Zdarzenia w rzucie kostkami do gry

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film edukacyjny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Zdarzenia w rzucie kostkami do gry

Źródło: Alex Chambers, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Podobno kości do gry wynaleziono już w starożytności. Znaleziono je w grobowcach egipskich i na terenach imperium rzymskiego. Były narzędziami hazardu i wróżb. Początkowo funkcje kości do gry spełniały kości zwierząt hodowlanych, które nie miały kształtu sześcianów, ale miały kształt zbliżony do czworościanów. Pasjonowali się nimi Grecy i Rzymianie. Rozgrywki hazardowe często kończyły się utratą majątku przez pechowego gracza.

Paschier Joostens, De Alea, 1642

Źródło: dostępny w internecie: www.wikipedia.org, domena publiczna.

W Polsce moda na kości nastała w średniowieczu, kiedy to powszechnie grywano w nie na jarmarkach, w karczmach i na dworach szlacheckich.

Obecnie gra ta nie jest już tak popularna, jak onegdaj, choć w XX wieku pojawiło się wiele nowych rodzajów kości – nawet o 100 ściankach.

My niestety nie dysponujemy aż tak wymyślnymi egzemplarzami, ale to zupełnie nie przeszkodzi nam w rozważaniach na temat zdarzeń w doświadczeniach losowych, polegających na rzucie kostkami do gry.

> **Twoje cele**
>
> - Określisz liczbę zdarzeń elementarnych w rzucie kostką (kostkami) do gry.
> - Określisz liczbę wszystkich możliwych zdarzeń w rzucie kostką.
> - Zliczysz zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu w doświadczeniu losowym „z kostkami”.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie podstawowych pojęć, których znajomość jest niezbędna do zgłębiania poniższych materiałów.

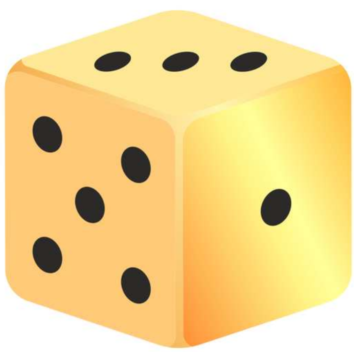
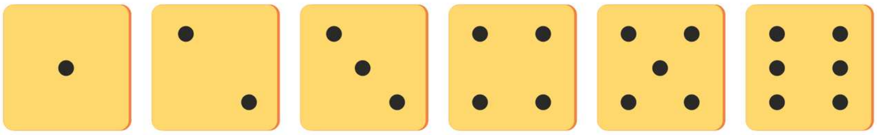
Doświadczeniem losowym nazywamy taki eksperyment, który można powtarzać wielokrotnie w jednakowych (lub bardzo zbliżonych warunkach) i którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć.

Wynik takiego doświadczenia to **zdarzenie elementarne**. Wszystkie zdarzenia losowe danego doświadczenia losowego **tworzą przestrzeń zdarzeń elementarnych (zbiór zdarzeń elementarnych)**, który będziemy oznaczać Ω, a liczbę jego elementów oznaczymy $|\Omega|$.

> **Definicja: Zdarzenie losowe**
>
> Każdy podzbiór skończonego zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem).

W tym materiale skoncentrujemy się na określaniu możliwych zdarzeń w rzucie kostką do gry (kostkami do gry).

Będziemy przyjmować, że dana kostka jest symetryczna, czyli szansa wypadnięcia każdej ścianki jest taka sama.

> **Przykład 1**
>
> Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.
>
> 
>
> 

Każde zdarzenie elementarne w tym doświadczeniu można opisać następująco: wypadło n oczek, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Zatem

