



## Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

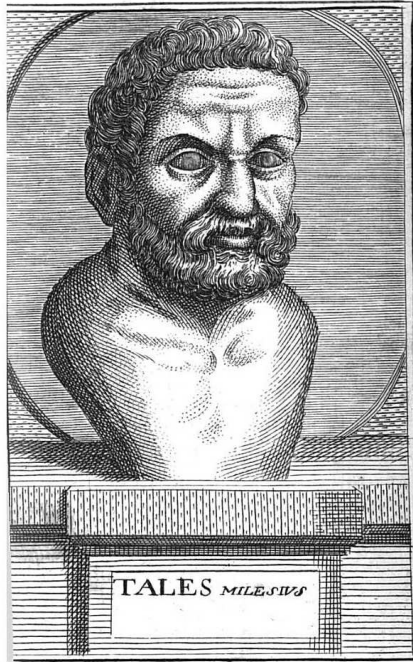
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

Źródło: Gordon Johnson, dostępny w internecie: [pixabay.com](https://pixabay.com), domena publiczna.

**Tales z Miletu** (VII lub VI w. p. n. e.) jest powszechnie uznawany za pierwszego filozofa i matematyka cywilizacji zachodniej oraz za inicjatora badań nad przyrodą jako nauki. Postrzega się go jako pierwszego filozofa głównie dlatego, że zainicjował wyjaśnianie rzeczywistości przez odwoływanie się do natury i rozumu bardziej niż do mitologii i tradycji. Według legendy Tales wyznaczył wysokość piramidy w Egipcie na podstawie długości cienia rzuconego przez kij, czym wprowadził w zdumienie kapłanów. Tales wykorzystał zależność, którą dziś nazywamy twierdzeniem Talesa. Zależność ta opisuje proporcje długości odcinków, jakie powstały na ramionach kąta przeciętego dwiema równoległymi prostymi. Twierdzenie Talesa jest jednym z najważniejszych twierdzeń geometrii. Najstarszy zachowany dowód zamieszczony jest w VI księdze Elementów Euklidesa (VI w. p. n. e.). W tym miejscu należy zadać pytanie dlaczego ucząc się w szkole o twierdzeniu Talesa tak często pomija się ten piękny dowód Euklidesa, który przecież odwołuje się tylko do dobrze znanego pojęcia pola trójkąta. W tym materiale poznasz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.



Tales z Miletu

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.



## T H A L È S.

ÉRODOTE. Duris & Démocrite disent, que Thalès naquit d'Examius & de Cléopuline, qui étoit issue de Thélides, famille fort illustre parmi les Phéniciens, selon Platon, qui fait descendre cette maison de Cadmus & d'Agénor. Thalès est le premier qui porta le nom de Sage; il florissoit lorsque Damafias étoit Archonte d'Athènes; & ce fut aussi dans ce tems-là que les autres Sages furent ainsi nommés, comme le rapporte Démétrius de Phalere dans son *Histoire des Archontes*.

Ce Philosophe ayant suivi Nilée à son départ de Phénicie, son Pays natal, obtint à Milet le droit de Bourgeoisie; d'autres conjecturent pourtant qu'il y prit naissance d'une maison noble du lieu. Après avoir vaqué aux affaires de l'Etat, il résolut de consacrer tous ses soins à la contemplation de la Nature. Quelques-uns croyent qu'il n'a laissé aucun Ouvrage à la Postérité. On le fait Auteur de l'Astrologie Marine, mais on est redoublé de cet Ouvrage à Phocus de Samos. Calli-

### Twoje cele

- Sformułujesz twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.
- Poznasz własność odcinka łączącego środki ramion w trójkącie.
- Zastosujesz poznane fakty i twierdzenia do rozwiązywania problemów geometrycznych.

# Przeczytaj

## Twierdzenie: Talesa wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego

Różne proste  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $P$ , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

