



Związek pochodnej z ciągłością funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Związek pochodnej z ciągłością funkcji

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Definicje granicy funkcji oraz pochodnej w punkcie wydają się niezwykle podobne. Podczas stawiania pierwszych kroków w świecie matematyki można je nawet niejednokrotnie pomylić. Należy się zastanowić czy to pozorne podobieństwo przekłada się na jakąkolwiek zależność. Przedmiotem tych zajęć będzie dogłębna analiza tak postawionego problemu. Odchodząc nieco od potocznie rozumianych zastosowań pochylimy się nad pięknem teoretycznej matematyki. Zobaczmy także, że potrafi ona prowadzić do niespodziewanych i fascynujących wniosków.

Twoje cele

- Poznasz zależność pomiędzy różniczkowalnością i ciągłością funkcji.
- Poznasz zaskakującą odpowiedź na trudne pytanie zadawane przez matematyków przełomu XVIII i XIX wieku.

Przeczytaj

Pojęcie ciągłości rozważaliśmy do tej pory w nieco ogólniejszej sytuacji, gdy funkcja była określona na dowolnym zbiorze $A \subset \mathbb{R}$. Ponieważ pojęcie różniczkowalności jest już nieco bardziej wymagające, przytoczymy znane definicje w formach odpowiednich do dalszych rozważań.

Definicja: ciągłość

Funkcję $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy ciągłą w punkcie

- $x_0 \in (a, b)$, gdy granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje i wynosi $f(x_0)$,
- a , gdy granica prawostronna funkcji f w punkcie a istnieje i wynosi $f(a)$,
- b , gdy granica lewostronna funkcji f w punkcie b istnieje i wynosi $f(b)$.

Definicja: różniczkowalność

Niech $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją. Wówczas

- pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in (a, b)$ nazywamy liczbę (o ile istnieje)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

- pochodną funkcji f w punkcie a nazywamy liczbę (o ile istnieje)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

- pochodną funkcji f w punkcie b nazywamy liczbę (o ile istnieje)

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in \langle a, b \rangle$, gdy ma w tym punkcie pochodną

Przypominamy, że funkcję nazywamy ciągłą, gdy jest ciągła w każdym punkcie oraz różniczkowalną, gdy jest różniczkowalna w każdym punkcie.

Nietrudno dostrzec podobieństwo pomiędzy różniczkowalnością i ciągłością. Granice pojawiające się w obu przypadkach nasuwają słuszny wniosek, że pojęcia te są silnie powiązane. Kluczową zależność przedstawia twierdzenie poniżej.

Twierdzenie: warunek konieczny różniczkowalności

Jeżeli funkcja $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in \langle a, b \rangle$, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód

Skupimy się na sytuacji, gdy $x_0 \in (a, b)$. Załóżmy, że f jest różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$. Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Przekształcając dalej mamy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, a więc granica funkcji f w punkcie x_0 istnieje i wynosi $f(x_0)$. Dowody przypadków $x_0 = a$ oraz $x_0 = b$ są analogiczne.