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i $|\Omega| = 6$

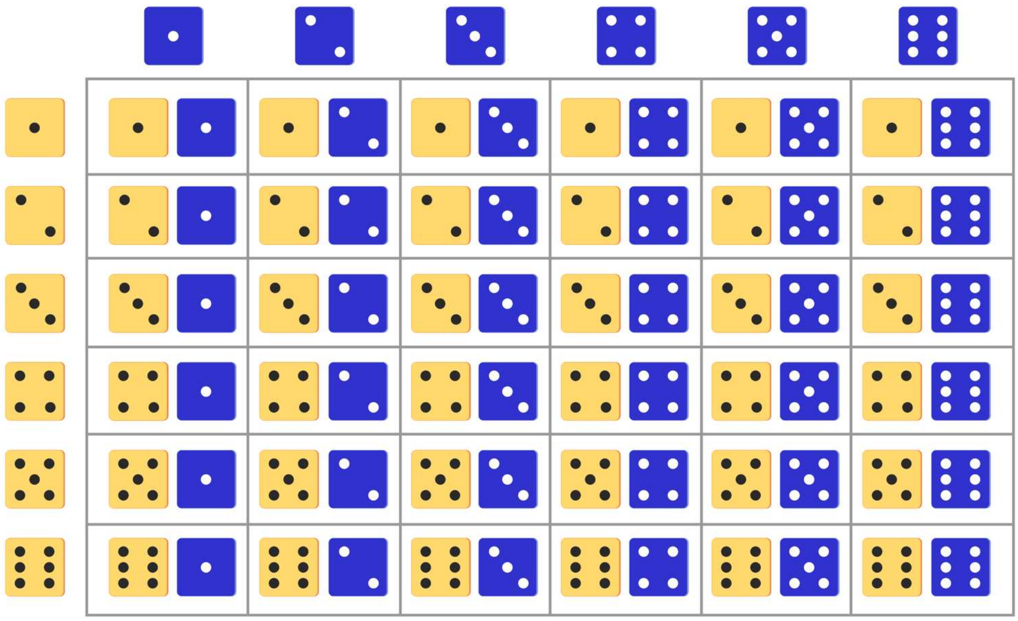
Przykład 2

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry – żółtą i niebieską. Obliczymy, ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Za zdarzenie elementarne przyjmujemy każdą uporządkowaną parę, której elementami są odpowiednio wyniki na żółtej i na niebieskiej kostce.

- **sposób** I :

Wykonujemy tabelkę, ilustrującą rzut dwiema kostkami.



Na podstawie tabelki ustalamy, że jest 36 zdarzeń elementarnych.

- **sposób** II:

Zauważmy, że na pierwszej kostce może wypaść 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek (jest zatem 6 różnych możliwości), podobnie na drugiej kostce.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest więc

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$

Przykład 3

Rzucamy dwukrotnie sześcienną kostką do gry.

Znajdziemy odpowiednie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniom:

A – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą,

B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest co najmniej równy 15,

C – liczba oczek, która wypadła za pierwszym razem jest większa od liczby oczek, która wypadła za drugim razem.

Sporządzamy pomocniczą tabelkę. W pola tabelki wpisujemy możliwe do otrzymania sumy liczb oczek w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry i zaznaczamy zdarzenia sprzyjające zdarzeniu A – suma liczb wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Odczytujemy z tabelki: $|A| = 15$.

Sporządzamy kolejną tabelkę, w której pola tym razem wpisujemy możliwe do uzyskania iloczyny liczb oczek w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Zaznaczamy zdarzenia sprzyjające zdarzeniu B – iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest co najmniej równy 15.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2	3	4	5	6
⚁	2	4	6	8	10	12
⚂	3	6	9	12	15	18
⚃	4	8	12	16	20	24
⚄	5	10	15	20	25	30
⚅	6	12	18	24	30	36

Odczytujemy z tabelki: $|B| = 13$.

Sporządzamy ponownie tabelkę, w pola której wpisujemy wszystkie możliwe układy liczb, jakie mogą zajść w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Zaznaczamy zdarzenia sprzyjające zdarzeniu C – liczba oczek, która wypadła za pierwszym razem jest większa od liczby oczek, która wypadła za drugim razem.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$
⚁	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$
⚂	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$
⚃	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$	$(6,4)$
⚄	$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$
⚅	$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(4,6)$	$(5,6)$	$(6,6)$