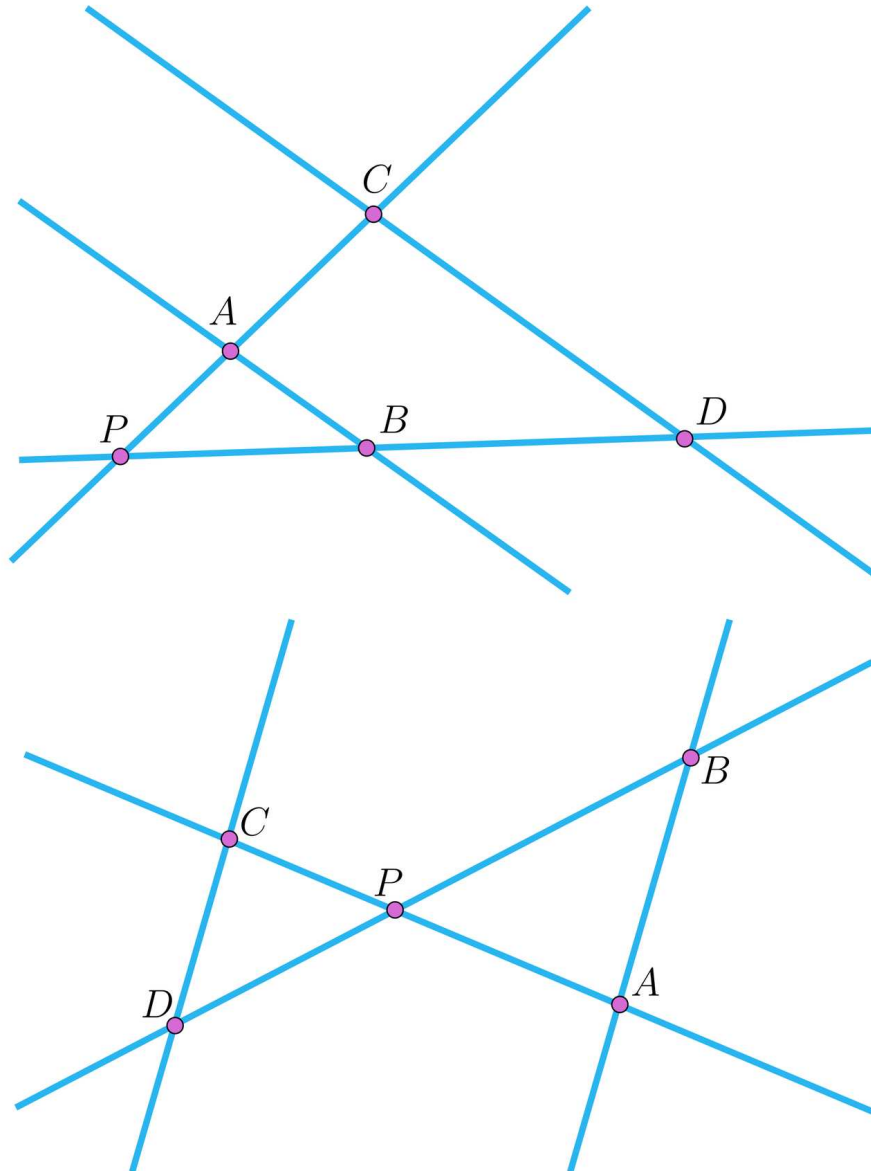
1. punkt  $A$  leży wewnątrz odcinka  $PC$  oraz punkt  $B$  leży wewnątrz odcinka  $PD$

lub

2. punkt  $A$  leży na zewnątrz odcinka  $PC$  oraz punkt  $B$  leży na zewnątrz odcinka  $PD$ .

Wówczas proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|PB|}{|BD|}.$$



Ostatnią równość można zapisać równoważnie:

$$\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|PC|}{|PD|}.$$

### Uwaga!

Powołując się na twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa należy uwzględnić konfigurację punktów na prostych (lub na ramionach kąta). Łatwo bowiem możemy uzyskać twierdzenie, które przy braku dodatkowych założeń jest **nieprawdziwe**, co obrazuje następujący przykład.

