



Zdarzenia w rzucie monetami

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zdarzenia w rzucie monetami

Źródło: Andriyko Podilnyk, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Pieniądze od czasu ich wynalezienia fascynowały ludzi. Choć obecnie monety i banknoty zaczynają już wychodzić z mody, wypierane przez dziwne obiekty, zwane kartami płatniczymi, zabytkowe monety na światowych rynkach kolekcjonerskich osiągają niebotyczne ceny.

Najdroższą monetą świata jest prawdopodobnie Flowing Hair Liberty Dollar, jedna z pierwszych jednodolarówek wybitych w USA. W 2013 r. na aukcji zapłacono za nią 10 mln dolarów.



Flowing Hair Liberty Dollar

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Moneta ta została wyprodukowana w 1794 r., kiedy to mennica w Stanach Zjednoczonych zaczęła bicia jednodolarówek. Jednak szybko zakończono produkcję, gdyż zauważono, że używane narzędzia nie nadają się do bicia monet o dużych rozmiarach. Pierwszych monet wybito więc tylko 1758 sztuk, z czego prawdopodobnie 130 dotrwało do dzisiaj.

My niestety nie dysponujemy aż tak unikatowymi egzemplarzami, ale to zupełnie nie przeszkodzi nam w rozważaniach na temat zdarzeń w doświadczeniach losowych, polegających na rzucie monetami.

Twoje cele

- Określisz liczbę zdarzeń elementarnych w rzucie monetą (monetami).
- Określisz liczbę wszystkich możliwych zdarzeń w rzucie monetą.
- Zliczysz zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu w doświadczeniu losowym „z monetami”.

Przeczytaj

Na początek przypomnienie podstawowych pojęć których znajomość jest niezbędna do zgłębiania poniższych materiałów.

Doświadczeniem losowym nazywamy taki eksperyment, który można powtarzać wielokrotnie w jednakowych (lub bardzo zbliżonych warunkach) i którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć.

Każdy wynik doświadczenia losowego to **zdarzenie elementarne**. Wszystkie zdarzenia losowe danego doświadczenia losowego tworzą **przestrzeń zdarzeń elementarnych (zbiór zdarzeń elementarnych)**.

Zbiór zdarzeń elementarnych będziemy oznaczać grecką literą Ω . Będziemy zakładać, że jest on zbiorem skończonym, a liczbę jego elementów oznaczmy $|\Omega|$.

W tym materiale skoncentrujemy się na określaniu możliwych zdarzeń w rzucie monetą (monetami).

Każda moneta ma dwie strony. Jedną z nich nazywamy reszką (R), a drugą orłem (O). Będziemy zakładać, że moneta jest symetryczna, czyli szanse wyrzucenia reszki są takie same, jak szanse wyrzucenia orła.

Przykład 1

Doświadczenie losowe polega na jednokrotnym rzucie monetą.

Zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia składa się z dwóch elementów:

- wypadł orzeł (O)
- wypadła reszka (R)

$$\Omega = \{O, R\}, |\Omega| = 2$$

W zastosowaniach praktycznych najczęściej interesuje nas nie pojedyncze zdarzenie elementarne rozpatrywanego doświadczenia losowego, ale zbiory tych zdarzeń, czyli podzbiory zbioru Ω .

Definicja: Zdarzenie losowe

Każdy podzbiór skończonego zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem).

O zdarzeniach elementarnych, które są elementami danego zdarzenia A mówimy, że **sprzyjają** zdarzeniu A .

Zdarzenie nazywamy **pewnym**, gdy zbiorem zdarzeń sprzyjających temu zdarzeniu jest zbiór zdarzeń elementarnych Ω .

Zdarzenie nazywamy niemożliwym, gdy zbiorem zdarzeń sprzyjających jest zbiór pusty. Oznacza to, że w zbiorze Ω nie ma ani jednego zdarzenia elementarnego sprzyjającego danemu zdarzeniu.

Zdarzenie niemożliwe oznaczać będziemy symbolem $\emptyset$ tak, jak zbiór pusty.