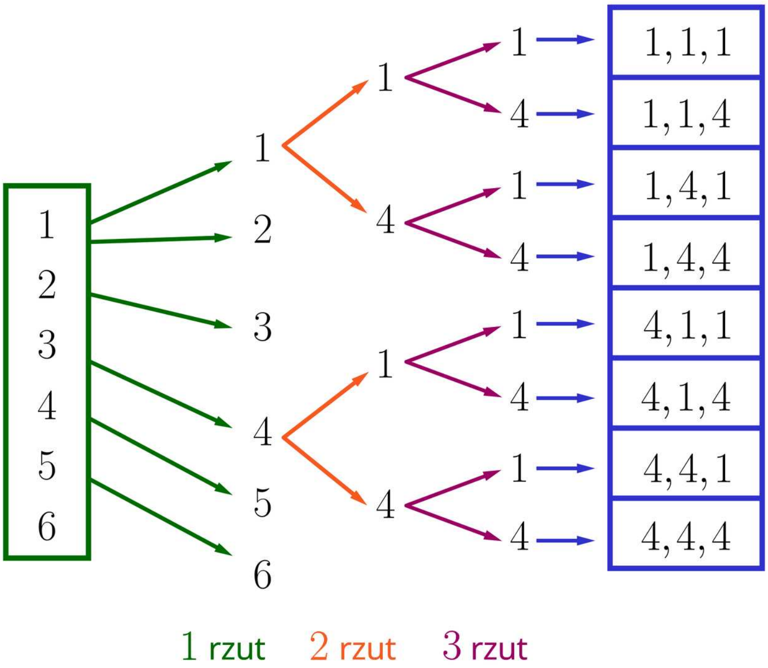
Z tabelki odczytujemy: $|C| = 15$.

Przykład 4

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

Wypiszemy zdarzenia sprzyjające zdarzeniu: A – w każdym rzucie wypadła liczba oczek, będąca drugą potęgą liczby naturalnej.

Skorzystamy z interpretacji graficznej doświadczenia, zaznaczając na „drzewku” tylko odpowiednie krawędzie. Zauważmy przy tym, że potęgami liczb naturalnych są w tym przypadku tylko liczby oczek równe 1 i 4.



Odczytujemy z „drzewka”:

$A = \{(1,1,1), (1,1,4), (1,4,1), (1,4,4), (4,1,1), (4,1,4), (4,4,1), (4,4,4)\}$

Jeżeli piszemy o rzucie kilkoma sześciennymi kostkami do gry, to zakładamy, że kostki te są rozróżnialne.

Zatem doświadczenia: n krotny rzut kostką i rzut n kostkami, interpretujemy i opisujemy tak samo. Czyli identyczne są zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

Zauważmy, że w jednoczesnym **rzucie n sześciennymi kostkami do gry (lub w n rzutach kostką) liczba zdarzeń elementarnych jest równa** 6^n.

Przykład 5

Rzucamy pięć razy sześcienną kostką do gry. Obliczymy, ile jest

a. zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu losowym,
b. zdarzeń sprzyjających zdarzeniom:
   A – pięć razy otrzymamy liczbę oczek równą 6,

B – tylko w pierwszym i trzecim rzucie otrzymamy liczbę oczek równą 6,
C – czterokrotnie wyrzucimy liczbę oczek równą 6.

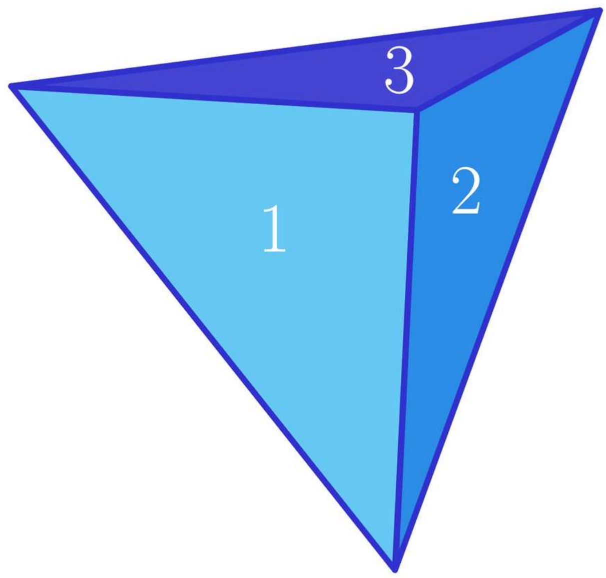
Rozwiązanie:

