

Zależność $\operatorname{tg}\alpha=4$ zachodzi zatem w dowolnym trójkącie o przyprostokątnych pozostających w stosunku $4:1$, w szczególności w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 i 1. Budujemy więc trójkąt prostokątny o przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α długości 4 i drugiej przyprostokątnej długości 1.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$c^2=4^2+1^2$,

stąd

$c=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

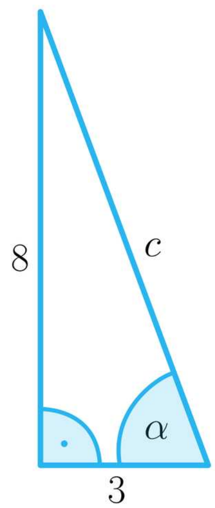
$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ i $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$.
Przykład 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{3}$ i α jest kątem ostrym, obliczymy wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, to możemy przyjąć, że długości przyprostokątnych wynoszą odpowiednio 8 i 3.

Budujemy trójkąt prostokątny o przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α o długości 8 i drugiej przyprostokątnej o długości 3.



Z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość przeciwprostokątnej.

$c^2 = 8^2 + 3^2$, stąd

$c = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym wyznaczamy wartości sinusa i cosinusa kąta α:

$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{8\sqrt{73}}{73}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{73}} = \frac{3\sqrt{73}}{73}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{8\sqrt{73}}{73}$ i $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{73}}{73}$.

II metoda: wykorzystanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

W tej metodzie, korzystając ze związków pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ i } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

pokażemy, jak można wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dany jest tangens kąta α w trójkącie prostokątnym kąta α.

Przyjmując $\operatorname{tg}\alpha = k$ i stosując wzór $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k$ i $\cos\alpha \neq 0$.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k, \text{ więc } \sin\alpha = k \cdot \cos\alpha.$$

Ponadto $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

$$\begin{cases} \sin\alpha = k \cdot \cos\alpha & (1) \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 & (2) \end{cases}$$

Podstawiając $\sin\alpha = k \cdot \cos\alpha$ do równania $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy:

$(k \cdot \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$k^2 \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\left(k^2 + 1\right)\cos^2\alpha = 1.$

Zatem $\cos^2\alpha = \frac{1}{k^2+1}$, a ponieważ funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych tylko wartości dodatnie, to:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Obliczamy teraz wartość $\sin\alpha$, podstawiając $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ do pierwszego równania:

$$\sin\alpha = k \cdot \cos\alpha = k \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Jeżeli $\operatorname{tg}\alpha = k$, to $\sin\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ oraz $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$.

Przykład 3

Wyznaczymy wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Jako, że $\operatorname{tg}\alpha = 2$, więc wykorzystując wzór $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, otrzymujemy, że $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, stąd: $\sin\alpha = 2 \cdot \cos\alpha$.

Rozwiązujemy układ równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$

$$\begin{cases} \sin\alpha = 2 \cdot \cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

Podstawiając $\sin\alpha = 2 \cdot \cos\alpha$ do równania $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy: $(2 \cdot \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$, co daje: $5 \cdot \cos^2\alpha = 1$ i ostatecznie: $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$.

Rozwiązaniem równania $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$ są liczby: $\sqrt{\frac{1}{5}}$ lub $-\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych tylko wartości dodatnie, zatem:

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Obliczoną wartość $\cos\alpha$ podstawiamy do równania $\sin\alpha = 2\cdot\cos\alpha$ i otrzymujemy:

$\sin\alpha = 2\cdot\cos\alpha = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Przykład 4

Wyznaczymy wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4\cdot\cos\alpha}$.

Skoro $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4\cdot\cos\alpha}$, to korzystając ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, mamy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4\cdot\cos\alpha}$.

Mnożymy obie strony równania $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4\cdot\cos\alpha}$ przez $\cos\alpha$, przy czym $\cos\alpha \neq 0$.

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{3}{4\cdot\cos\alpha}\cdot\cos\alpha$

Po skróceniu otrzymujemy: $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

Cosinus kąta α w trójkącie prostokątnym kąta α wyliczymy z zależności:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Podstawiając $\sin\alpha = \frac{3}{4}$, otrzymujemy:

$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Rozwiązaniem równania $\cos^2\alpha = \frac{7}{16}$ są dwie liczby $\frac{\sqrt{7}}{4}$ lub $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych tylko wartości dodatnie, więc $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, natomiast $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Przykład 5

Wyznaczymy sinus kąta α w trójkącie prostokątnym kąta ostego α, jeśli $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Skoro $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, to: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{5}$, zatem: $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}$.

Podstawiamy $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}$ do równania $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i otrzymujemy:

$\sin^2\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$, co daje: $\frac{6}{5}\cdot\sin^2\alpha = 1$ i ostatecznie: $\sin^2\alpha = \frac{5}{6}$.

Rozwiązaniem równania $\sin^2 \alpha = \frac{5}{6}$ są liczby: $\sqrt{\frac{5}{6}}$ lub $-\sqrt{\frac{5}{6}}$.

Funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych tylko wartości dodatnie, zatem

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

Odpowiedź: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$.

Słownik

sinus kąta α w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej a przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej c

cosinus kąta α w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej b przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej c

tangens kąta α w trójkącie prostokątnym

stosunek długości przyprostokątnej a przeciwległej do kąta α do przyprostokątnej b przyległej do kąta α

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą sposób wyznania wartości sinusa, gdy znany jest tangens. Rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D2gJ8uKlM

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej sinusów.

Polecenie 2

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 9$ i α jest kątem ostrym, oblicz wartości $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Polecenie 3

Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5} \sin \alpha$ i α jest kątem ostrym, wyznacz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak znaleźć wartość sinusa, gdy znany jest tangens

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45° i 60°;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- konstruuje trójkąt prostokątny, znając tangens (sinus lub cosinus) jednego kąta
- oblicza wartości funkcji trygonometrycznych, mając daną wartość jednej z nich
- przekształca wyrażenia stosując definicje funkcji trygonometrycznych oraz związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta
- analizuje zadania oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e‑podręcznik

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego (zapisują je na tablicy).
2. Uczniowie podają związki między funkcjami trygonometrycznymi (zapisują je na tablicy).
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na grupy 3‑osobowe.
2. Uczniowie w grupach analizują metodę opartą na zastosowaniu definicji funkcji trygonometrycznych do skonstruowanego trójkąta prostokątnego zawartą w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie przedyskutowują na forum całej klasy rozwiązania przykładów rozwiązanych I metodą zawartych w sekcji „Przeczytaj”.
4. Uczniowie w grupach analizują metodę opartą na wykorzystaniu związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta zawartą w sekcji „Przeczytaj”.
5. Uczniowie przedyskutowują na forum całej klasy rozwiązania przykładów rozwiązanych drugą metodą zawartych w sekcji „Przeczytaj”.
6. Nauczyciel prezentuje animację z metodami rozwiązywania zadań.
7. Uczniowie samodzielnie rozwiązują wybraną przez siebie metodą zadania znajdujące się pod animacją – porównują swoje rozwiązania z rozwiązaniem znajdującym się

w odpowiedzi.
8. Uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
9. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie pozostałych ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego – Przykłady
- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego – Zadania. Część I

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać w przygotowaniu się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.