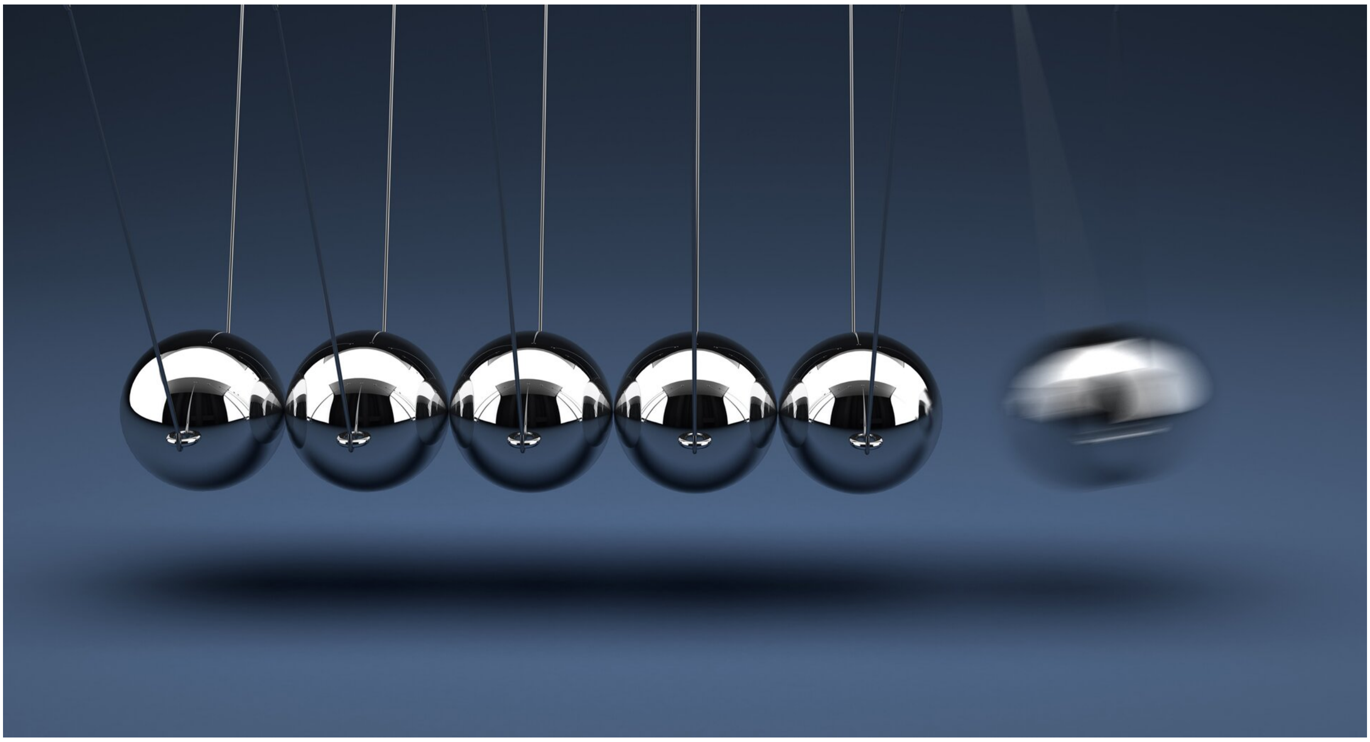
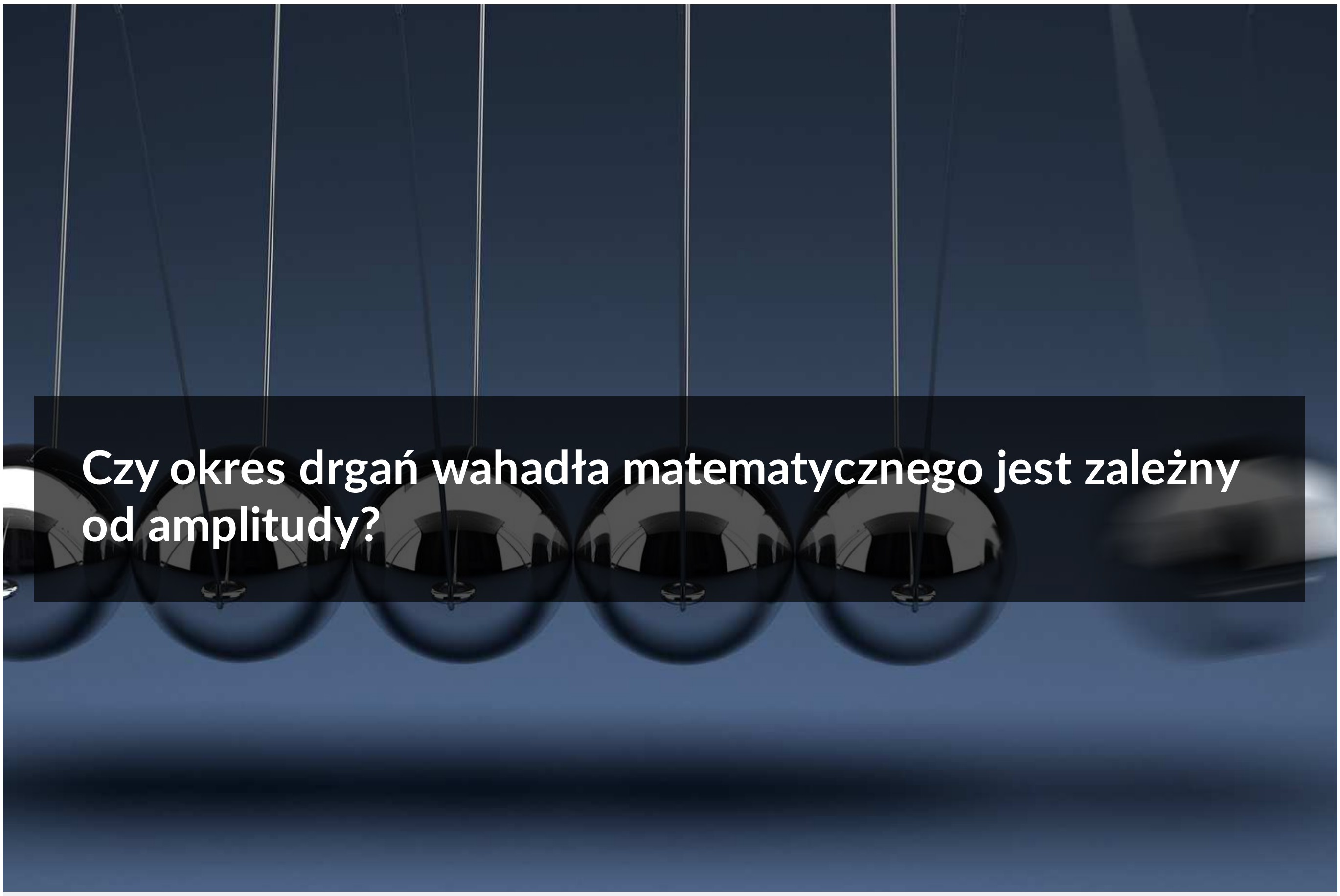


Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od amplitudy?



Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od amplitudy?

Źródło: dostępny w internecie: https://www.istockphoto.com/pl/zdj%C4%99cie/ko%C5%82yska-newtona-gm465044128-59504348 [dostęp 26.05.2022], iStockphoto, tylko do użytku edukacyjnego na zpe.gov.pl.

Czy to nie ciekawe ?

Różne wahadła drgają z różnymi okresami. Jeśli zaczniemy się zastanawiać, od czego zależy okres drgań wahadła, do głowy może przyjść wiele wielkości, np.: długość wahadła, masa ciężarka, amplituda drgań, wychylenie początkowe, prędkość początkowa, czy przyspieszenie grawitacyjne. Okazuje się, że okres drgań wahadła znacząco zależy tylko od dwóch spośród tych wielkości. Czy zależy on od amplitudy? Tego dowiesz się w tym e-materiale.

Rys. a. Wahadła.

Źródło: dostępny w internecie: https://pixabay.com/pl/photos/wahad%c5%82o-hipnoza-hipnotyzer-1533106/ [dostęp 29.05.2022].

Twoje cele

- wyjaśnisz, kiedy okres drgań wahadła matematycznego w przybliżeniu nie zależy od amplitudy, oraz kiedy to przybliżenie przestaje mieć zastosowanie,
- wykonasz doświadczenie w wirtualnym laboratorium, w którym zbadasz zależność okresu drgań wahadła matematycznego od maksymalnego wychylenia,
- rozwiążesz zadania dotyczące wahadła matematycznego.