a. Aby wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych, korzystamy ze wzoru na wariację z powtórzeniami.
$|\Omega| = 6^5 = 7776$

b. Jest tylko jedna możliwość, żeby za każdym razem otrzymać liczbę oczek równą 6.
$|A| = 1$
Zdarzeniu B sprzyja tyle zdarzeń elementarnych, ile można utworzyć trzyelementowych wariacji z powtórzeniami zbioru pięcioelementowego (za drugim, czwartym i piątym razem może wypaść liczba oczek różna od 6).
$|B| = 5^3 = 125$
Zbiór zdarzeń sprzyjających czterokrotnemu wyrzuceniu liczby oczek równej sześć, możemy opisać następująco:
$C = \{(n, 6, 6, 6, 6), (6, n, 6, 6, 6), \ldots, (6, 6, 6, 6, n)\}$, gdzie $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Zatem
$|C| = 5 \cdot 5 = 25$

Przykład 6

Rzucamy dwukrotnie kostką do gry w kształcie czworościanu foremnego, na ściankach którego zapisane są liczby 1, 2, 3, 4.



Wynikiem jednego rzutu jest liczba zapisana na ściance, na której upadła kostka.

Zapisujemy kolejno liczby, które wypadają tak, że powstają liczby dwucyfrowe. Cyfra dziesiątek, to cyfra otrzymana w pierwszym rzucie, cyfra jedności – w drugim rzucie.

Oznaczmy:

A– zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby nieparzystej,

B – zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby większej od 35,

C – zdarzenie polegające na utworzeniu liczby podzielnej przez 7.

Określamy najpierw zbiór zdarzeń elementarnych w tabeli.

	1	2	3	4
1	11	21	31	41
2	12	22	32	42
3	13	23	33	43
4	14	24	34	44

$A = \{11, 13, 21, 23, 31, 33, 41, 43\}$

$B = \{41, 42, 43, 44\}$

$C = \{14, 21, 42\}$

$A \cap B$

$A \cup B$

$B \cap C$

$A \cap B = \{41, 43\}$

$A \cup B = \{11, 13, 21, 23, 31, 33, 41, 42, 43, 44\}$

$B \cap C = \{42\}$

Słownik

zdarzenie losowe

> każdy podzbiór skończonego zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem)

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w filmie edukacyjnym, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DhE5wGA1o

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Rzucono dziesięcioma sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, ile jest zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającemu na tym, że wypadły dokładnie dwie jedynki i dokładnie trzy szóstki.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy sześcienną kostką do gry. Ile jest zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu: suma liczb oczek otrzymanych w drugim i trzecim rzucie jest równa liczbie oczek otrzymanej w pierwszym rzucie.

- 14
- 15
- 18
- 12

Ćwiczenie 2

Rzucamy dwa razy sześcienną kostką do gry. Wszystkie zdarzenia sprzyjające zdarzeniu: A - wartość bezwzględna różnicy liczb wyrzuconych oczek jest równa 3 to:

- $A = \{(4,1),(5,2),(6,3),(3,6),(5,2)\}$
- $A = \{(4,1),(5,2),(6,3),(2,5),(3,6),(1,4),(6,4)\}$
- $A = \{(4,1),(5,2),(6,3),(2,5),(3,6),(1,4)\}$
- $A = \{(4,1),(5,2),(6,3)\}$

Ćwiczenie 3

Rzucamy zieloną i czarną sześcienną kostką do gry.
Tworzymy ilorazy, których dzielną jest liczba oczek, która wypadła na zielonej kostce, a dzielnikiem liczba oczek, która wypadła na czarnej kostce.
Uzupełnij tabelkę powstałych ilorazów. Wpisz odpowiednie liczby tylko w pola, na których ilorazy będą liczbami naturalnymi.

czarna\zielona	1	2	3	4	5	6
1						
2	-		-		-	
3	-	-		-	-	
4	-	-	-		-	-
5	-	-	-	-		-
6	-	-	-	-	-	

Ćwiczenie 4

Rzucono sześcienną kostką do gry. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że wypadła liczba oczek, będąca liczbą pierwszą, B niech będzie zdarzeniem polegającym na tym, że liczba oczek, które wypadły jest liczbą złożoną.
Zaznacz, która równość jest prawdziwa, a która fałszywa.