Twierdzenie: liczba zdarzeń losowych

Jeżeli zbiór zdarzeń elementarnych Ω ma n elementów, to zdarzeń losowych jest 2^n (łącznie ze zdarzeniem pewnym i zdarzeniem niemożliwym).

Przykład 2

Doświadczenie polega na jednokrotnym rzucie monetą. Wypiszemy wszystkie **zdarzenia losowe**, które mogą zajść w tym doświadczeniu.

Korzystając z Przykładu 1 wiemy już, że zbiór zdarzeń elementarnych składa się z dwóch elementów. Zatem łączna liczba **zdarzeń losowych** jest równa

$$2^2 = 4$$

Wypisujemy te zdarzenia:

$\{O\}$ – wyrzucenie orła

$\{R\}$ – wyrzucenie reszki

$\{O, R\} = \Omega$ – zdarzenie pewne

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe (nie wyrzucono ani orła, ani reszki)

Przykład 3

Rzucamy dwiema monetami: jednogroszówką i dwudziestogroszówką.

1 gr 20 gr		
	 	 
	 	 

Zdarzeniami elementarnymi w tym doświadczeniu są zdarzenia:

$\omega_1 = \{R, R\}$ – wyrzucenie reszki na obu monetach

$\omega_2 = \{R, O\}$ – wyrzucenie reszki na monecie jednogroszowej i orła na monecie dwudziestogroszowej

$\omega_3 = \{O, R\}$ – wyrzucenie orła na monecie jednogroszowej i reszki na monecie dwudziestogroszowej

$\omega_4 = \{O, O\}$ – wyrzucenie orła na obu monetach

Wynika z tego, że

$$\Omega = \{(R, R), (R, O), (O, R), (O, O)\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa 4.

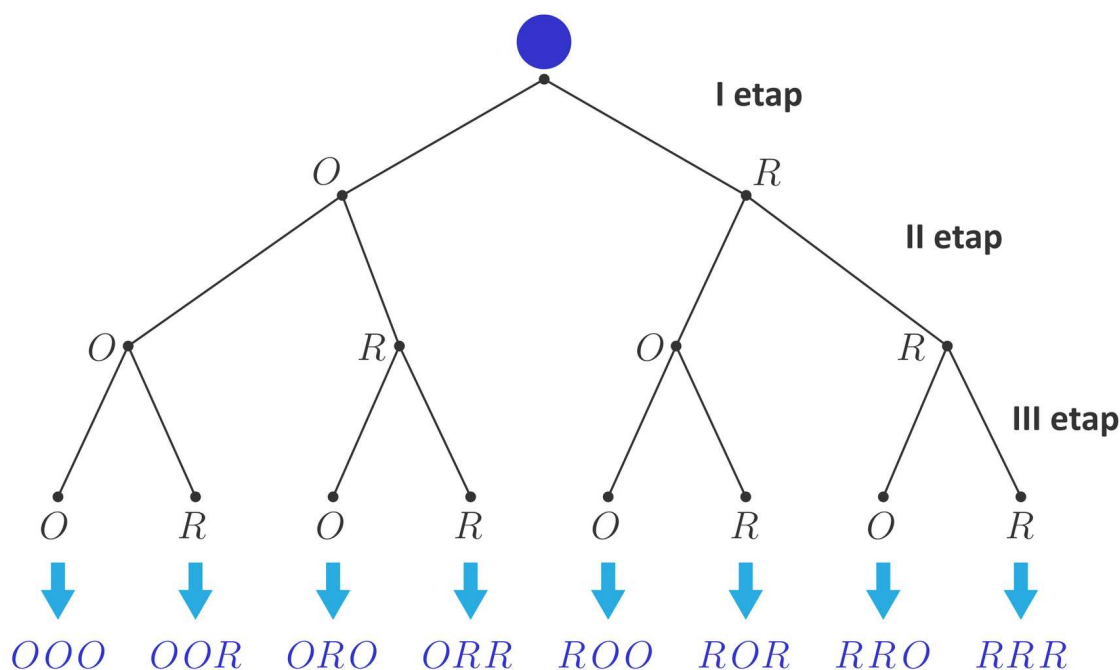
Jeżeli piszemy o rzucie kilkoma monetami, to zakładamy, że monety te są rozróżnialne. Również wtedy, gdy mają jednakowe nominały.

Zatem doświadczenia: n -krotny rzut monetą i rzut n monetami, interpretujemy i opisujemy tak samo. Czyli identyczne są zbiory zdarzeń elementarnych takich doświadczeń.

Przykład 4

Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wyznamy zbiór zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu możemy wyznaczyć różnymi sposobami. Przedstawimy jeden z nich. Narysujemy tzw. drzewko.



Podczas pierwszego rzutu (I etap) mamy dwie możliwości – O , R .

Z wierzchołka drzewa prowadzimy dwie krawędzie.

W kolejnym etapie każdej z wcześniejszych możliwości odpowiadają dwie nowe sytuacje. Z każdego z wierzchołków oznaczonych O , R prowadzimy po dwie krawędzie i wpisujemy możliwe wyniki.

Podobnie postępujemy w trzecim rzucie.

Zbiór zdarzeń elementarnych tworzymy, wypisując wszystkie ciągi wyników, zapisanych przy krawędziach tworzących gałęzie, rozpoczynając od wierzchołka drzewa.

$$\Omega = \{(O, O, O), (O, O, R), (O, R, O), (O, R, R), (R, O, O), (R, O, R), \\ (R, R, O), (R, R, R)\}$$

$$|\Omega| = 8 = 2^3$$

Zauważmy, że w jednoczesnym rzucie n monetami (lub w n rzutach monetą) liczba zdarzeń elementarnych jest równa 2^n .

Przykład 5

Rzucamy jednocześnie monetą i sześcienną kostką do gry.

Wypiszemy zdarzenia sprzyjające:

- zdarzeniu A – na monecie wypadła reszka, a na kostce liczba oczek nie większa od 4
- zdarzeniu B – na monecie wypadła reszka, a na kostce parzysta liczba oczek

$$A = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4)\}$$

$$B = \{(R, 2), (R, 4), (R, 6)\}$$

Wypiszemy teraz zdarzenia sprzyjające zdarzeniom $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Postępujemy podobnie, jak przy działaniach na zbiorach.

$$A \cup B = \{(R, 1), (R, 2), (R, 3), (R, 4), (R, 6)\}$$

$$A \cap B = \{(R, 2), (R, 4)\}$$

$$A \setminus B = \{(R, 1), (R, 3)\}$$

$$B \setminus A = \{(R, 6)\}$$

Słownik

zdarzenie losowe

każdy podzbiór skończonego zbioru zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem losowym (zdarzeniem)

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać przedstawione tam problemy, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Polecenie 2

W doświadczeniu polegającym na trzykrotnym rzucie monetą:

- a) podaj przykład zdarzenia pewnego;
- b) podaj przykład zdarzenia niemożliwego;
- c) wypisz zdarzenia sprzyjające zdarzeniom: A – reszka wypadła za drugim razem, B – za pierwszym razem nie wypadł orzeł.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Doświadczenie polega na czterokrotnym rzucie monetą. Ile jest wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu?

☐ 8

☐ 16

☐ 32

☐ 4

Ćwiczenie 2



Rzucamy trzema monetami. Wypadnięciu orła przypisujemy cyfrę 1, wypadnięciu reszki przypisujemy cyfrę 2. Tworzymy liczby trzycyfrowe, których cyfrą jedności jest cyfra odpowiadająca wynikowi na pierwszej monecie, cyfrą dziesiątek jest cyfra odpowiadająca wynikowi na drugiej monecie, cyfrą setek jest cyfra odpowiadająca wynikowi na trzeciej monecie.

Ile różnych liczb trzycyfrowych można w ten sposób utworzyć?

☐ 16

☐ 6

☐ 8

☐ 9

Ćwiczenie 3



Ile jest zdarzeń elementarnych w rzucie sześcioma monetami?

☐ 2^6

☐ 6^2

☐ $6 + 6$

☐ $2 \cdot 6$

Ćwiczenie 4



Zaznacz które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A .	☐	☐
Zbiór składający się ze wszystkich zdarzeń elementarnych danej przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem pewnym.	☐	☐
Zbiór zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu losowym oznaczamy symbolem $\emptyset$.	☐	☐
Pusty podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy zdarzeniem pewnym.	☐	☐

Ćwiczenie 5



Rzucono n monetami ($n > 3$). Uzupełnij równości, przeciągając odpowiednie liczby. Możesz również kliknąć w lukę, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.

Oznaczmy:

Ω – przestrzeń zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu,

A – zdarzenie polegające na tym, że na pierwszej i na drugiej monecie wypadła reszka,

B – zdarzenie polegające na tym, że na pierwszej i na drugiej monecie wypadło to samo.

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \boxed{} \\ |A| &= \boxed{} \\ |B| &= \boxed{} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu: w czterokrotnym rzucie monetą otrzymamy co najmniej dwa orły.

Jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu: w rzucie pięcioma monetami otrzymamy co najmniej trzy orły.

Jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu: w czterokrotnym rzucie monetą wypadnie co najwyżej jeden orzeł.

Jest zdarzeń sprzyjających zdarzeniu: w rzucie czterema monetami dokładnie na dwóch monetach wypadnie orzeł.

Ćwiczenie 7



Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie monetą. Określ ile jest zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu i zdarzeń sprzyjających zdarzeniom: A – za pierwszym i za trzecim razem wypadł orzeł, B – za pierwszym i trzecim razem wypadło to samo.

Ćwiczenie 8



Rzucamy kolejno trzy razy monetą. Wypisz wszystkie zdarzenia sprzyjające każdemu z podanych zdarzeń.

A – reszka wypadła dokładnie dwa razy

B – orzeł wypadł dokładnie trzy razy

C – za każdym razem wypadło to samo

D – reszka wypadła co najmniej trzy razy

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zdarzenia w rzucie monetami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów.

Kształtowanie kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa liczbę zdarzeń elementarnych w rzucie monetą (monetami);
- określa liczbę wszystkich możliwych zdarzeń w rzucie monetą;
- zlicza zdarzenia sprzyjające danemu zdarzeniu w doświadczeniu losowym „z monetami”;

- tworzy modele matematyczne sytuacji z kontekstem realistycznym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- koszyk pomysłów;
- doświadczenie.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer;
- monety.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie według kolejności zapisania w dzienniku, przypominają dotychczas uzyskane wiadomości na temat doświadczeń losowych i sposobów zliczania obiektów kombinatorycznych.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach analizują problemy prezentowane w sekcji „Przeczytaj” i „Prezentacja multimedialna”.
2. Wykonują odpowiednią liczbę rzutów monetą, aby doświadczalnie ustalić potrzebne dane, a dopiero następnie porównują z rozwiązaniami.
3. Następnie każda z par ma za zadanie ułożenie co najmniej 2 atrakcyjnych treściowo zdań „z rzutami monetami”. Każde zadanie zapisują na oddzielnej kartce i wrzucają do „koszyka pomysłów” – czyli przygotowanego wcześniej przez nauczyciela pojemnika (pudełka, koszyka, kapelusza, itp.).
4. Tworzą się czteroosobowe grupy (z dwóch par uczniów). Każda z grup losuje z „koszyka pomysłów” dwa zadania. Wybiera spośród tych zadań jedno i rozwiązuje je, a następnie prezentuje zadanie i rozwiązanie pozostałym uczniom klasy.

5. Podsumowaniem tej części lekcji jest wspólne ustalenie algorytmu rozwiązywania zadań „z rzutami monetami”.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
2. Pary i grupy dokonują samooceny.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

- Wykonanie ćwiczeń interaktywnych z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Liczba zdarzeń w doświadczeniach losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Prezentacja multimedialna może być wykorzystane na zajęciach poświęconych obliczaniu prawdopodobieństwa klasycznego.