Przeczytaj

Warto przeczytać

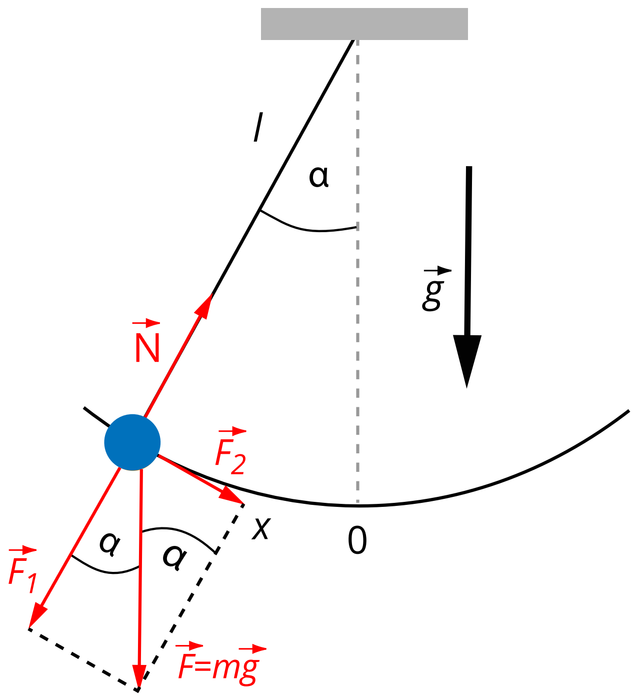
Wahadło matematyczne to drgający na sznurku, lub sztywnym pręcie ciężarek. Rozmiar tego ciężarka jest tak mały w porównaniu z długością sznurka, a sznurek lub pręt tak lekki w porównaniu z ciężarkiem, że możemy traktować ciężarek jako masę punktową.
W praktyce, jeśli sznurek ma długość 1 m i zawiesimy na nim kulkę o średnicy centymetra, będziemy mogli twierdzić, że stworzyliśmy wahadło matematyczne. Wahadłem matematycznym natomiast nie będzie duża bombka choinkowa wisząca na nitce o długości 1 cm.

Okres drgań wahadła matematycznego obliczamy ze wzoru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdzie l jest długością wahadła, zaś g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Z kolei amplituda drgań wahadła zależy od wychylenia początkowego i prędkości początkowej. Im bardziej odchylimy wahadło od pionu na samym początku i im mocniej je pchniemy, tym większą amplitudę ono osiągnie. Widać natomiast, że ani wychylenie początkowe, ani prędkość początkowa, ani amplituda drgań nie pojawiają się w podanym wzorze na okres. Zatem, gdybyśmy uznali ten wzór za prawdziwy, okres drgań wahadła matematycznego nie zależałby od amplitudy drgań.

Przyroda jest jednak trochę bardziej skomplikowana. Okazuje się, że powyższy wzór jest jedynie przybliżeniem. Daje od wartości tym lepsze, im amplituda drgań wahadła jest dużo mniejsza niż jego długość. Takie drgania nazywamy *małymi drganiami* i tylko dla takich drgań okres wahadła praktycznie nie zależy od amplitudy. To oznacza, że jeśli odchylimy wahadło o 5^o od pionu i puścimy bez prędkości początkowej, to jego okres będzie praktycznie taki sam, jak przy 10^o. Gdy jednak wychylenie początkowe będzie wynosiło 45^o, 90^o lub 120^o , dla każdej z tych wartości kąta, okres drgań wahadła będzie inny. Spróbujmy zrozumieć, dlaczego tak się dzieje.



Rys. 1. Siły działające na wahadło matematyczne. Użyte na rysunku oznaczenia sił zostały opisane w tekście.
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl.

Rozważmy wahadło matematyczne o długości l, które w pewnym momencie jest wychylone o kąt α od pionu, jak na rysunku powyżej (Rys. 1.). Ciężarek o masie m porusza się po łuku, który na powyższym rysunku został oznaczony czarną linią, mającą kształt łuku. Położenie ciężarka x liczymy wzdłuż tego łuku. Przyjmijmy, że $x = 0$ w położeniu równowagi. Kiedy ciężarek wychyli się w prawo od położenia równowagi, jego położenie będziemy przyjmować jako dodatnie i będzie ono równe drodze wzdłuż łuku, między położeniem równowagi a ciężarkiem. Podobnie, kiedy ciężarek wychyli się w lewo od położenia równowagi, jego położenie będziemy przyjmować jako ujemne i będzie ono równe co do wartości drodze wzdłuż łuku, między położeniem równowagi a ciężarkiem. Jeśli wyrazimy α w radianach, można zapisać długość łuku x jako:

$$x = l\alpha.$$

A zatem:

$$\alpha = \frac{x}{l}.$$

Wartość składowej siły grawitacji prostopadłej do łuku wynosi $F_1 = mg$ cos α. To ona, wspólnie z siłą naciągu sznurka o wartości N, odpowiada za utrzymanie ciężarka w ruchu po wycinku okręgu. Zatem wypadkowa tych dwóch sił, musi pełnić rolę siły dośrodkowej:

$$F_{\mathrm{d}} = \frac{mv^2}{l} = N - mg\cos\alpha,$$

gdzie v jest prędkością chwilową ciężarka.

Wartość składowej siły grawitacji stycznej do łuku wynosi $F_2 = mg$ sin α i to ona przyciąga ciężarek w kierunku położenia równowagi i jest odpowiedzialna za jego ruch wahadłowy. Uwzględniając fakt, że ta siła jest skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia ciężarka, można zapisać:

$$F_2 = -mg\sin\alpha = -mg\sin\left(\frac{x}{l}\right).$$

Siła ta wcale nie jest proporcjonalna do wychylenia, czyli do -x, tylko do $\sin\left(x/l\right)$, a więc nie mamy tu do czynienia z ruchem harmonicznym. To sprawia, że obliczenie okresu drgań jest bardzo trudne. Spójrzmy jednak na wartości sin α dla kilku wartości α wyrażonych w radianach:

α **[rad]**	sin α
0,00000 (= 0°)	0,00000
0,17453 (= 10°)	0,17365
0,26180 (= 15°)	0,25882
0,34907 (= 20°)	0,34202
0,52360 (= 30°)	0,50000

Dopóki α nie przekracza 15°, wartości α i $\sin\alpha$ są niemal identyczne - różnica pojawia się dopiero na trzeciej cyfrze znaczącej. Dla tak małych kątów można zatem stosować przybliżenie sin α ≈ α, dzięki któremu otrzymujemy przybliżony wzór na siłę:

$$F_2 = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha = -\frac{mgx}{l} \propto.$$

Z powyższej zależności wynika, że dla małych kątów siła jest proporcjonalna do wychylenia $-x$, więc ruch jest harmoniczny. By znaleźć okres drgań, możemy teraz zastosować zależności, które znamy dla ruchu harmonicznego (zob. e-materiał pt. *Okres drgań w ruchu harmonicznym*):

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \phi_0\right),$$

$$F(t) = ma(t) = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) = -m\omega^2 x(t).$$

Porównując ostatnie wyrażenie ze wzorem na wartość siły F_2 dostajemy:

$$-mx\frac{g}{l} = -mx\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

czyli:

$$T = \tfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy, wspomniany już na początku tego e-materiału, wzór na okres drgań wahadła matematycznego. Pokazaliśmy jednak, że wzór ten nie jest dokładny, ale jest konsekwencją pewnych przybliżeń, o których należy pamiętać.

> **Ważne!**
>
> **Tylko dla małych odchyleń wahadła od pionu jego okres drgań nie zależy od amplitudy.**

Zastanówmy się, co powyższy wniosek oznacza w praktyce. Zacznijmy od stwierdzenia, że okres drgań mierzymy z ustaloną dokładnością. Dopóki będziemy wprawiać wahadło w drgania o małej amplitudzie, uzyskany wzór na okres będzie poprawny. Oznacza to między innymi, że z przy przyjętej dokładności pomiaru, nie stwierdzimy zależności okresu drgań od amplitudy.

Jeśli jednak zaczniemy wprawiać wahadło w drgania o coraz większej amplitudzie, przybliżenie małych kątów przestanie obowiązywać. Wartość sin α będzie coraz bardziej odbiegała (będzie coraz mniejsza) od α, co sprawi, że rzeczywista wartość siły stycznej do łuku $F_2 = mg$ sin α będzie się coraz bardziej różniła od wartości przybliżonej $F_2 \approx mg\alpha$. Mniejsza siła nadaje ciężarkowi mniejsze przyspieszenie. W efekcie, przybliżona (tzn. większa od rzeczywistej) wartość siły F_2 będzie opisywała szybsze (od rzeczywistych) drgania ciężarka i krótszy (od rzeczywistego) okres drgań. Zauważymy więc, przy ustalonej dokładności pomiarów, że okres drgań wzrasta wraz ze wzrastającą amplitudą.

Wyobraźmy sobie następujący skrajny przypadek: ciężarek jest zaczepiony na sztywnym pręcie i odchylamy go o 180°. Jeśli uda nam się puścić go idealnie bez prędkości początkowej, pozostanie on w bezruchu. Będzie spoczywał w położeniu równowagi nietrwałej, zupełnie jak ołówek postawiony na zatemperowanym rysiku. W takiej skrajnej sytuacji możemy czekać w nieskończoność, a ciężarek nie wykona jednego wahnięcia. Okres jego drgań dąży zatem do nieskończoności: $T \to \infty$.

Na szczęście, w praktyce mamy najczęściej do czynienia z małymi drganiami. Dla takich drgań różnica między rzeczywistym okresem, a tym uzyskanym z przybliżonego wzoru, jest nieznaczna. Dlatego, w większości przypadków, podany wzór

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

można wykorzystywać bez obaw, twierdząc, że okres wahadła matematycznego nie zależy od jego amplitudy. W każdym jednak przypadku, rozstrzygnięcie o stosowalności przybliżenia małych drgań zależy od dokładności, z jaką mierzymy okres drgań.

