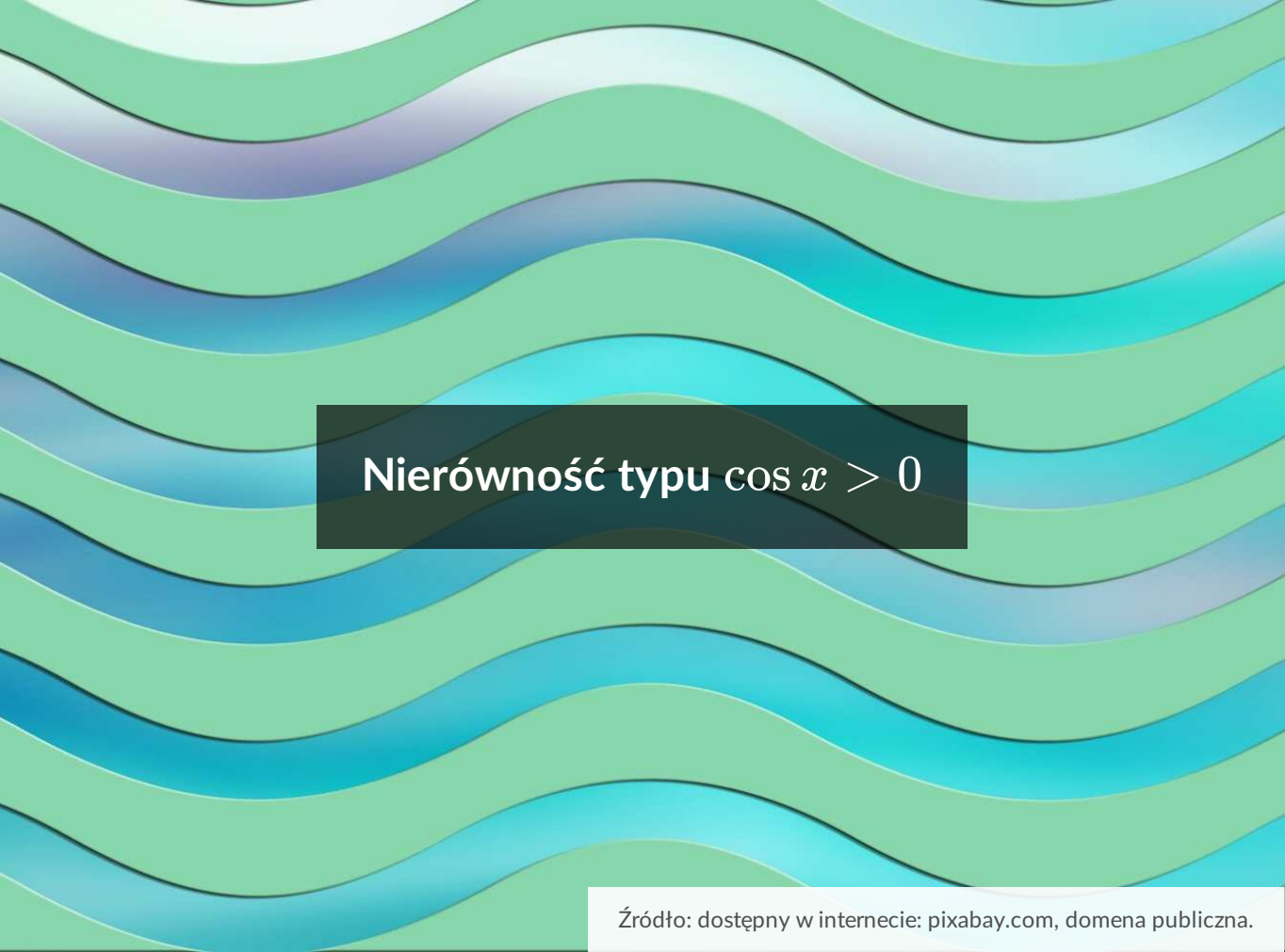




Nierówność typu $\cos x > 0$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Nierówność typu $\cos x > 0$

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Podczas tej lekcji nauczymy się rozwiązywać równania typu: $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$, $\cos x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. Będziemy korzystać z wykresu funkcji cosinus oraz własności tej funkcji. Koniecznie przypomnij sobie, w jaki sposób rozwiązywaliśmy równania trygonometryczne typu $\cos x = a$.

Twoje cele

- Nauczysz się rozwiązywać proste nierówności trygonometryczne typu: $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$, $\cos x \geq a$.
- Zobaczysz zastosowania do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych o bardziej złożonym charakterze.

Przeczytaj

Podczas tej lekcji nauczymy się rozwiązywać równania typu: $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$, $\cos x \geq a$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą. W tym celu będziemy korzystać z metody rozwiązywania równań trygonometrycznych typu $\cos x = a$. Przypomnijmy stosowne twierdzenie:

Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego $\cos x = a$

Algorytm szukania rozwiązań równania $\cos x = a$.

- 1) Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 , dla którego $\cos x_0 = a$. Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) Znajdujemy drugie rozwiązanie $-x_0$. Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pokażemy, jak rozwiązać nierówność $\cos x > a$.

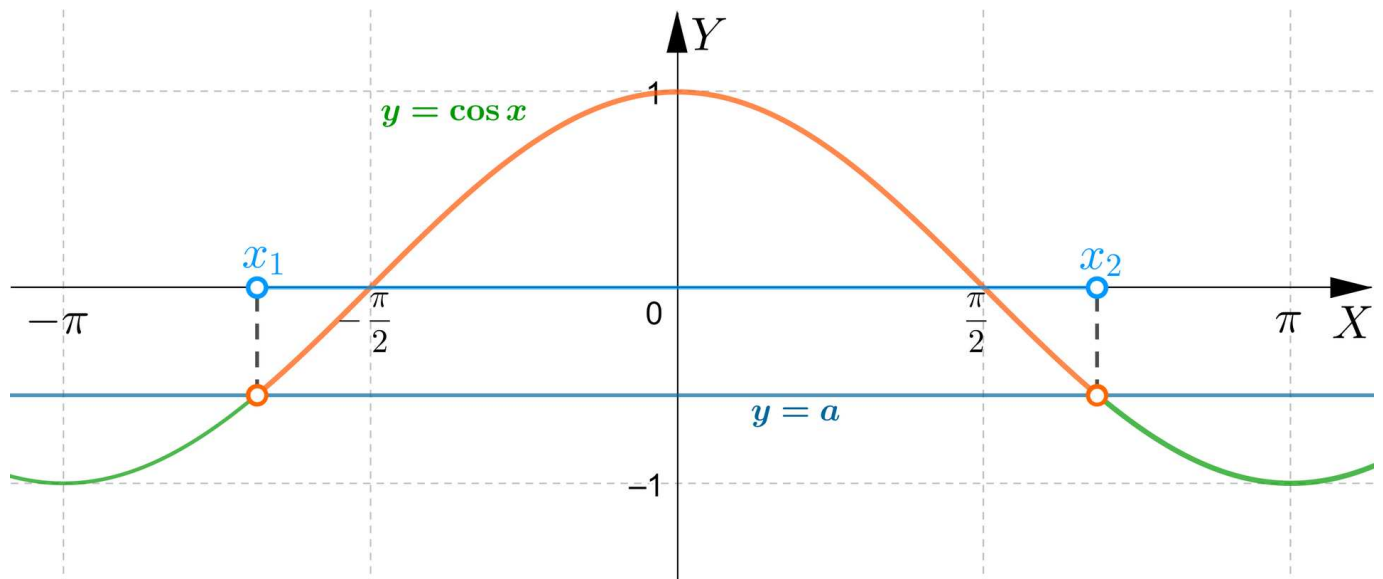
Rozważmy przypadki:

1. Niech $a < -1$. Wówczas nierówność $\cos x > a$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.
2. Niech $a \geq 1$. Wówczas rozwiązaniem nierówności $\cos x > a$ jest zbiór pusty.
3. Niech $a \in \langle -1, 1 \rangle$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Dlaczego wybieramy taki przedział?

Po pierwsze okresem zasadniczym funkcji cosinus jest $T = 2\pi$, a wybrany przedział ma długość 2π . Po drugie, jak zobaczymy na rysunku, w tym przedziale rozwiązanie nierówności $\cos x > a$ będzie można przedstawić w postaci jednego przedziału (a nie sumy przedziałów); będzie to dawało wygodniejszą formę zapisu rozwiązania nierówności.



Spójrzmy na rysunek. Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\cos x > a$, będziemy w istocie badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$.

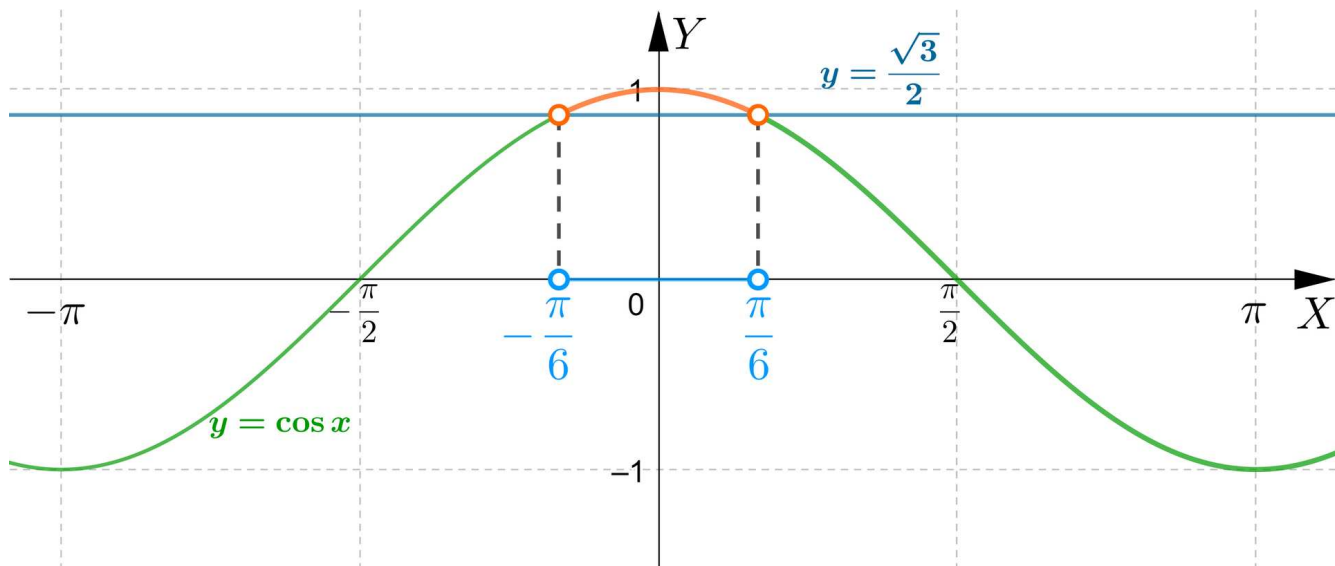
Zaznaczmy na pomarańczowo ten fragment wykresu funkcji $y = \cos x$, który leży powyżej prostej $y = a$. Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji $y = \cos x$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne to x_1 i x_2 – są to rozwiązania równania $\cos x = a$. Zatem w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartości większe od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in (x_1, x_2)$. Wykorzystując okresowość funkcji cosinus podajemy rozwiązanie nierówności $\cos x > a$: jest to suma wszystkich przedziałów $(x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Spójrzmy na poniższy wykres.



Korzystając z twierdzenia o rozwiązywaniu równań z funkcją cosinus najpierw rozwiązujemy równanie $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$: $x = -\frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{\pi}{6}$.

Zatem w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ rozwiązaniem nierówności $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest przedział $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

Wykorzystując okresowość funkcji cosinus podajemy rozwiązanie nierówności $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$: jest to suma wszystkich przedziałów $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy nierówność $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Rozwiążemy tę nierówność, bazując na nierówności poprzedniej. Skoro rozwiązaniem nierówności $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ była suma wszystkich przedziałów $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to rozwiązaniem nierówności $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest suma wszystkich przedziałów $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

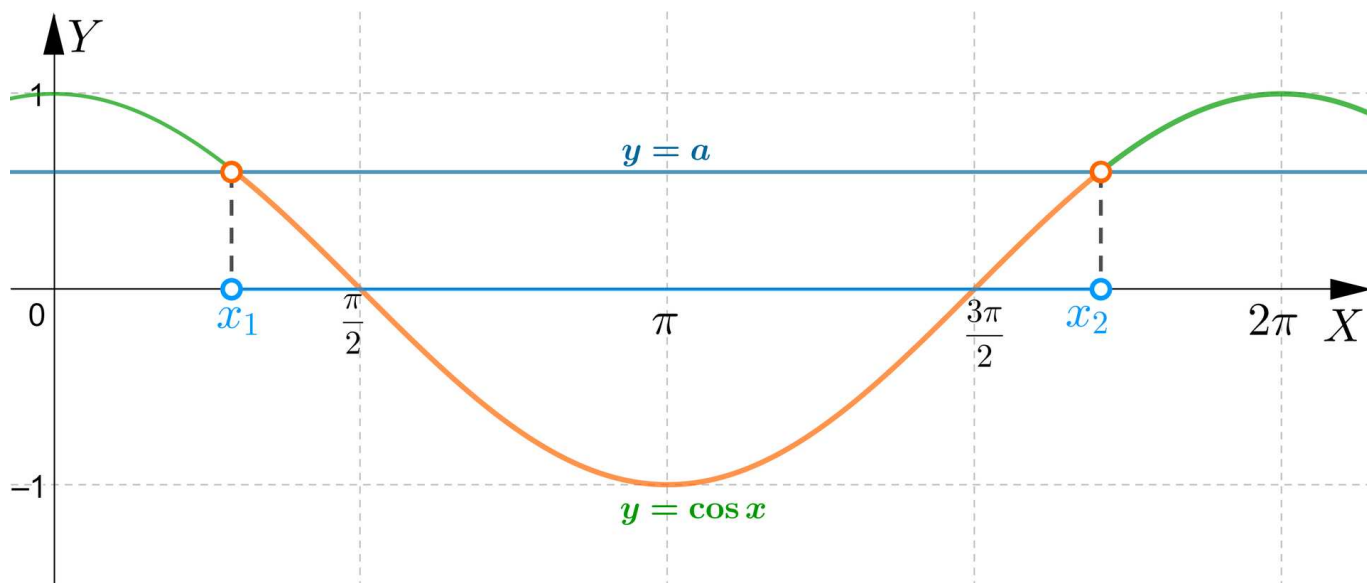
Pokażemy, jak rozwiązać nierówność $\cos x < a$.

Rozważmy przypadki:

1. Niech $a > 1$. Wówczas nierówność $\cos x < a$ jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej.
2. Niech $a \leq -1$. Wówczas rozwiązaniem nierówności $\cos x < a$ jest zbiór pusty.
3. Niech $a \in (-1, 1)$.

Najpierw rozwiążemy nierówność w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$. Wybieramy taki przedział, gdyż okresem zasadniczym funkcji cosinus jest $T = 2\pi$, a wybrany przedział ma długość 2π . Jak

zobaczymy na rysunku, w tym przedziale rozwiązanie nierówności $\cos x < a$ będzie można przedstawić w postaci jednego przedziału (a nie sumy przedziałów); to będzie dawało wygodniejszą formę zapisu rozwiązania nierówności.



Spójrzmy na rysunek.

Skoro chcemy rozwiązać nierówność $\cos x < a$, będziemy w istocie badać, w jakich przedziałach funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$.

Zaznaczymy na pomarańczowo ten fragment wykresu funkcji $y = \cos x$, który leży poniżej prostej $y = a$. Zauważmy, że prosta $y = a$ przecina wykres funkcji $y = \cos x$ w dwóch punktach, których pierwsze współrzędne to x_1 i x_2 – są to rozwiązania równania $\cos x = a$. Zatem w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartości mniejsze od wartości funkcji $y = a$ dla argumentów $x \in (x_1, x_2)$.

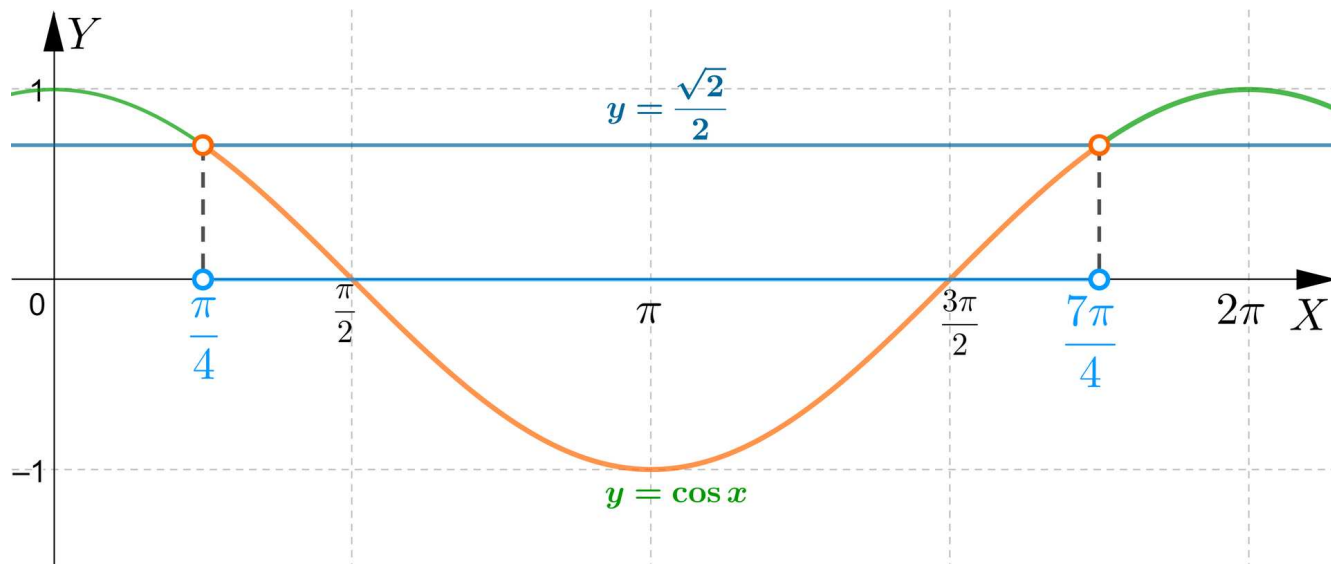
Wykorzystując okresowość funkcji cosinus, podajemy rozwiązanie nierówności $\cos x < a$: jest to suma wszystkich przedziałów $(x_1 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Spójrzmy na poniższy wykres.



Korzystając z twierdzenia o rozwiązywaniu równań z funkcją cosinus, najpierw rozwiązujemy równanie $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{4}$ lub $x = \frac{7\pi}{4}$.

Zatem w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozwiązaniem nierówności $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ jest przedział $(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$.

Wykorzystując okresowość funkcji cosinus, podajemy rozwiązanie nierówności $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$: jest to suma wszystkich przedziałów $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 4

Rozwiążemy nierówność $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiążemy tę nierówność, bazując na nierówności z poprzedniego przykładu. Skoro rozwiązaniem nierówności $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ była suma wszystkich przedziałów $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, to rozwiązaniem nierówności $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ będzie suma wszystkich przedziałów $[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Słownik

rozwiązywanie równań z funkcją cosinus

Algorytm szukania rozwiązań równania $\cos x = a$.

1) Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\cos x_0 = a$. Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2) Znajdujemy drugie rozwiązanie $-x_0$. Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższą prezentacją, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DzJGWzTWv>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej nierówności typu cosinus X większy od zera.

Polecenie 2

Wskaż rozwiązanie nierówności $4 \cos^2 x < 3$.

☐ $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $\left(\frac{7\pi}{6} + k\pi, \frac{11\pi}{6} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Polecenie 3

Rozwiązaniem nierówności $(\cos x - 3)\left(\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$ w przedziale $(0, \pi)$ jest zbiór:

☐ $\left(0, \frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \pi\right)$

☐ $\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right)$

☐ $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \pi\right)$

☐ $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż nierówności, które spełnia liczba $x = \frac{\pi}{5}$.

☐ $\cos 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\cos x > \frac{1}{2}$

☐ $\cos 3x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$

Ćwiczenie 2



Rozwiązaniem nierówności $\cos 2x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest zbiór:

☐ $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

☐ $(-\frac{3\pi}{8} + 2k\pi, \frac{3\pi}{8} + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 3



Każdej nierówności przyporządkuj jej rozwiązanie.

Zbiór pusty

$$2 \cos 3x \leq 1, (9)$$

$$2 \cos 4x < -1, (9)$$

$$2 \cos(4x - 1) < \sqrt{12} - \sqrt{2}$$

$$\cos x \leq \sqrt{7} - \sqrt{14}$$

$$\cos 2x > x^2 + 4x + 5$$

$$\cos^2 3x \geq \sqrt{1999} - \sqrt{2000}$$

Zbiór liczb rzeczywistych

Ćwiczenie 4



Połącz w pary nierówności, które mają te same rozwiązania.

$$\cos^2 x < \frac{3}{4}$$

$$|\cos 3x| > \frac{1}{2}$$

$$\cos x < \frac{1}{2}$$

$$(\cos^2 2x - 2)(2 \cos x - 1) > 0$$

$$\cos 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2 3x > \frac{1}{4}$$

$$(\cos 3x - \sqrt{7})(2 \cos 3x - \sqrt{3}) > 0$$

Ćwiczenie 5



Wskaż nierówność, która dla parametru $a = -2$ ma rozwiązanie: $\langle -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\cos x \leq \frac{3+a}{-a}$

☐ $\cos x \geq \frac{3a-2}{3a-7}$

☐ $\cos x \leq \frac{3a-7}{5a-1}$

☐ $\cos x < \frac{a-2}{a-5}$

Ćwiczenie 6



Wskaż rozwiązanie nierówności $(\cos 2x + \frac{1}{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos 2x\right) > 0$ w przedziale $(0, \pi)$.

☐ $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$

☐ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\right)$

☐ $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}\right)$

☐ $\left(0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{12}, \pi\right)$

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ rozwiązaniem nierówności

$$\cos 2x \geq \frac{a+1}{2a-1}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ćwiczenie 8



Rozwiąż nierówność $(2 \cos x + 1)(4 \cos^2 x - 3) > 0$ w przedziale $(\pi, 2\pi)$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność typu $\cos x > 0$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje proste nierówności trygonometryczne typu: $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\cos x \leq a$, $\cos x \geq a$.
- analizuje zastosowania do rozwiązywania nierówności trygonometrycznych o bardziej złożonym charakterze.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opowiadanie.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Nierówność typu $\cos x > 0$ ”.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Film samouczek”, czyta treść polecenia nr 1 – „Zapoznaj się uważnie z poniższą prezentacją, a następnie wykonaj polecenia”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania numer 1-5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Zadania numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Nierówność typu $\cos x > 0$ ”.