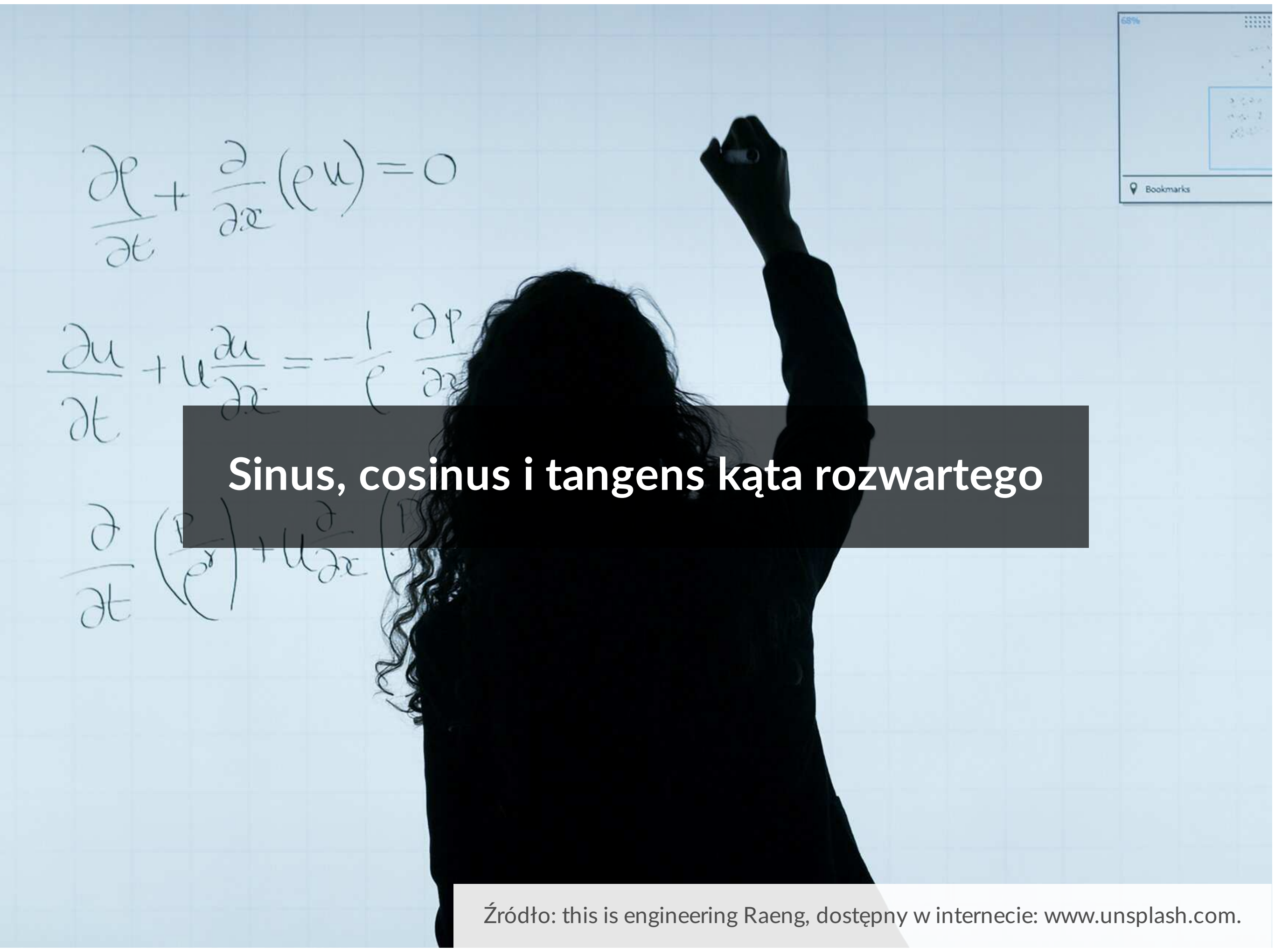
Sinus, cosinus i tangens kąta rozwartego

Sinus, cosinus i tangens kąta rozwartego



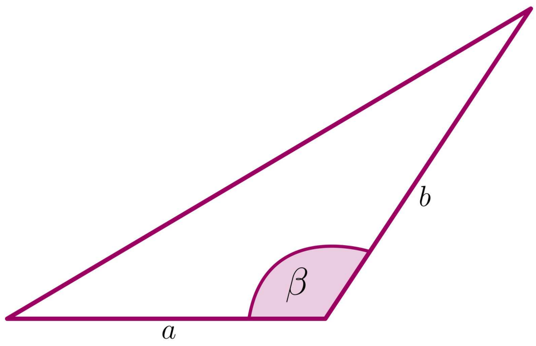
Źródło: this is engineering Raeng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wiesz już, że pole trójkąta o dwóch bokach długości a oraz b i kącie ostrym α pomiędzy tymi bokami jest równe:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

Znasz pojęcie sinusa kąta ostrego, więc umiesz stosować powyższy wzór, gdy kąt α ma nie więcej niż 90°. Spróbujmy zatem zdefiniować sinus kąta rozwartego β, aby także w tym wypadku słuszny był wzór:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\beta$$

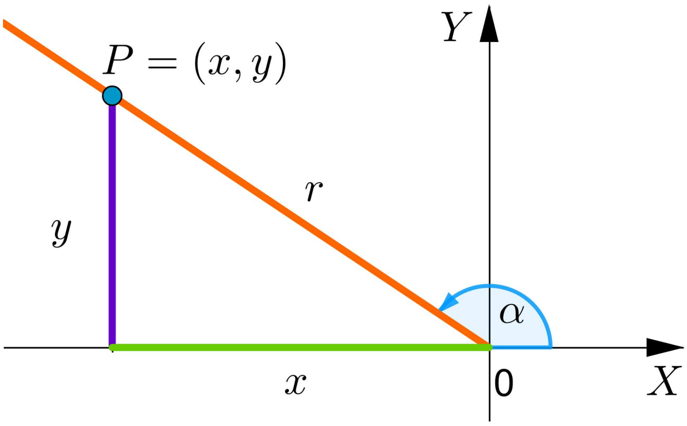


Twoje cele

- Obliczysz sinus, cosinus i tangens kąta rozwartego.
- Poznasz zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych kątów przyległych.
- Wyznaczysz kąt o zadanym sinusie, cosinusie lub tangensie.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.



$\sin \alpha = \frac{y}{r}$,

$\cos \alpha = \frac{x}{r}$,

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, gdy $x \neq 0$,

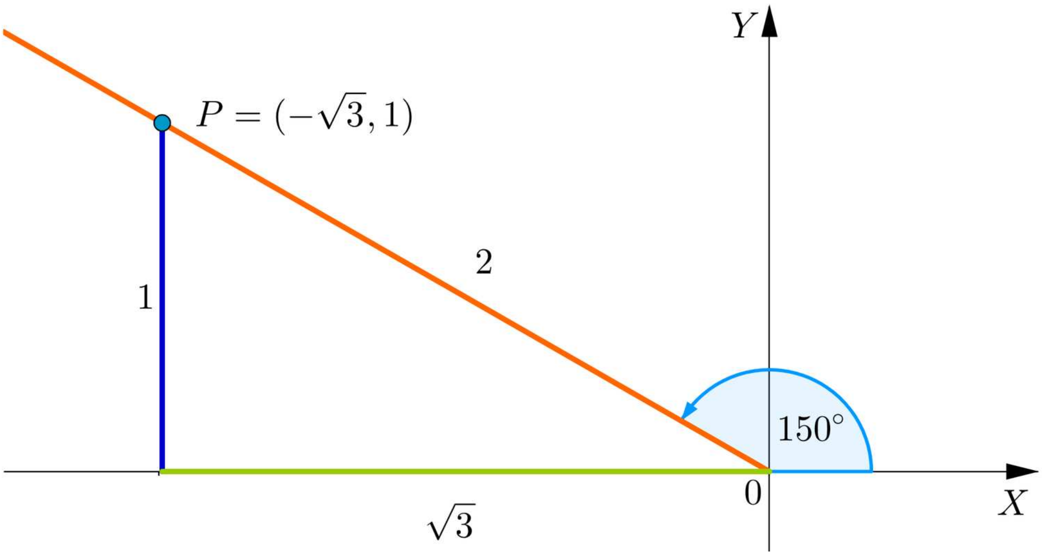
gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ jest promieniem wodzącym punktu P.

Przykład 1

Pokażemy, jak wykorzystać trójkąt prostokątny o kątach 30° i 60° do obliczania wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150°.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że krótsza przyprostokątna ma długość 1, wtedy pozostałe boki mają długości 2 i $\sqrt{3}$. Umieścimy ten trójkąt w układzie współrzędnych jak na rysunku.



Punkt P ma współrzędne $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$, stąd wartości funkcji trygonometrycznych kąta 150° są równe:

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\mathrm{tg}\, 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zauważmy, że:

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

$\mathrm{tg}\, 150^\circ = -\mathrm{tg}\, 30^\circ$

Uogólniając powyższą metodę można wykazać, że dla każdego kąta, którego końcowe ramę znajduje się w drugiej ćwiartce układu współrzędnych prawdziwe są równości:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Powyższe równości można też zapisać słownie.

Jeśli α i β są kątami przyległymi to: sinusy kątów przyległych mają równe miary: $\sin\alpha = \sin\beta$, cosinusy i tangensy kątów przyległych są liczbami przeciwnymi: $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\mathrm{tg}\,\beta$.

Twierdzenie: Wzór na pole trójkąta

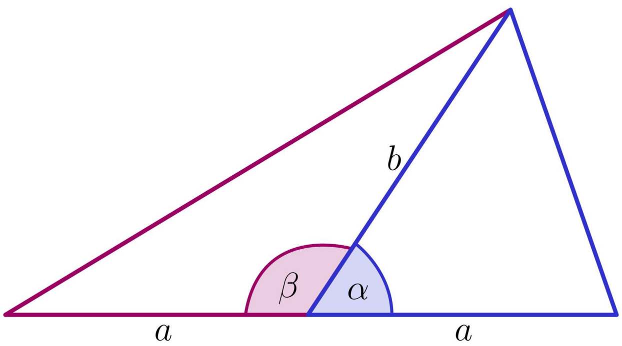
Pole trójkąta o bokach a oraz b i kącie α zawartym między nimi jest równe:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$

Dowód

Rozważmy dwa trójkąty o bokach a i b oraz kątach przyległych α i β jak na rysunku.

Zauważmy, że pola tych trójkątów są równe, ponieważ podstawy i wysokości obu trójkątów są równe oraz wspólna wysokość wyraża się wzorem $h = b \cdot \sin\alpha$.



Stąd pole niebieskiego trójkąta wynosi $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$.

Ponieważ $\sin\beta = \sin\alpha$, bo $\alpha = 180^\circ - \beta$, to pole trójkąta rozwartokątnego wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\beta$.

Zauważmy, że jeżeli $\alpha = \beta = 90^\circ$, to $\sin\alpha = \sin\beta = 1$, więc pole trójkąta prostokątnego jest równe $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$.

Wykazaliśmy, że pole każdego trójkąta jest równe połowie iloczynu boków trójkąta oraz sinusa kąta zwartego między nimi.

Twierdzenie: Jedynka trygonometryczna

Dla dowolnego kąta $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ zachodzi równość:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Dowód

Jeśli β jest kątem ostrym, to twierdzenie wynika bezpośrednio z twierdzenia Pitagorasa.

Jeśli $\beta = 90^\circ$, to $\sin^2\beta + \cos^2\beta = \sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1 + 0 = 1$.

Jeśli natomiast β jest kątem rozwartym, to niech α będzie kątem ostrym do niego przyległym. Wtedy:

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = (\sin\alpha)^2 + (-\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

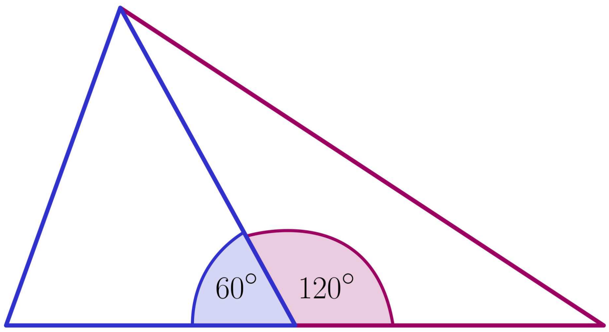
Przykład 2

Obliczymy $\sin 120^\circ$ i $\cos 120^\circ$.

Rozwiązanie

Jeśli $\beta = 120^\circ$, to kąt do niego przyległy ma miarę $\alpha = 60^\circ$, zatem otrzymujemy:

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$.



Przykład 3

Wyrazimy wartości funkcji $\sin 137^\circ$ i $\cos 137^\circ$ za pomocą odpowiednich wartości funkcji kąta ostrego.

Rozwiązanie

Jeśli $\beta = 137^\circ$, to kąt do niego przyległy $\alpha = 43^\circ$ i mamy:

$\sin 137^\circ = \sin 43^\circ$, $\cos 137^\circ = -\cos 43^\circ$.

Przykład 4

Znajdziemy kąt wypukły β, którego cosinus jest równy $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie

Kąt β musi być rozwarty, bo jego cosinus jest ujemny. Zgodnie z definicją cosinusa kąta rozwartego:

$\cos\beta = -\cos\alpha$,

gdzie α to kąt przyległy do β . Poszukajmy więc takiego kąta ostrego α, że:

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Takim kątem jest $\alpha = 30^\circ$. Stąd poszukiwany kąt β jest równy 150°.
Przykład 5

Wyznaczymy pole trójkąta o bokach $a = 6$, $b = 4$ oraz kącie między nimi $\beta = 135^\circ$.

Rozwiązanie

Kąt ostry przyległy do β jest równy $\alpha = 45^\circ$, więc:

$P = \frac{1}{2}ab\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin 45^\circ = 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

Tangens kąta

Dla dowolnego kąta wypukłego różnego od kąta prostego zachodzi tożsamość:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Ważne!

Dla kąta prostego tangens nie jest określony, gdyż nie wolno dzielić przez zero $(\cos 90^\circ = 0)$.

Jeśli β jest kątem rozwartym przyległym do kąta ostrego α, to:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Tangens kąta rozwartego jest zatem równy liczbie przeciwnej do tangensa kąta ostrego do niego przyległego. W związku z tym tangens dowolnego kąta rozwartego jest liczbą ujemną.
Przykład 6

Obliczymy tangens kąta $\beta = 120^\circ$.

Rozwiązanie

Kąt ostry przyległy do β ma miarę $\alpha = 60^\circ$, więc:

$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$.
Przykład 7

Znajdziemy kąt wypukły β taki, że:

$\operatorname{tg} \beta = -1$

Rozwiązanie

Ponieważ tangens jest ujemny, więc kąt wypukły β musi być rozwarty. Poszukajmy najpierw kąta ostrego α przyległego do β. Wtedy:

$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = 1$

Stąd $\alpha = 45^\circ$. A zatem $\beta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Słownik

kąty przyległe

kąty, które mają wspólne ramię i tworzą razem kąt półpełny

kąt rozwarty

ma miarę większą niż 90° i mniejszą niż 180°

kąt wypukły

ma miarę większą niż 0° i mniejszą lub równą 180°. Kąty: ostry, prosty, rozwarty i półpełny są kątami wypukłymi

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką, a następnie rozwiąż zadania.

Polecenie 2

Oblicz cosinus kąta rozwartego α, wiedząc, że sinus kąta do niego przyległego jest równy $\frac{1}{2}$.

Polecenie 3

Oblicz tangens kąta rozwartego β, wiedząc, że kąt α jest do niego przyległy i $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Polecenie 4

Narysuj trójkąt, w którym tangens jednego z kątów jest równy -3.

Sprawdź się

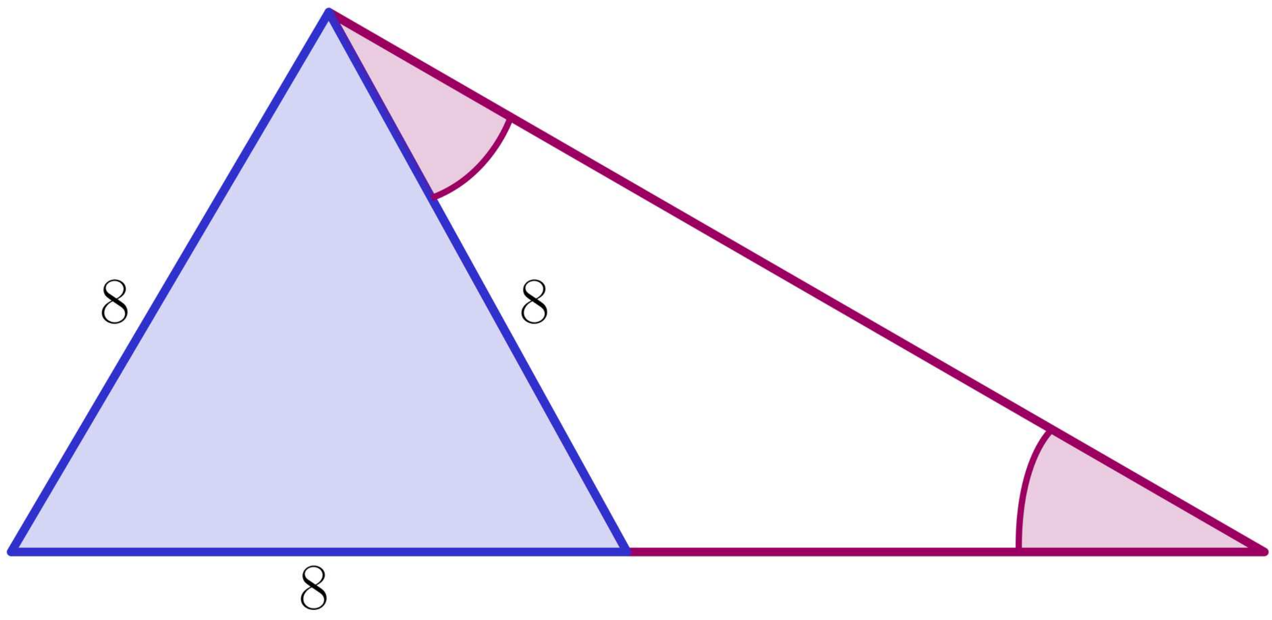
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Na rysunku poniżej niebieski trójkąt jest trójkątem równobocznym o bokach długości 8. Wówczas pole fioletowego trójkąta równoramiennego jest równe:



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Sinus, cosinus i tangens kąta rozwartego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180°, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

4) korzysta ze wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza sinus, cosinus i tangens kąta rozwartego,
- wyjaśnia zależności między wartościami funkcji trygonometrycznych kątów przyległych,
- znajduje kąt o zadanym sinusie, cosinusie lub tangensie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- ekspert – nauczycielem

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie, pracując w grupach, tworzą mapy myśli, na których zamieszczają dotychczas uzyskane wiadomości na temat funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym. W ten sposób przypominają sobie informacje, które wykorzystają w czasie zajęć.

Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

Uczniowie pracują w parach, zapoznając się z materiałem z sekcji „Przeczytaj” i infografiką. Przy czym każda para wybiera sobie tylko jeden przykład, który dokładnie musi przeanalizować tak, aby stać się ekspertem od jego rozwiązania.

Po upływie wyznaczonego czasu ochotnicy – eksperci (w parach, w których pracowali) wcielają się w role nauczycieli, którzy przekazują zdobytą wiedzę innym.

Pozostali uczniowie mogą zadawać pytania, zgłaszać wątpliwości, a także na koniec ocenić zdolności „nauczycielskie” ekspertów.

Faza podsumowująca:

Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę par, na podstawie sugestii klasy.

Praca domowa:

W ramach pracy domowej uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90°
- Tożsamości trygonometryczne
- Wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów rozwartych

Wskazówki metodyczne:

Infografika może zostać wykorzystana na lekcji o tożsamościach trygonometrycznych.