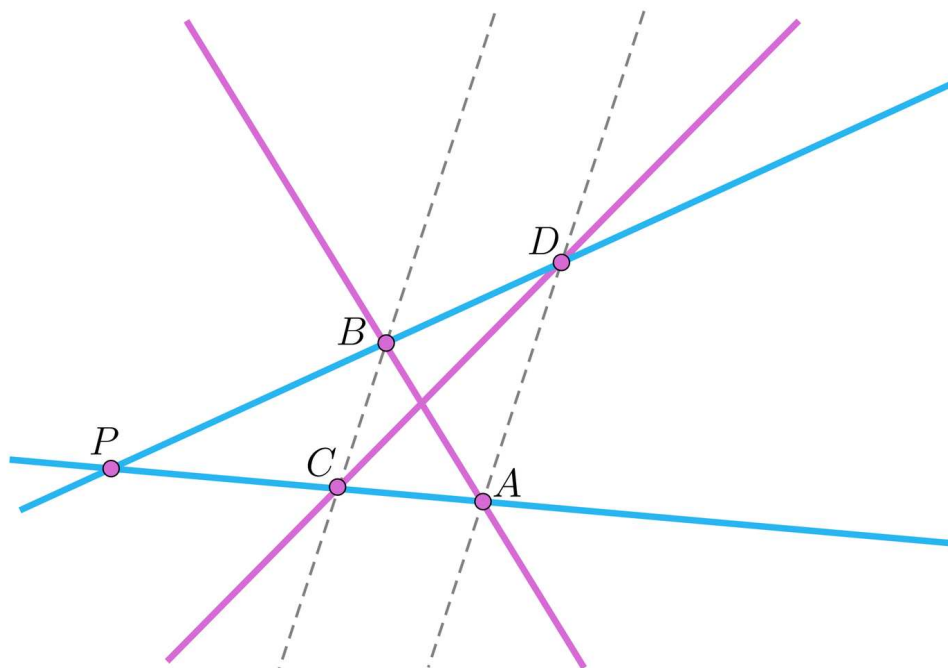
#### Przykład 1

Niech ramiona kąta o wierzchołku  $P$  przecięte są dwiema prostymi  $AB$  i  $CD$ , przy czym punkty  $A, C$  należą do jednego ramienia kąta, punkty  $B, D$  do drugiego.

Jeśli zachodzi:  $\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|PD|}{|BD|}$ , to proste  $AB$  i  $CD$  nie muszą być równoległe.

Sporządzimy rysunek obrazujący, że przy poprawnych założeniach proste  $AB$  i  $CD$  nie są równoległe.

#### Rozwiązanie



### Uwaga!

Aby uniknąć podobnych problemów, należy uzupełnić o informacje o uporządkowaniu punktów.

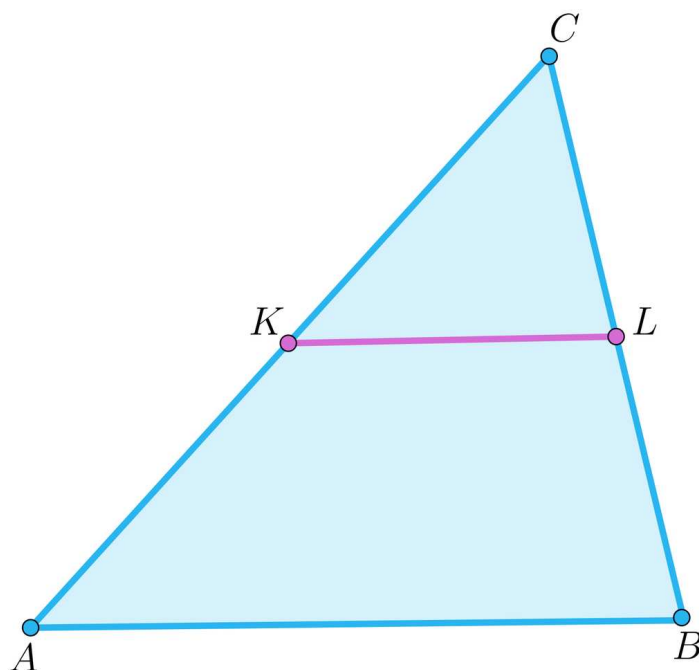
Na przykład punkt  $A$  leży między punktami  $P, C$ ; natomiast punkt  $B$  leży między punktami  $P, D$ . W przypadku, gdy powołujemy się na proporcję odcinków powstałych na ramionach kąta można uniknąć tych założeń, gdy podaje się proporcję odcinków o jednym z końców w wierzchołku tego kąta.

## Linia środkowa w trójkącie i w trapezie

### Przykład 2

Punkty  $K$  i  $L$  są odpowiednio środkami boków  $AC$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$ . Udowodnimy, że proste  $KL$  i  $AB$  są równoległe.

### Rozwiązanie



Zauważmy, że  $\frac{|CK|}{|CA|} = \frac{|CL|}{|CB|} = \frac{1}{2}$  więc na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa proste  $KL$  i  $AB$  są równoległe.

Powyższy fakt nazywany jest również twierdzeniem o odcinku łączącym środki ramion w trójkącie, a odcinek  $KL$  **linią środkową w trójkącie**.