Zdanie	Prawda	Fałsz
$A' = B$	○	○
$A \cup B = \Omega$	○	○
$A \cap B = \emptyset$	○	○

Ćwiczenie 5

Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnym w doświadczeniu polegającym na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Zdarzenia A, B, C, D są podzbiorami zbioru Ω. Dopasuj zdarzenie z jego przykładowym opisem.

$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$C = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}$

$D = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)$

Liczba oczek wyrzucona za pierwszym razem jest dwukrotnie większa niż za drugim razem.

Suma liczb oczek wyrzuconych w obu rzutach jest równa 10.

Reszta z dzielenia przez 5 sumy liczb oczek, które wypadły w obu rzutach jest równa 4.

Iloczyn liczb wyrzuconych oczek jest mniejszy od 4.

Ćwiczenie 6

Rzucono dwiema sześciennymi kostkami do gry. Opisz zdarzenie A zaznaczone na rysunku.

Kostka 1

Kostka 2

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ćwiczenie 7

Rzucono sześcienną kostką do gry. Wypisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniom:

A – otrzymano parzystą liczbę oczek lub liczbę oczek podzielną przez 3,

B – otrzymana liczba oczek nie jest liczbą złożoną.

Ćwiczenie 8

Na ściankach ośmiościennej kostki do gry zapisane są liczby od 1 do 8. W doświadczeniu losowym polegającym na rzucie tą kostką, przestrzeń zdarzeń elementarnych to

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Zdarzenia A i B określamy natępująco:

$A = \{\omega \in \Omega : \ \omega > 5\}$, $B = \{\omega \in \Omega : \ 3 \leqslant \omega \leqslant 7\}$. Wypisz zdarzenia sprzyjające zdarzeniom: A', $A \cap B$, $A \cup B$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Zdarzenia w rzucie kostkami do gry

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę zdarzeń elementarnych w rzucie kostką (kostkami) do gry
- określa liczbę wszystkich możliwych zdarzeń w rzucie kostką
- zlicza zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu w doświadczeniu losowym „z kostkami”
- tworzy model matematyczny sytuacji z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- haki pojęciowe
- burza mózgów
- piramida priorytetów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer,
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie w parach metodą haki pojęciowe (zmodyfikowaną) przypominają podstawowe pojęcia związane z doświadczeniami losowymi. Ćwiczenie polega na tym, że jeden uczeń wymienia pojęcie – drugi musi odpowiedzieć co to pojęcie oznacza i tak na zmianę. Uczniowie mogą przy tym korzystać z zeszytów i książek, aby sprawdzać poprawność odpowiedzi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą piramidy priorytetów. Ich celem jest ułożenie listy priorytetów, według ustalonej przez siebie kolejności, dotyczących sposobów rozwiązywania zadań „na rzuty kostkami”.
2. Najpierw więc zapoznają się z materiałami zawartymi w sekcji Przeczytaj i Film edukacyjny. Następnie metodą burzy mózgów zbierają pomysły, przykłady.
3. Każda grupa otrzymuje kartki samoprzylepne i plakat z narysowaną piramidą. Spośród zebranych haseł wybierają kilka najważniejszych i zapisują je na kartkach samoprzylepnych.
4. Naklejają je w odpowiednich miejscach piramidy priorytetów, kierując się podanym kryterium. Po zakończeniu pracy tworzą jedną wspólną piramidę, reprezentatywną dla całej klasy.

5. Końcowym elementem tej części zajęć jest wspólne wymyślenie i rozwiązanie, według ustalonej listy, zadania dotyczącego rzutu kostkami do gry.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, grupy dokonują oceny koleżeńskiej.

Praca domowa:

Wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

Liczba zdarzeń w doświadczeniach losowych

Wskazówki metodyczne:

Film edukacyjny może być wykorzystany na zajęciach dotyczących określania liczby zdarzeń sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu.