



Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie

Źródło: Michel Catalisano, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale skupimy się na kątach między odcinkami zawartymi w graniastosłupie a płaszczyznami jego ścian. Poprawne rozpoznawanie oraz wyznaczanie kątów będzie miało kluczowe znaczenie na przykład podczas rozważania przekrojów wielościanów. Zagadnienie omówimy na możliwie największej liczbie przykładów graniastosłupów prostych oraz pochyłych. Ale zaczniemy od przypomnienia definicji kąta między prostą i płaszczyzną

Twoje cele

- Rozpoznaś kąt między przekątnymi ścian bocznych a podstawami graniastosłupa.
- Rozpoznaś kąt między przekątnymi graniastosłupa a jego podstawami.
- Rozpoznaś kąty pomiędzy przekątnymi graniastosłupa a jego ścianami bocznymi.

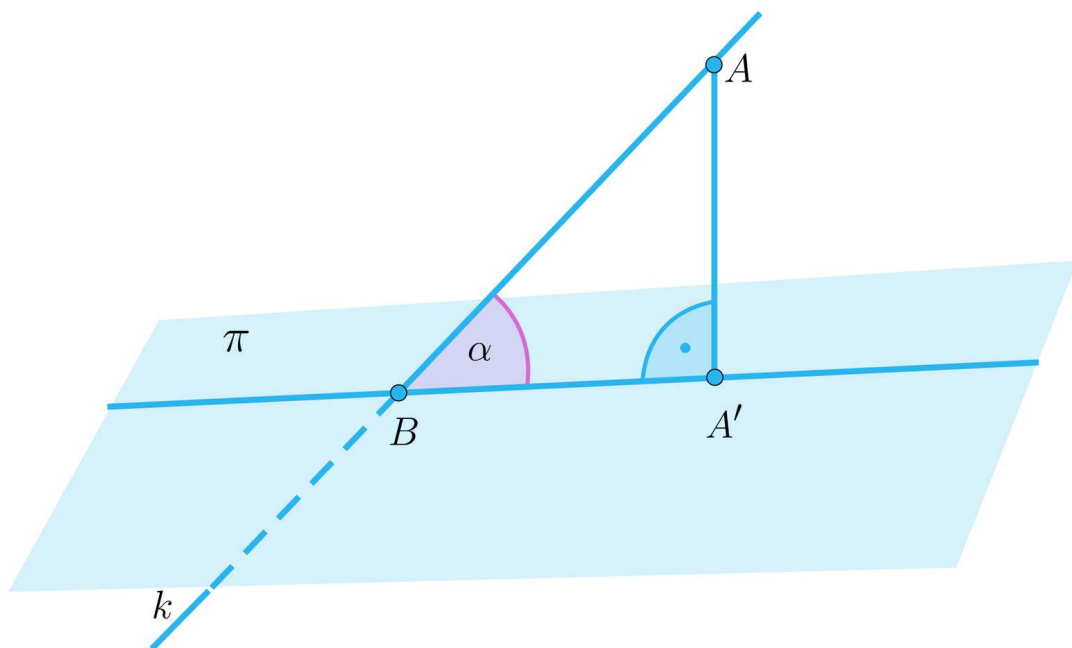
Przeczytaj

Przypomnijmy definicję kąta między prostą a płaszczyzną.

Definicja: Kąt między prostą a płaszczyzną

Jeśli prosta k jest równoległa do płaszczyzny π (ma z nią nieskończenie wiele punktów wspólnych albo nie ma żadnego), to przyjmujemy, że kąt między k a π jest równy 0° .

Jeśli prosta k przebija płaszczyznę π (ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny), to kąt między k a π definiujemy jako kąt między k a rzutem prostokątnym k na π .



Graniastosłup trójkątny

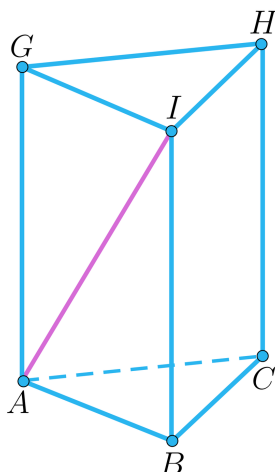
Najprostszy **graniastosłup** to ten o podstawie trójkąta. Nie ma on przekątnych, bo wszystkie odcinki łączące wierzchołki graniastosłupa trójkątnego zawierają się w jego powierzchni, co czyni je przekątnymi ścian bocznych lub krawędziami.

Na poniższym rysunku zaznaczono kąt między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną podstawy. Aby poprawnie zaznaczyć ten kąt, potrzebujemy rzutu prostokątnego tej przekątnej na płaszczyznę podstawy. Ponieważ graniastosłup jest prosty, rzut ten zawiera krawędź podstawy.

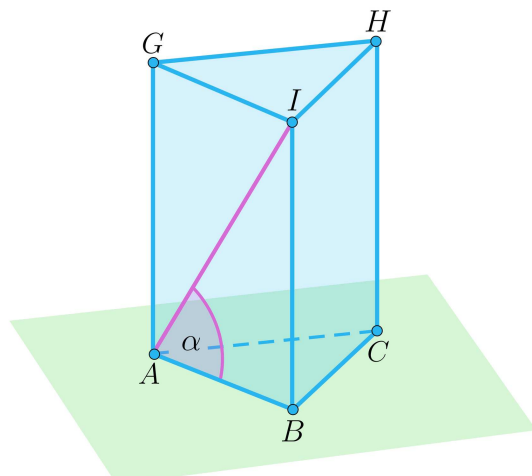
**Graniastosłup trójkątny $ABCGHI$
i przekątna AI ściany bocznej**

**Kąt między przekątną ściany bocznej
a płaszczyzną podstawy**

**Graniastosłup trójkątny $ABCGHI$
i przekątna AI ściany bocznej**

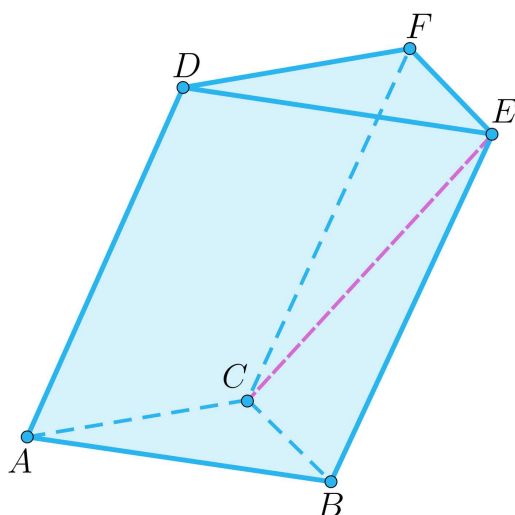


**Kąt między przekątną ściany bocznej
a płaszczyzną podstawy**

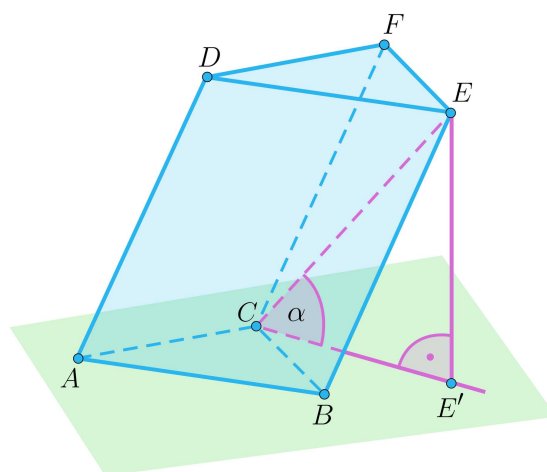


Sytuacja wygląda nieco inaczej, gdy graniastosłup jest **pochyły**. Wówczas rzut przekątnej na płaszczyznę podstawy może nie zawierać krawędzi.

**Graniastosłup pochyły trójkątny $ABCDEF$
i przekątna CE ściany bocznej**



**Kąt między przekątną ściany bocznej
a płaszczyzną podstawy**

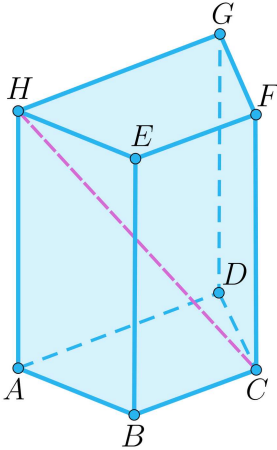
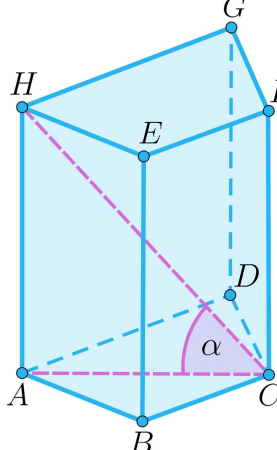
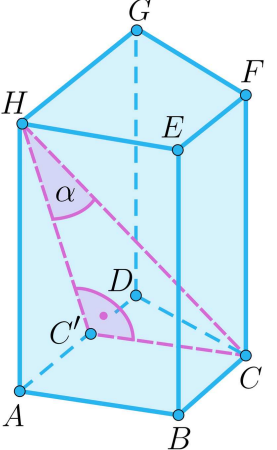
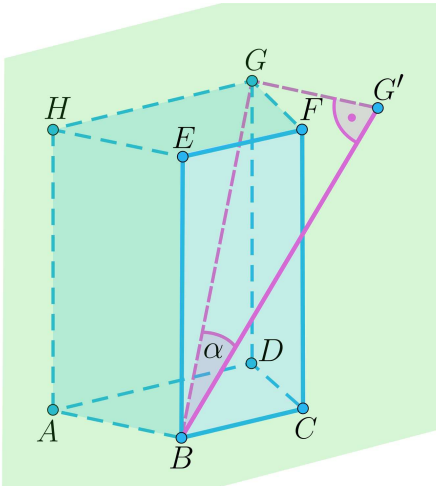


Graniastosłup czworokątny

W graniastosłupie czworokątnym pojawia się przekątna graniastosłupa – odcinek łączący dwa wierzchołki graniastosłupa, ale nie zawarty w jego powierzchni.

Poniżej ilustrujemy kąty między przekątną **graniastosłupa prostego** o podstawie trapezu a płaszczyzną ścian bocznych albo podstawą. W każdym przypadku najpierw rzutujemy prostokątnie przekątną na rozważaną płaszczyznę.

Graniastosłup czworokątny $ABCDEFGH$ i jego przekątna CH **Kąt między przekątną CH graniastosłupa
a płaszczyzną podstawy**

Graniastosłup czworokątny $ABCDEFGH$ i jego przekątna CH	Kąt między przekątną CH graniastosłupa a płaszczyzną podstawy
	
Kąt między przekątną CH graniastosłupa a płaszczyzną ściany $ADGH$	Kąt między przekątną BG graniastosłupa a płaszczyzną ściany $BCFE$
	

Choć analiza powyższych przykładów może być interesująca, dużo częściej będziemy zajmować się prostopadłościanem. Na poniższym rysunku zaznaczono kąty między przekątną prostopadłościanu a ścianami bocznymi i podstawą. Na wszystkich rysunkach znajduje się ten sam prostopadłościan widziany z różnych stron.

Przyjęto oznaczenia:

α – kąt między przekątną BG a płaszczyzną podstawy $ABCD$,

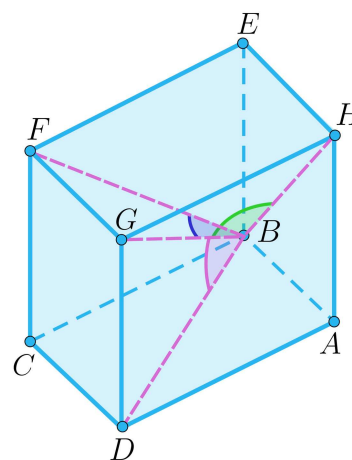
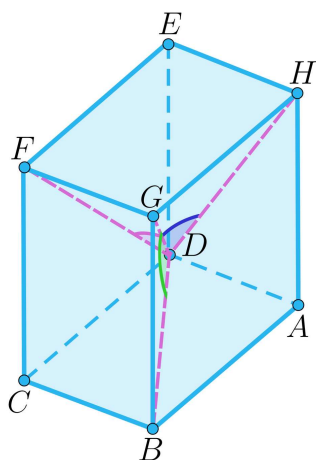
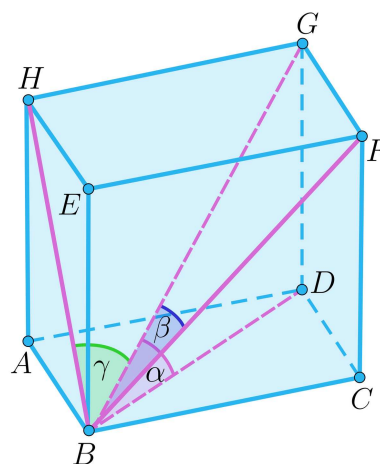
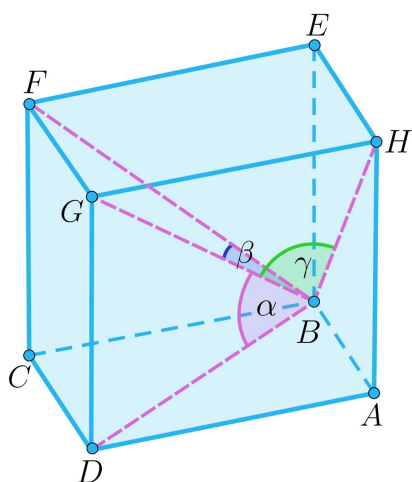
β – kąt między przekątną BG a płaszczyzną ściany $BCFE$,

γ – kąt między przekątną BG a płaszczyzną ściany $ABEH$.

W tym przypadku kąt między przekątną graniastosłupa a ścianą boczną jest równy kątowi między przekątną graniastosłupa a przekątną podstawy. Analogicznie dla kątów między przekątną graniastosłupa a ścianami bocznymi.

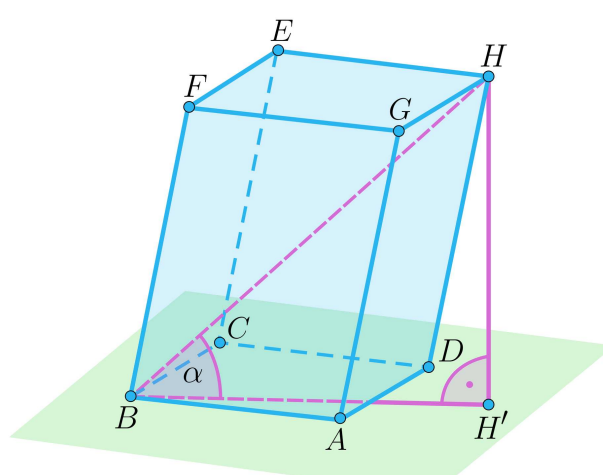
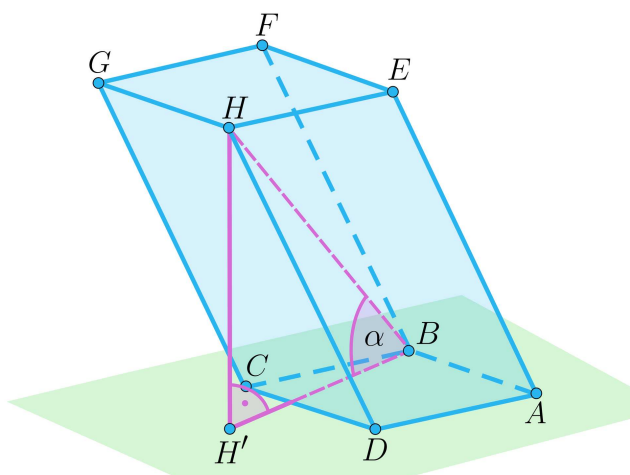
Kąty między przekątną prostopadłościanu a ścianami bocznymi i podstawą

Kąty między przekątną prostopadłościanu a ścianami bocznymi i podstawą



Ponownie sytuacja wygląda inaczej, gdy graniastosłup jest pochyły.

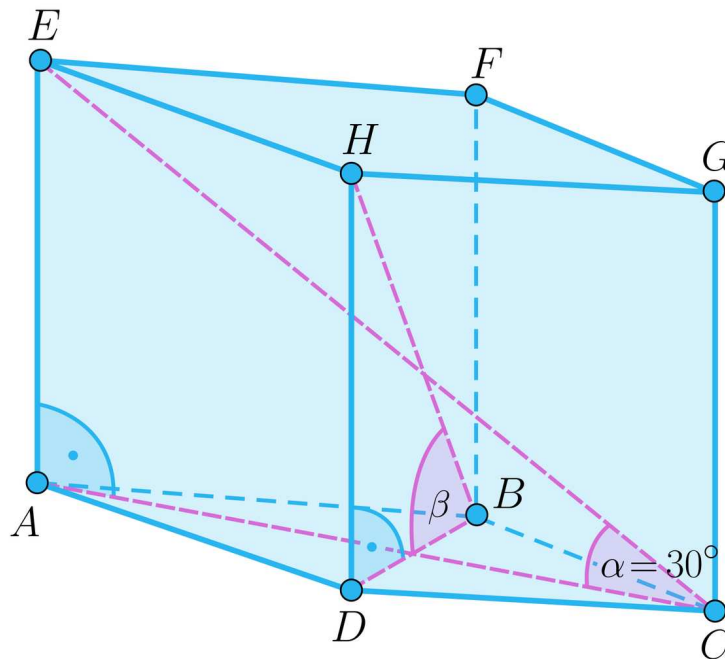
Na poniższych rysunkach zaznaczono kąt między przekątną graniastosłupa pochyłego o podstawie kwadratu a płaszczyzną podstawy.



Przykład 1

Dany jest graniastosłup o podstawie rombu. Dłuższa przekątna tego graniastosłupa ma długość 12 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze 30° . Krótsza przekątna

graniastosłupa ma długość $4\sqrt{3}$. Wyznamy miarę kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



Przyjmijmy oznaczenia jak na powyższym rysunku. Zauważmy, że z trójkąta prostokątnego EAC możemy wyznaczyć wysokość AE graniastosłupa: $|AE| = 6$.

Z trójkąta prostokątnego DBH mamy:

$$|BD| = \sqrt{|BH|^2 - |DH|^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Zatem DBH jest trójkątem prostokątnym o bokach długości $6, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}$. Oznacza to, że jest to trójkąt o kątach $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Zatem kąt między przekątną BH graniastosłupa a jego podstawą ma miarę 60° .

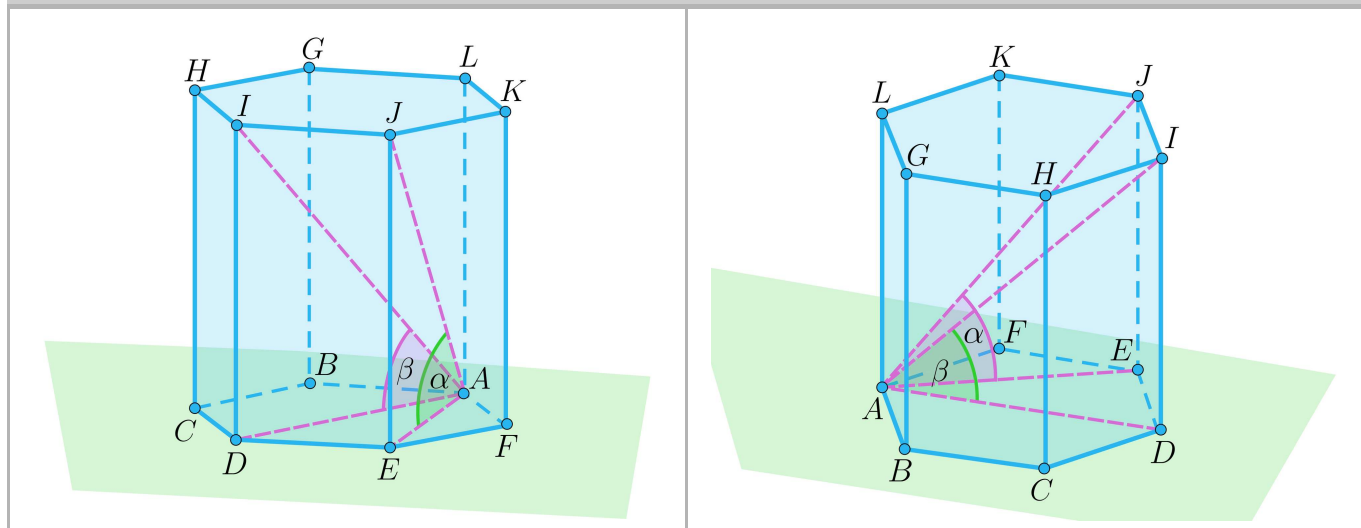
Graniastosłup sześciokątny

Im więcej krawędzi w podstawie graniastosłupa, tym więcej możliwości – wszak każda przekątna graniastosłupa tworzy jakiś kąt z każdą ścianą tego graniastosłupa.

Rozważmy **graniastosłup prawidłowy** sześciokątny.

Na poniższych rysunkach zaznaczono kąty pomiędzy przekątnymi (są dwie różne) graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego a jego podstawą.

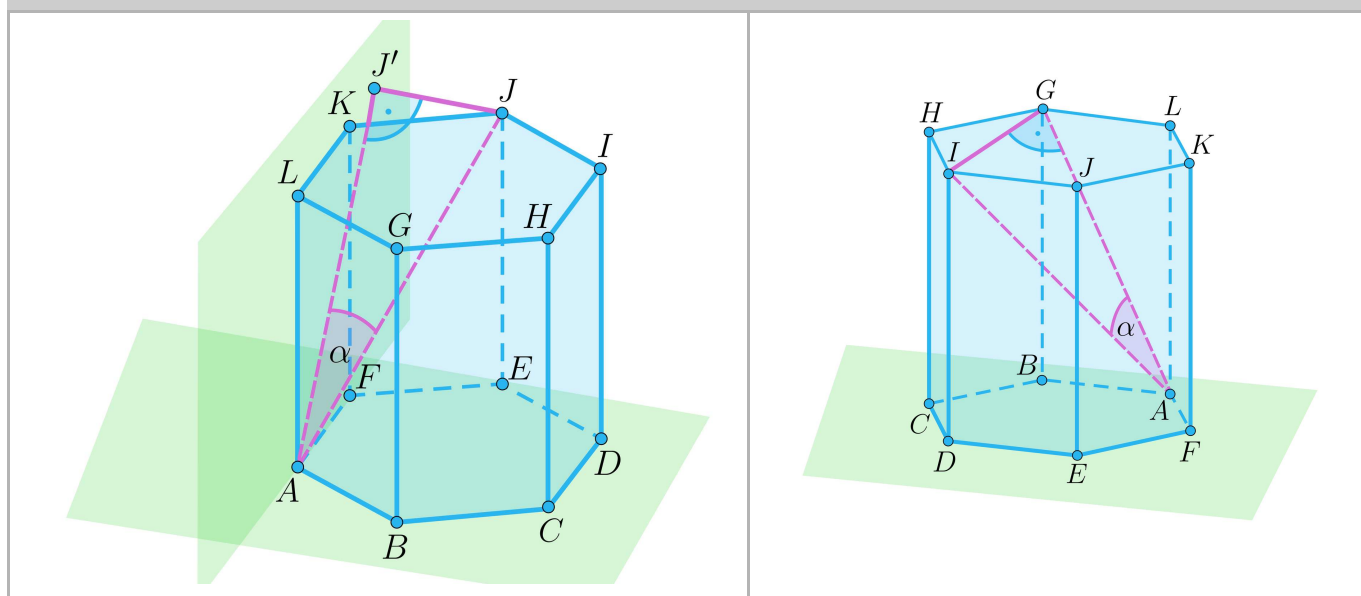
Na poniższych rysunkach zaznaczono kąty pomiędzy przekątnymi (są dwie różne) graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego a jego podstawą.



Zaznaczamy jeszcze kąt między przekątną tego graniastosłupa a ścianą boczną zawierającą jeden z końców przekątnej.

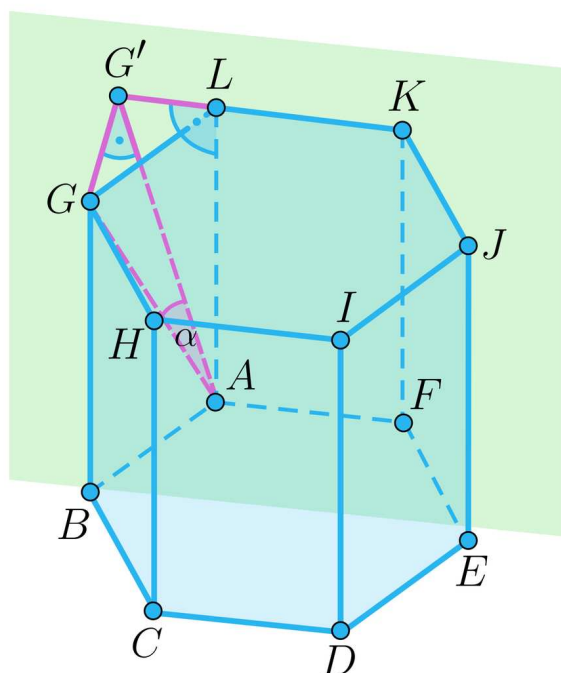
Kąt między krótszą przekątną AJ graniastosłupa a płaszczyzną ściany bocznej $AFKL$

Kąt między dłuższą przekątną AI graniastosłupa a ścianą boczną $ABGL$



Przykład 2

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny. O krawędzi podstawy 4 i wysokości $4\sqrt{2}$. Wyznamy miarę kąta między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.



Rozważmy kąt między przekątną AG ściany $ABGL$, a płaszczyzną ściany $AFKL$.
Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie BAG możemy wyznaczyć długość przekątnej AG :

$$|AG| = \sqrt{|AB|^2 + |BG|^2} = \sqrt{16 + 32} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Niech G' będzie rzutem prostokątnym G na płaszczyznę ściany $AFKL$. Wówczas kąt $GG'L$ jest prosty. Ponadto można zauważyć, że $|\angle GLG'| = 60^\circ$, stąd $|\angle LGG'| = 30^\circ$.
Ponieważ $|LG'| = 2$, więc $|GG'| = 2\sqrt{3}$.

Z trójkąta prostokątnego ALG' mamy:

$$|AG'| = \sqrt{|AL|^2 + |LG'|^2} = \sqrt{32 + 4} = \sqrt{36} = 6$$

Trójkąt prostokątny AGG' ma boki długości $|AG'| = 6$, $|AG| = 4\sqrt{3}$ oraz $|GG'| = 2\sqrt{3}$.

Wynika stąd, że jest to trójkąt o kątach 30° , 60° , 90° , więc $|\angle GAG'| = 30^\circ$.

Słownik

graniastosłup

wielościan, którego dwie ściany są równoległymi wielokątami przystającymi, zaś pozostałe ściany są równoległobokami; równoległe ściany nazywamy podstawami graniastosłupa, zaś pozostałe to ściany boczne

graniastosłup prosty

graniastosłup, którego ściany boczne są prostokątami

graniastosłup pochyły

graniastosłup, w którym istnieją ściany boczne, które nie są prostokątami

graniastosłup prawidłowy

graniastosłup prosty, w którego podstawie znajduje się wielokąt foremny

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

W poniższej prezentacji multimedialnej przedstawiono kąty między odcinkami graniastosłupów prawidłowych a płaszczyznami zawierającymi ich ściany. Przeanalizuj poszczególne rysunki. Na ich podstawie wykonaj Polecenie 2.

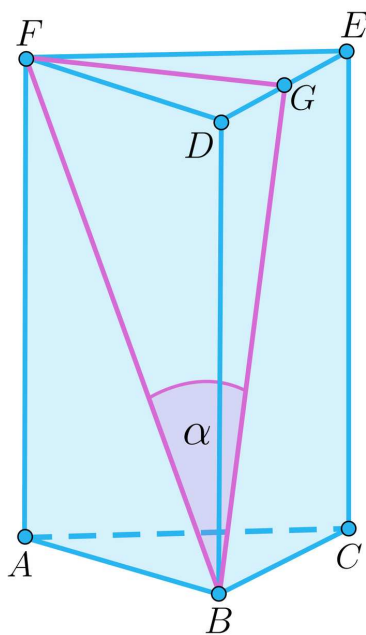


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DcEmhLxei>

Polecenie 2

Rozwiąż poniższy test jednokrotnego wyboru.

Zaznacz poprawną odpowiedź. Punkt G jest rzutem prostokątnym punktu F na płaszczyznę $BCED$. Na poniższym rysunku zaznaczono kąt między:



- ☐ Przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.
- ☐ Wysokością podstawy a ścianą boczną.
- ☐ Wysokością podstawy a przekątną ściany bocznej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



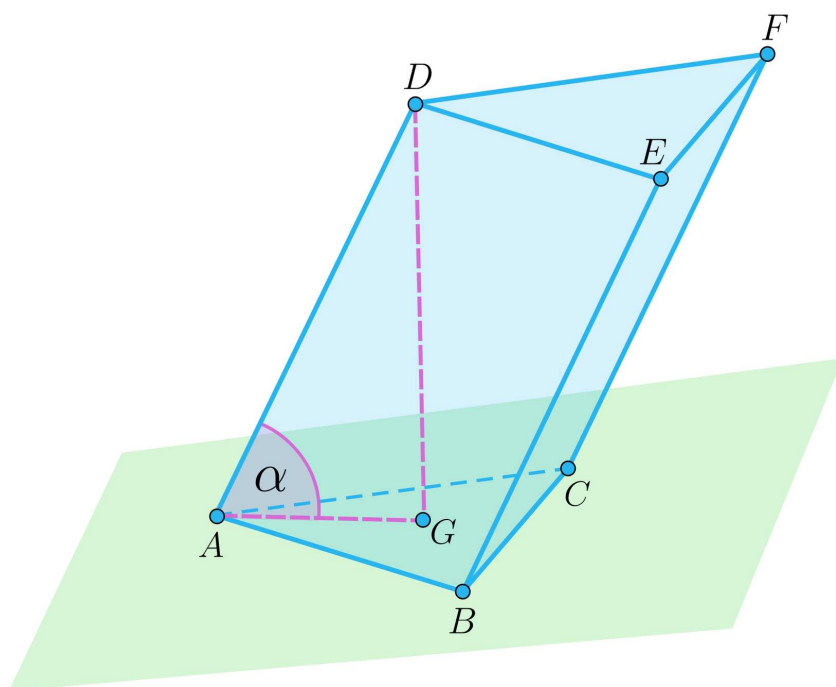
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. G jest rzutem prostokątnym D na płaszczyznę ABC . Na rysunku poniżej zaznaczono kąt między:

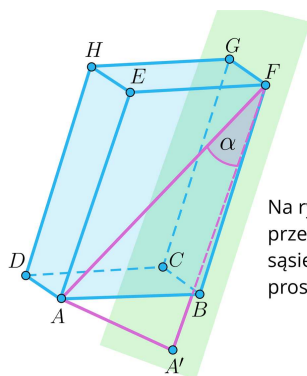


- ☐ Krawędzią boczną a wysokością graniastopuła.
- ☐ Wysokością graniastopuła a płaszczyznę podstawy graniastopuła.
- ☐ Krawędzią boczną a płaszczyznę podstawy graniastopuła.

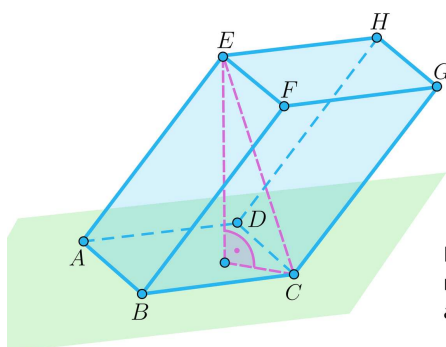
Ćwiczenie 4



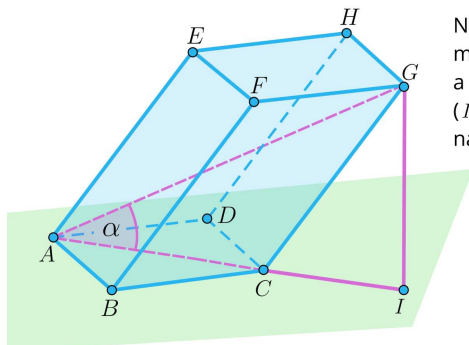
Zaznacz te ilustracje, na których zdania umieszczone przy rysunkach są prawdziwe.



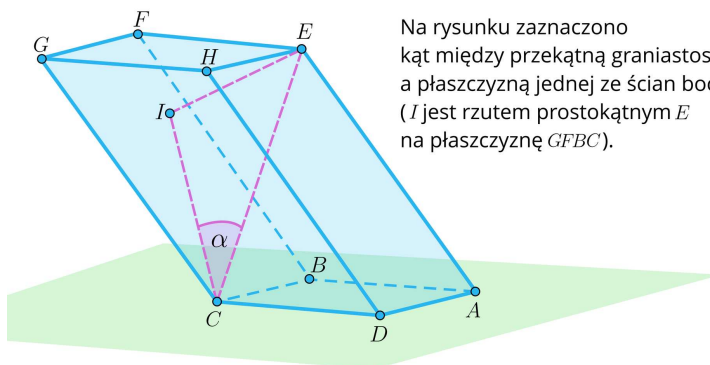
Na rysunku zaznaczono kąt między przekątną ściany bocznej a płaszczyzną sąsiedniej ściany bocznej (A' jest rzutem prostokątnym A na płaszczyznę $BCGF$).



Na rysunku zaznaczono kąt między przekątną graniastosłupa a jego podstawą.



Na rysunku zaznaczono kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną jego podstawy (I jest rzutem prostokątnym G na płaszczyznę $ABCD$).



Na rysunku zaznaczono kąt między przekątną graniastosłupa a płaszczyzną jednej ze ścian bocznych (I jest rzutem prostokątnym E na płaszczyznę $GFBC$).



Ćwiczenie 5



Krawędź boczna długości 10 cm graniastostupa pochyłego tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $\alpha = 30^\circ$. Oblicz wysokość tego graniastostupa.

Ćwiczenie 6



Podstawą graniastostupa jest romb o boku długości 6 i kącie ostrym $\alpha = 60^\circ$. Wysokość graniastostupa jest równa 6. Wyznacz kąty między przekątnymi graniastostupa a płaszczyzną jego podstawy.

Ćwiczenie 7



Podstawą graniastostupa jest sześciokąt foremny o boku długości 5, ściany boczne są kwadratami. Oblicz sinusy kątów między przekątnymi graniastostupa a jego podstawą.

Ćwiczenie 8



Dany jest graniastostup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy 4 i wysokości $4\sqrt{2}$. Wyznacz kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje kąt między przekątnymi ścian bocznych a podstawami graniastosłupa;
- rozpoznaje kąt między przekątnymi graniastosłupa a jego podstawami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Prezentacja multimedialna”. Po zapoznaniu się uczniów z rodzajami kątów przedstawionymi w prezentacji uczniowie rozwiązują polecenia powiązane z medium.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-4 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie zapoznają się z medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” i rozwiązują polecenia z nim związane.

Materiały pomocnicze:

- [Graniastosłup prosty i jego własności. Związki miarowe w graniastosłupach](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Kąty między prostymi a płaszczyznami w graniastosłupie”.