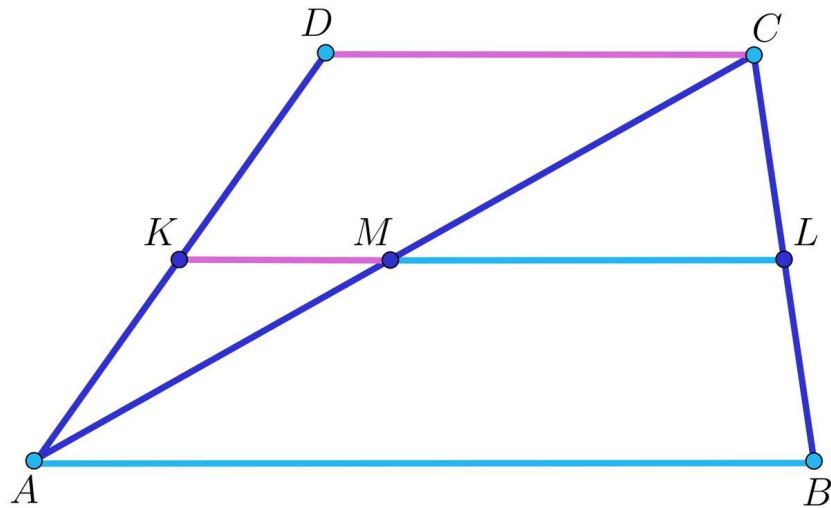
Ponadto długość odcinka  $KL$  jest równa połowie długości podstawy  $AB$ .

### Przykład 3

Wykażemy, że w trapezie niebędącym równoległobokiem odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw.

### Rozwiązanie

Niech  $AB$  i  $CD$  to podstawy trapezu. Środki ramion  $AD$ ,  $BC$  oraz przekątnej  $AC$  oznaczmy odpowiednio  $K$ ,  $L$ ,  $M$ , tak jak na rysunku.

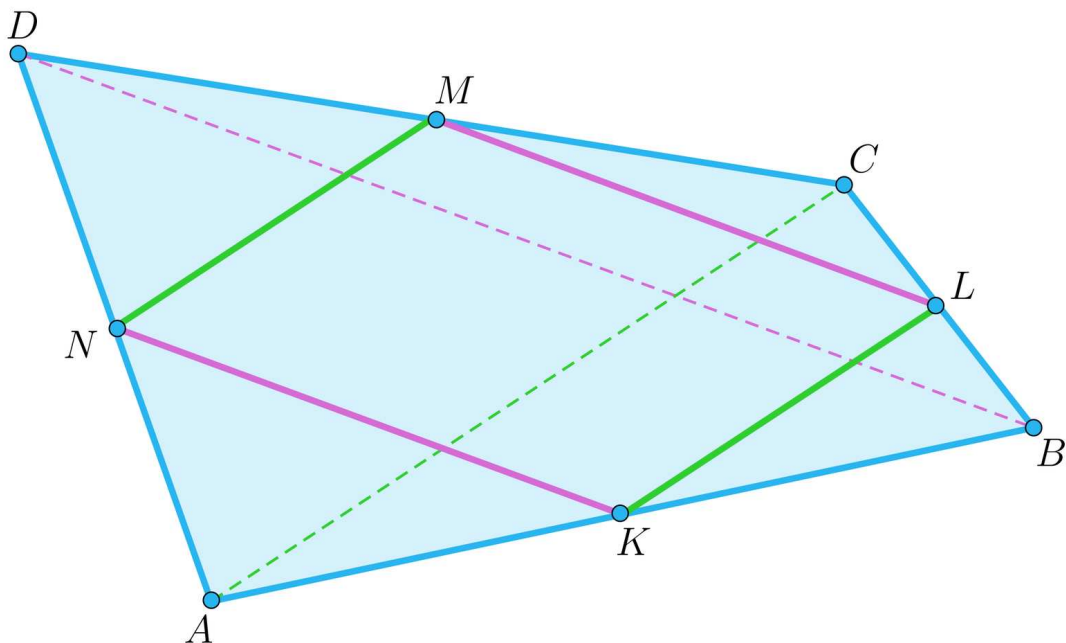


Powołując się na twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa lub na twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion w trójkącie, otrzymujemy, że prosta  $KM$  jest równoległa do prostej  $DC$  i prosta  $ML$  jest równoległa do prostej  $AB$ . Z faktu, że proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe wynika, że proste  $KM$  oraz  $ML$  też są równoległe. Ponieważ mają one punkt wspólny –  $M$ , to punkty  $K, M, L$  leżą na jednej prostej, równoległej do podstaw trapezu. Odcinek  $KL$  nazywany jest **linią środkową w trapezie**.

#### Przykład 4

Wykażemy, że środki boków dowolnego czworokąta  $ABCD$  są wierzchołkami równoległoboku.

#### Rozwiązanie



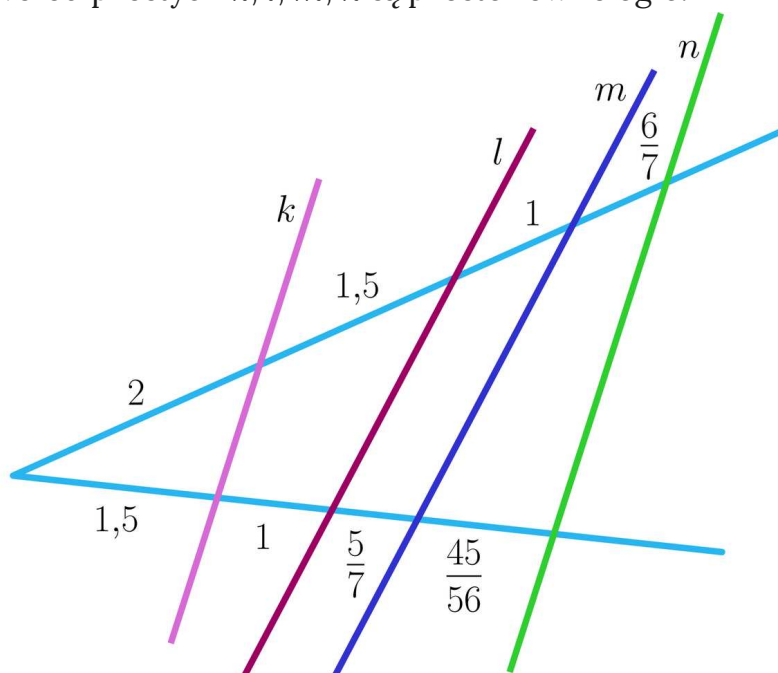
Ten piękny fakt wynika bezpośrednio z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa lub z twierdzenia o odcinku łączącym środki ramion w trójkącie. Nazwijmy środki boków  $AB, BC, CD, DA$  odpowiednio  $K, L, M, N$ . Na podstawie powyższych obserwacji stwierdzamy, że prosta  $KL$  oraz prosta  $MN$  są równoległe do przekątnej  $AC$ .

Analogicznie prosta  $KN$  oraz prosta  $LM$  są równoległe do przekątnej  $BD$ .  
Równoległości te potwierdzają tezę powyższego twierdzenia.

Warto dodać, że powyższy fakt jest prawdziwy również gdy czworokąt  $ABCD$  nie jest wypukły. Jeżeli w założeniach zadaniach dodamy wypukłość, to okazuje się, że pole powstałego równoległoboku jest równe połowie pola wyjściowego czworokąta.

### Przykład 5

Sprawdźmy, czy wśród prostych  $k, l, m, n$  są proste równoległe.



### Rozwiązanie

Sprawdźmy, czy  $k$  i  $l$  są równoległe, tj. czy zachodzi równość  $\frac{2}{1,5} \stackrel{?}{=} \frac{1,5}{1}$ . Oczywiście nie, więc proste  $k$  i  $l$  nie są równoległe.

Sprawdźmy, czy  $k$  i  $m$  są równoległe, tj. czy zachodzi równość  $\frac{2}{1,5} \stackrel{?}{=} \frac{2,5}{\frac{12}{7}}$ . Oczywiście nie, więc proste  $k$  i  $m$  nie są równoległe.

Sprawdźmy, czy  $k$  i  $n$  są równoległe, tj. czy zachodzi równość  $\frac{2}{1,5} \stackrel{?}{=} \frac{2,5 + \frac{6}{7}}{1 + \frac{5}{7} + \frac{45}{56}}$ . Uprośćmy prawą stronę:  $P = \frac{2,5 + \frac{6}{7}}{1 + \frac{5}{7} + \frac{45}{56}} = \frac{\frac{47}{14}}{\frac{141}{56}} = \frac{4}{3}$ , więc proste  $k$  i  $n$  są równoległe.

Sprawdźmy, czy proste  $l$  i  $m$  są równoległe, tj. czy zachodzi równość  $\frac{3,5}{2,5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\frac{5}{7}}$ .

Oczywiście tak, więc proste  $l$  i  $m$  są równoległe.

## Słownik

kąt

kąt to obszar powstały z rozcięcia płaszczyzny przez sumę dwóch różnych półprostych o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi; półproste nazywane są ramionami kąta, wspólny początek półprostych nazywany jest wierzchołkiem kąta

**linia środkowa w trójkącie**

linia środkowa w trójkącie to odcinek łączący środki pewnych dwóch boków trójkąta

**linia środkowa w trapezie**

linia środkowa w trapezie to odcinek łączący środki ramion trapezu

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1




Zapoznając się z galerią zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zadania, a dopiero następnie porównaj rozwiązania.

---

## Polecenie 2

Przekątne czworokąta  $ABCD$  przecinają się pod kątem prostym. Ich długości to odpowiednio  $|AC| = 10$  i  $|BD| = 20$ . Oblicz pole czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków czworokąta  $ABCD$ .

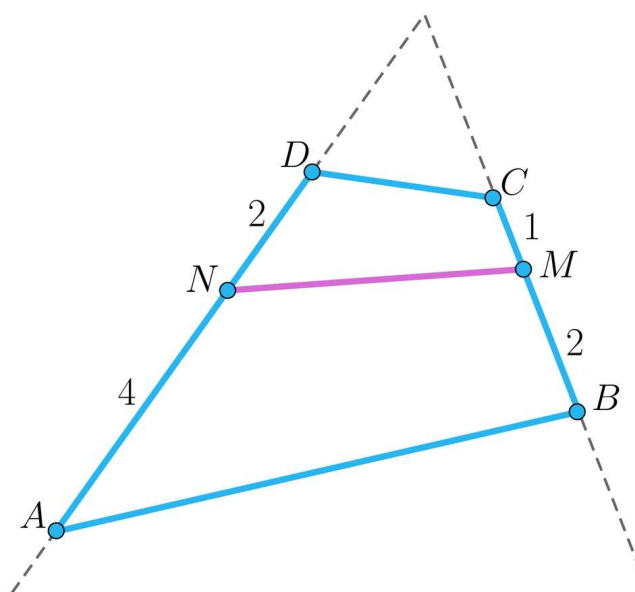
# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Na bokach  $BC$  i  $CD$  wybrano takie punkty  $M$  i  $N$ , że  $\frac{|BM|}{|MC|} = \frac{|AN|}{|ND|}$ .



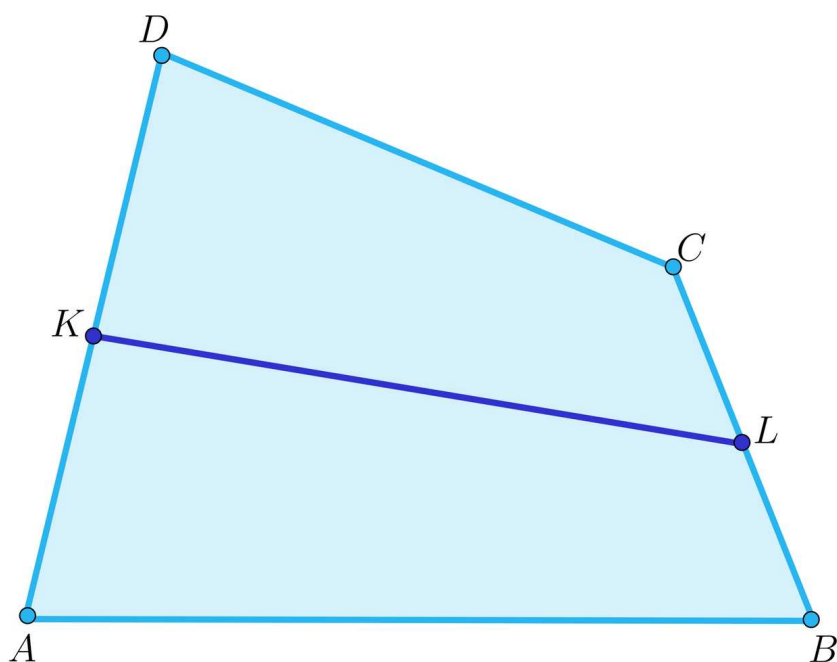
## Ćwiczenie 2



### Ćwiczenie 3



Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  są odpowiednio środkami boków  $AD$  i  $BC$  (rysunek). Udowodnij, że  $|KL| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$ .



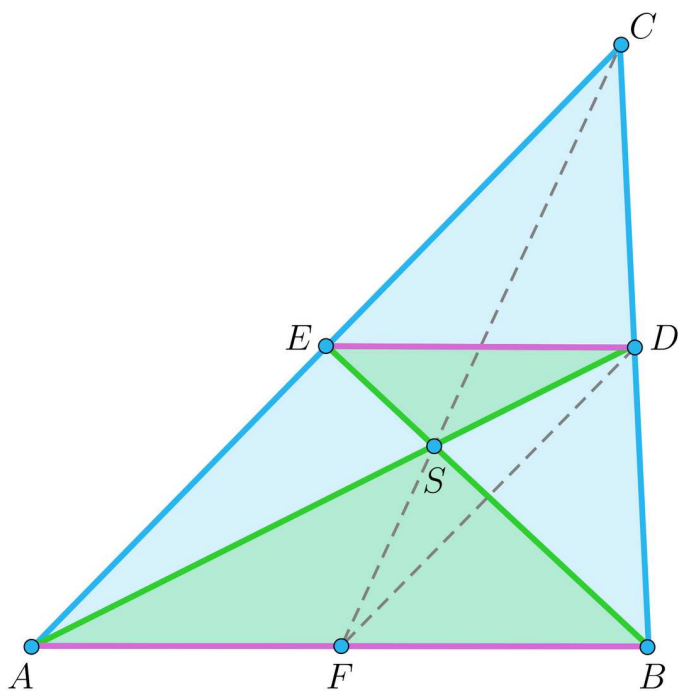
### Ćwiczenie 4



## Ćwiczenie 5



Uzasadnij, że środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie i że dzieli on każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.

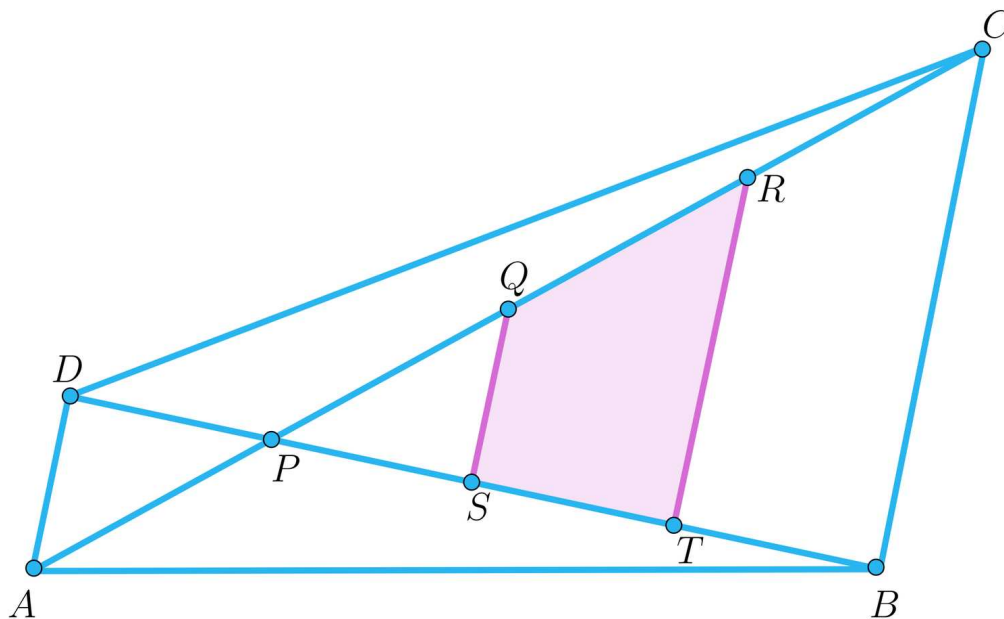


### Ćwiczenie 6



Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , którego przekątne przecinają się w punkcie  $P$ . Na przekątnej  $AC$  dane są jeszcze dwa punkty  $Q$  i  $R$ , dzielące ją wraz z punktem  $P$  na cztery równe części, tzn.  $|AP| = |PQ| = |QR| = |RC|$ . Na przekątnej  $DB$  dane są jeszcze punkty  $S$  i  $T$ , które wraz z  $P$  dzielą ją na cztery równe części, tzn.

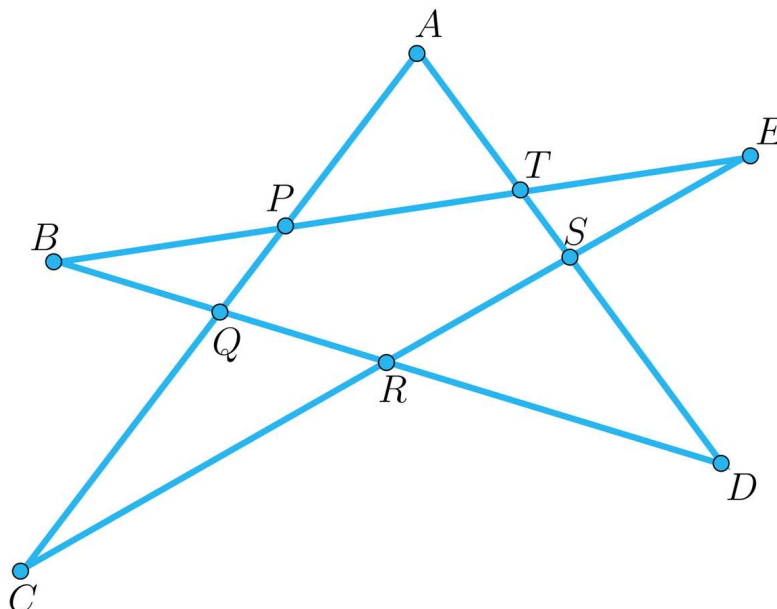
$|DP| = |PS| = |ST| = |TB|$  (rysunek). Oblicz stosunek pól czworokątów  $TRQS$  i  $ABCD$ .



### Ćwiczenie 7



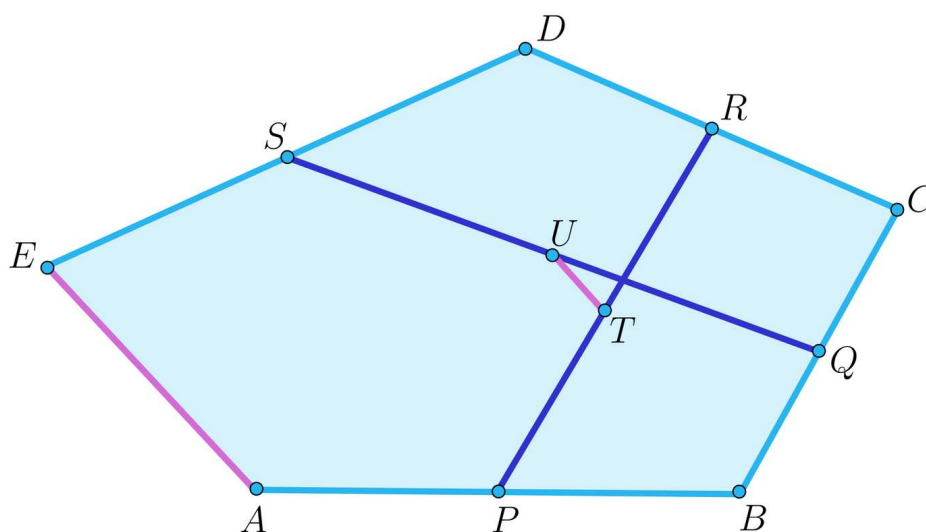
W pięciokącie gwiaździstym  $ABCDE$  zachodzą równości  $|AQ| = |QC|$ ,  $|BR| = |RD|$ ,  $|CR| = |RE|$  i  $|DS| = |SA|$  (rysunek). Uzasadnij, że odcinki  $BP$ ,  $PT$ ,  $TE$  mają równą długość.



### Ćwiczenie 8



Środki boków  $AB$  i  $CD$  oraz  $BC$  i  $DE$  pięciokąta wypukłego  $ABCDE$  połączono odcinkami  $PR$  i  $SQ$ , których środki również połączono odcinkiem  $UT$  (rysunek). Udowodnij, że odcinek ten jest równoległy do boku  $AE$  i równy  $\frac{1}{4}|AE|$ .



# Dla nauczyciela

---

Autor: Paweł Dziuba

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- formułuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa,
- opisuje własność odcinka łączącego środki ramion w trójkącie,
- stosuje poznane fakty i twierdzenia do rozwiązywania problemów geometrycznych.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- praca z ekspertem;

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Przed lekcją:**

Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów czterech ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.

#### **Faza wstępna:**

- Nauczyciel przedstawia uczniom temat lekcji i jej cele, wspólnie ustalają kryteria sukcesu.
- Uczniowie przypominają twierdzenie Talesa.

#### **Faza realizacyjna:**

- Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Nauczyciel dzieli uczniów na 4 grupy, eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
- Nauczyciel przedstawia uczniom Galerię zdjęć interaktywnych. Uczniowie pracują indywidualnie, próbują samodzielnie rozwiązywać zadania z sekcji Przeczytaj. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
- Uczniowie w parach rozwiązują zadania umieszczone pod Galerią zdjęć interaktywnych.
- Uczniowie wykonują w parach ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” nr 4-8.

#### **Faza podsumowująca:**

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak ...”.

#### **Praca domowa:**

- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się” nr 1-3.

**Materiały pomocnicze:**

- [Twierdzenie Talesa](#)

**Wskazówki metodyczne:**

Galerię zdjęć interaktywnych można potraktować jako zadania dotyczące podobieństwa trójkątów.