Słowniczek

okres drgań

(ang. *period of oscillation*)- czas trwania jednego pełnego drgania.

wahadło matematyczne

(ang. *simple pendulum*) - wahadło, które składa się z nieważkiej i nierozciągliwej linki, na której wisi ciężarek będący masą punktową.

przybliżenie małych kątów

(ang. *small angle approximation*) - przybliżenie, w którym przyjmuje się, że $\sin\alpha \approx \alpha$ dla małych kątów α. Aby przybliżenie działało, kąt α musi być wyrażony w radianach. Przybliżenie to, zastosowane do ruchu drgającego, prowadzi do jego opisu znanego jako *przybliżenie małych drgań* lub *przybliżenie małych wychyleń*.

Wirtualne laboratorium WL-I

Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od amplitudy?

Izochronizm to własność układu drgającego polegająca na niezależności okresu drgań od amplitudy. W Wirtualnym laboratorium wykonasz pomiary, dzięki którym samodzielnie potwierdzisz lub obalisz hipotezę mówiącą o izochronicznym charakterze wahadła matematycznego.
W pierwszym pomiarze ograniczysz się do niewielkich wychyleń wahadła od pionu.
W drugim zbadasz izochronizm wahadła w pełnym zakresie amplitud.
Jak sądzisz, czy w obu tych eksperymentach uzyskasz to samo rozstrzygnięcie?

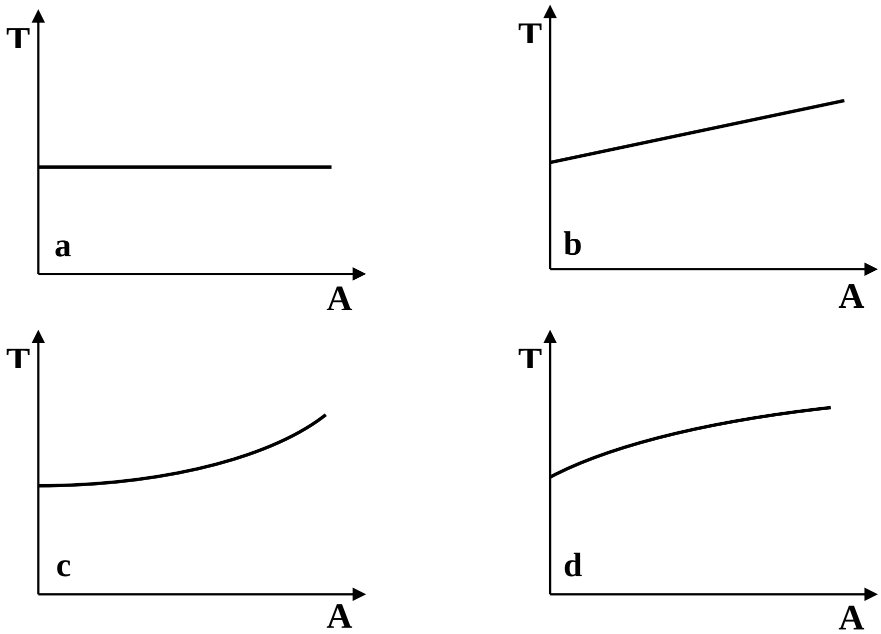
Polecenie 1

Zanim rozpoczniesz pracę w laboratorium wirtualnym, obejrzyj film prezentujący rzeczywiste pomiary. Nauczyciel mierzy czas trwania jednego okresu drgań wahadła dla różnych wartości amplitudy. Pomiary są wykonywane przy pomocy specjalnie przygotowanego zestawu pomiarowego. Zawiera on odpowiednik fotokomórki, która reaguje na kolejne przejścia nici przez położenie równowagi. Pomiar jest automatyczne uruchamiany, a następnie zatrzymywany. Dzięki temu niepewność pomiaru czasu jest rzędu milisekundy i dla rozstrzygnięcia hipotezy o izochroniczności lub jej braku może być pominięta. Jak się następnie przekonasz, inaczej jest w Wirtualnym laboratorium.

Film dostępny pod adresem /preview/resource/R2I2iXtveT9nY

Zapoznaj się z audiodeskrypcją filmu.

Wykorzystaj wykonane podczas nagrania pomiary i przygotuj na ich podstawie tabelę zależności $T(A)$. Wpisując wyniki próbuj sobie wyobrazić wykres tej zależności - do której spośród poniższych wersji najlepiej będzie pasował?



Hipotetyczne postacie wykresu zależności okresu drgań T od amplitudy drgań A.

Wykonaj wykres zależności okresu drgań od amplitudy. W krótkiej wypowiedzi opisz postać wykresu oraz rozstrzygnij i uzasadnij, czy uzyskany przez Ciebie wykres potwierdza hipotezę izochroniczności wahadła matematycznego.

Doświadczenie 1

Izochronizm małych drgań wahadła matematycznego

Problem badawczy

Celem eksperymentu jest zbadanie izochronicznego charakteru drgań wahadła matematycznego dla małych początkowych odchyleń od pionu.

Hipoteza

Dla amplitud z przedziału $A \in (0°, 15°)$ wahadło jest układem izochronicznym przy dokładności pomiaru dostępnej w Wirtualnym laboratorium.

Co będzie potrzebne

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium.

> **Ćwiczenie 1**
> Porównaj wyposażenie laboratorium wirtualnego z wyposażeniem stanowiska pomiarowego laboratorium pokazanego w filmie.
>
> Omów pokrótce wpływ stwierdzonych różnic w wyposażeniu na rozstrzygnięcie hipotezy. Czy jest możliwe, by nauczyciel w filmie i eksperymentator w laboratorium wirtualnym zweryfikowali tę hipotezę różnie, każdy w sposób naukowo uzasadniony?
> Zapisz swoje pomysły oraz umotywowaną odpowiedź na postawione pytanie w Dzienniku pomiarów.

Instrukcja

Postępuj zgodnie z instrukcją zaproponowaną w Laboratorium.

Polecenie 2

- Wybierz wartość n - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których zatrzymasz stoper i odczytasz czas t.
- Przeprowadź pomiar okresu drgań T dla siedmiu wartości amplitudy A podanych w Tabeli pomiarów.
  Zacznij od najmniejszej amplitudy, jaką potrafisz nastawić. Została ona w tabeli opisana jako $0°$. Pozostałe ustaw tak dokładnie, jak pozwala na to mechanizm Laboratorium. Ostatni pomiar wykonaj dla amplitudy minimalnie mniejszej niż $15°$.
- Wyniki wpisz do Dziennika pomiarów.

Podsumowanie

Polecenie 3

- Przeanalizuj zaproponowaną w instrukcji propozycję określenia niepewności standardowej $u(t)$ pomiaru czasu trwania n okresów drgań wahadła. Jeśli zgadzasz się z przedstawioną tam oceną, uzupełnij kolumny $u(t)$ oraz $u(T)$ w tabeli pomiarów zgodnie z tą propozycją.
W przeciwnym razie oszacuj tę niepewność zgodnie z własną wiedzą i doświadczeniem, a odpowiednie kolumny uzupełnij zgodnie z dokonaną oceną. Swoje rozumowanie przedstaw w Dzienniku pomiarów.
- Sporządź wykres zależności $T(A)$.
- Rozważ celowość naniesienia odcinków niepewności pomiaru amplitudy drgań. Zapisz swoją decyzję wraz z krótkim uzasadnieniem w Dzienniku pomiarów.
- Zorganizuj i wyskaluj oś rzędnych wykresu w taki sposób, by odcinki niepewności $u(T)$ były na niej dobrze widoczne. Uzasadnij krótko następujące stwierdzenie: „Naniesienie niepewności pomiaru okresu drgań jest konieczne dla rozstrzygnięcia hipotezy”.
- Na podstawie wykresu rozstrzygnij hipotezę badawczą. Swoją argumentację zapisz w Dzienniku pomiarów.

Doświadczenie 2

Izochronizm drgań wahadła matematycznego w szerokim zakresie amplitud

Problem badawczy

Celem eksperymentu jest zbadanie izochronicznego charakteru drgań wahadła matematycznego dla dowolnie dużych początkowych odchyleń od pionu.

Hipoteza

Okres drgań wahadła matematycznego wzrasta wraz z odpowiednio dużym wzrostem amplitudy.

Co będzie potrzebne

Wykorzystaj wyposażenie Wirtualnego laboratorium, podobnie jak w doświadczeniu 1.

Instrukcja

Postępuj zgodnie z instrukcją Wirtualnego laboratorium.

Polecenie 4

- Przyjmij taką samą jak w doświadczeniu 1. wartość n - liczby pełnych okresów drgań wahadła, po których zatrzymasz stoper i odczytasz czas t.
- Zapisz w Dzienniku pomiarów:
  - wartość n;
  - wartość T_0 - zmierzonego w doświadczeniu 1. okresu drgań wahadła dla najmniejszej amplitudy;
  - niepewność $u(T_0)$ otrzymaną w doświadczeniu 1.
- Przeprowadź pomiar okresu drgań T dla dziewięciu wartości amplitudy A podanych w tabeli pomiarów. $u(T_0)$ Ostatni pomiar wykonaj dla amplitudy minimalnie mniejszej niż 180°.
- Wyniki wpisz do tabeli.

Podsumowanie

Względny okres drgań wahadła w

Dla potrzeb opracowania wyników przyjmij, że okres T_0, zmierzony w doświadczeniu 1., pełni rolę okresu wzorcowego. Zmierzone w doświadczeniu 2. okresy podzielisz przez T_0, tworząc zmienną w, którą można nazwać względnym okresem drgań wahadła. Zgodnie z postawioną hipotezą wartość w powinna zależeć od amplitudy drgań A:

$$w(A) = \frac{T(A)}{T_0}$$

Analiza zależności $w(A)$ pozwoli Ci zweryfikować tę hipotezę.

Niepewność $u(w)$

Względny okres w jest wielkością mierzoną pośrednio. Jest on wyrażony jako iloraz dwóch wielkości mierzonych bezpośrednio: okresu wzorcowego T_0 oraz poszczególnych okresów $T(A)$. Niepewności pomiaru tych okresów są jednakowe, to dzięki przyjętej procedurze ich określania. Oznaczajmy więc dalej te niepewności jako $u(T_0)$.

Wyznacz niepewność pomiaru $u(w)$ zgodnie z zasadami opisanymi w e-materiale „Niepewność wielkości mierzonej pośrednio”. Zwróć uwagę na sekcję „Dla zainteresowanych” na końcu części „Przeczytaj”. W ostatnim wyrażeniu podano ogólną postać udziałów w niepewności pomiaru wielkości złożonej, w sytuacji gdy jest ona ilorazem wielkości prostych. Zastosowanie tych wyrażeń do sytuacji, gdy niepewności obu zmiennych mierzonych pośrednio są jednakowe, pozwala wyprowadzić:

$$u(w) = \frac{u(T_0)}{T_0^2}\sqrt{T_0^2 + T^2}$$

Ćwiczenie dla zainteresowanych

Wyprowadź we własnym zakresie przytoczone wyrażenie.

Polecenie 5

- Zastosuj metodę określania niepewności standardowej $u(t)$ pomiaru czasu trwania n okresów drgań wahadła taką samą jak w doświadczeniu 1. Uzupełnij kolumny $u(t)$ oraz $u(T)$ zgodnie z tą metodą.
- Oblicz i wpisz do tabeli wielkość $w(A)$ oraz jej niepewność $u(w)$ dla każdego pomiaru.
- Sporządź wykres zależności $w(A)$.
- Rozważ celowość naniesienia odcinków niepewności pomiaru amplitudy drgań. Zapisz swoją decyzję wraz z krótkim uzasadnieniem w Dzienniku pomiarów.
- Zorganizuj i wyskaluj oś rzędnych wykresu w taki sposób, by odcinki niepewności $u(w)$ były na niej dobrze widoczne. Uzasadnij krótko następujące stwierdzenie: „Naniesienie niepewności pomiaru względnego okresu drgań jest konieczne dla rozstrzygnięcia hipotezy".
- Na podstawie wykresu rozstrzygnij hipotezę badawczą. Swoją argumentację zapisz w Dzienniku pomiarów.

Polecenie 6

Dla zainteresowanych

Rozważ hipotezę dotyczącą wahadła w Wirtualnym laboratorium: „Istnieje rozdzielczość stopera i powiązana z nim niepewność pomiaru okresu drgań wahadła - w Twoim eksperymencie jest to $u(T_0)$ - przy której wahadło jest układem izochronicznym aż do amplitudy 60°, natomiast przy amplitudzie 90° jest układem anizochronicznym".
Opisz rozumowanie oraz sposób wykorzystania Twoich wyników prowadzące do zweryfikowania tej hipotezy.

Ćwiczenie 2

Wyobraź sobie, że Wirtualne laboratorium zostało pozbawione stopera (mechanicznego czy elektronicznego). Zaproponuj alternatywne wyposażenie, pozwalające **jakościowo** stwierdzić, że w miarę wzrostu amplitudy drgań wahadła rośnie również okres jego drgań.

Opisz pokrótce możliwy przebieg takiego badania; w opisie uwzględnij rolę eksperymentatora.

Rozstrzygnij przy tym, czy w zaproponowanych przez Ciebie warunkach można zrezygnować z kątomierza.

Zapisz swoje pomysły w Dzienniku pomiarów, w sekcji „Alternatywne wyposażenie Laboratorium”.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Kulę o masie M i promieniu r wieszamy na lince o masie m i długości l. Linkę zaczepiamy na haczyku przymocowanym do sufitu, który jest na tyle wysoko, że kula nie sięga podłogi. Pole grawitacyjne ma natężenie g, a wahadło wykonuje drgania o amplitudzie A. Zapisz słowami lub matematycznie dwa warunki konieczne, by to wahadło można było nazwać wahadłem matematycznym.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Scenariusz lekcji

Imię i nazwisko autora:	Krzysztof Lorek
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	**Czy okres drgań wahadła matematycznego jest zależny od amplitudy?**
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	**Cele kształcenia – wymagania ogólne** III. Planowanie i przeprowadzanie obserwacji lub doświadczeń oraz wnioskowanie na podstawie ich wyników. **Zakres rozszerzony** **Treści nauczania – wymagania szczegółowe** I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 10) przeprowadza wybrane obserwacje, pomiary i doświadczenia korzystając z ich opisów; planuje i modyfikuje ich przebieg; formułuje hipotezę i prezentuje kroki niezbędne do jej weryfikacji; 15) posługuje się pojęciem niepewności pomiaru wielkości prostych i złożonych; zapisuje wynik pomiaru wraz z jego jednostką oraz z uwzględnieniem informacji o niepewności; uwzględnia niepewności przy sporządzaniu wykresów; V. Drgania. Uczeń: V. Drgania. Uczeń: 8) doświadczalnie: a) demonstruje niezależność okresu drgań wahadła od amplitudy.

Kształtowane kompetencje kluczowe:	**Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.:** • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: • wyjaśni, kiedy okres drgań wahadła matematycznego w przybliżeniu nie zależy od amplitudy oraz kiedy to przybliżenie przestaje mieć zastosowanie. • wykona doświadczenie w wirtualnym laboratorium, w którym zbada zależność okresu drgań wahadła matematycznego od maksymalnego wychylenia. • rozwiąże zadania dotyczące wahadła matematycznego.
Strategie i metody **nauczania:**	strategia eksperymentalno-obserwacyjna
Formy zajęć:	wykład, doświadczenie w wirtualnym laboratorium, doświadczenie
Środki dydaktyczne:	WL_I, ciężarek szkolny (np. 50g), sznurek lub nitka, statyw, stoper lub telefon komórkowy ze stoperem, komputer dla każdego ucznia.
Materiały pomocnicze:	T. Dryński, Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, PWN, Warszawa 1980
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Przed rozpoczęciem lekcji należy zbudować wahadło – tzn. zawiesić ciężarek na nitce (długość ok 1 – 1,5 m będzie wystarczająca), oraz przywiązać nitkę do statywu. Nauczyciel przypomina, czym jest wahadło matematyczne, jak oblicza się okres jego drgań, oraz że wzór działa tylko dla małych kątów. W tym konspekcie zakładamy, że wyprowadzenie wzoru na okres wraz z wprowadzeniem przybliżenia małych kątów odbyło się na którejś z wcześniejszych lekcji.	
Faza realizacyjna:	

<table>
<tr><td colspan="2">Nauczyciel zwraca uwagę na fakt, że okres nie zależy od amplitudy. Aby to zweryfikować, opowiada, jak zmierzyć okres drgań wahadła z uwzględnieniem wyników zadania 7 z zestawu ćwiczeń.

Ochotnik z sali mierzy okres drgań wahadła dla dwóch różnych małych wychyleń początkowych, korzystając ze stopera, lub swoim telefonem komórkowym. Nauczyciel zapisuje oba wyniki na tablicy wraz z błędem pomiarowym wynikającym z czasu reakcji ucznia i weryfikuje, czy wyniki są zgodne.

Nauczyciel przypomina, że wzór jest słuszny tylko dla małych kątów, zatem być może dla większego wychylenia początkowego powinniśmy otrzymać inny wynik. Dyskutując z uczniami i opierając się na przedostatnim akapicie części „Warto przeczytać” tego e-materiału, ustala, że spodziewamy się większego wyniku.

Ochotnik z sali mierzy okres drgań wahadła dla dużego wychylenia początkowego (ok. 90^{o}) i wynik jest zapisany na tablicy. Najprawdopodobniej różnica będzie niedostrzegalna. Nauczyciel komentuje wpływ niepewności pomiarowych oraz fakt, że opory ruchu stopniowo zmniejszają amplitudę drgań.

Uczniowie otrzymują zadanie wykonania eksperymentu w wirtualnym laboratorium, gdzie nie ma oporów ruchu. Do końca lekcji mają sporządzić wykresy okresu drgań od kąta odpowiadającego maksymalnemu wychyleniu, dla 5 różnych kątów z przedziału $<0^{o}, 180^{o}>$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Faza podsumowująca:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nauczyciel przedstawia całej klasie pracę ucznia, na której najlepiej widać wspomnianą zależność. Przypomina jej źródło, oraz fakt, że dla małych kątów można nadal korzystać ze standardowego wzoru.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Praca domowa:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Zadania 1 i 3 z zestawu ćwiczeń.</td></tr>
<tr><td>Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:</td><td>Doświadczenie w wirtualnym laboratorium uczniowie mogą wykonać samodzielnie w domu przed lekcją.</td></tr>
</table>