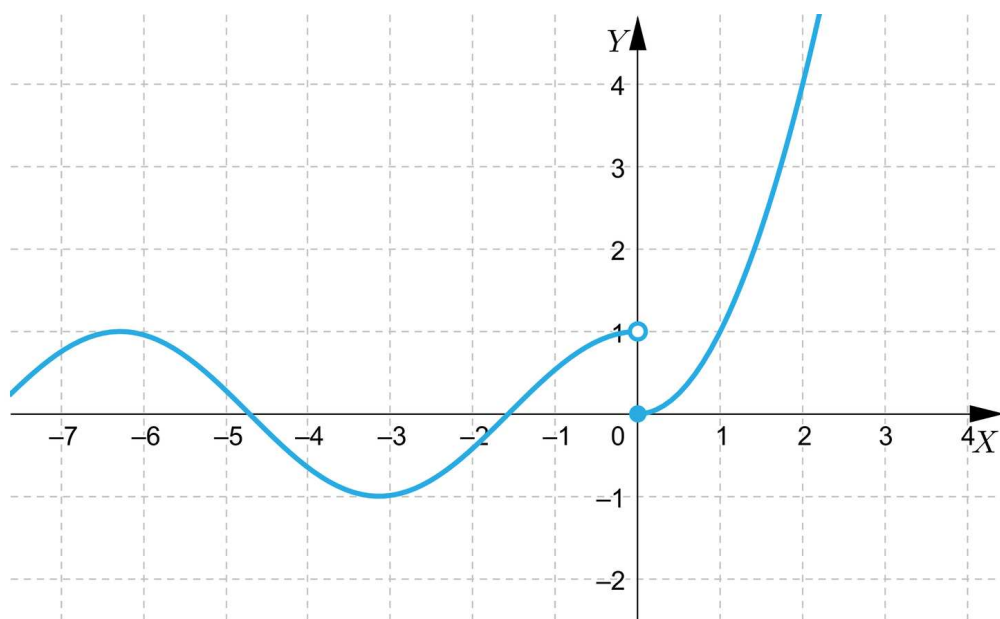
Przykład 1

Korzystając z powyższego twierdzenia, możemy bardzo łatwo wykazać, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{dla } x < 0 \\ x^2 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

nie jest różniczkowalna w punkcie 0, gdyż nie jest w tym punkcie ciągła. Brak ciągłości wynika z bezpośredniego rachunku wartości granicy lewostronnej w punkcie $x = 0$ i wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos(x) = 1 \neq 0 = f(0)$, choć można to zauważyć po prostu rysując wykres funkcji.



Należy pamiętać, że różniczkowalność jest jedynie warunkiem koniecznym ciągłości. Oznacza to, że aby funkcja była różniczkowalna w danym punkcie **konieczne** jest, by była w nim ciągła. Nie jest to jednak warunek wystarczający, a więc aby funkcja była w danym punkcie różniczkowalna **nie wystarczy**, by była w nim ciągła. Pokazuje to kolejny przykład.

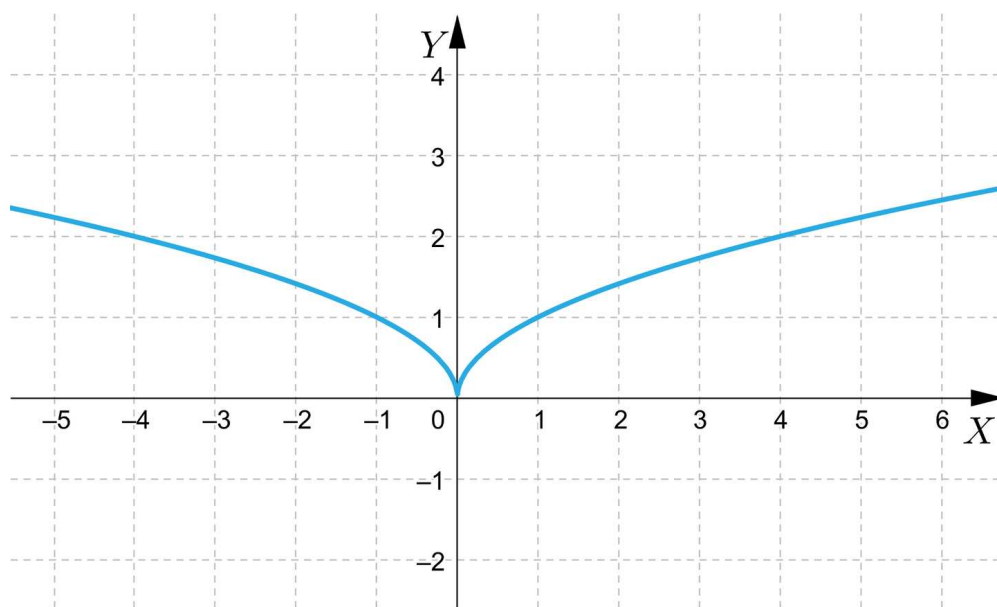
Przykład 2

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \sqrt{|x|}$. Łatwo zauważyć, że funkcja f jest **ciągła** jako złożenie dwóch funkcji ciągłych. Pokażemy, że nie jest ona różniczkowalna w punkcie 0.

Spróbujmy policzyć pochodną prawostronną

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Otrzymujemy, że pochodna w punkcie 0 nie istnieje, gdyż nie istnieje pochodna prawostronna. Można to także wywnioskować z wykresu funkcji.

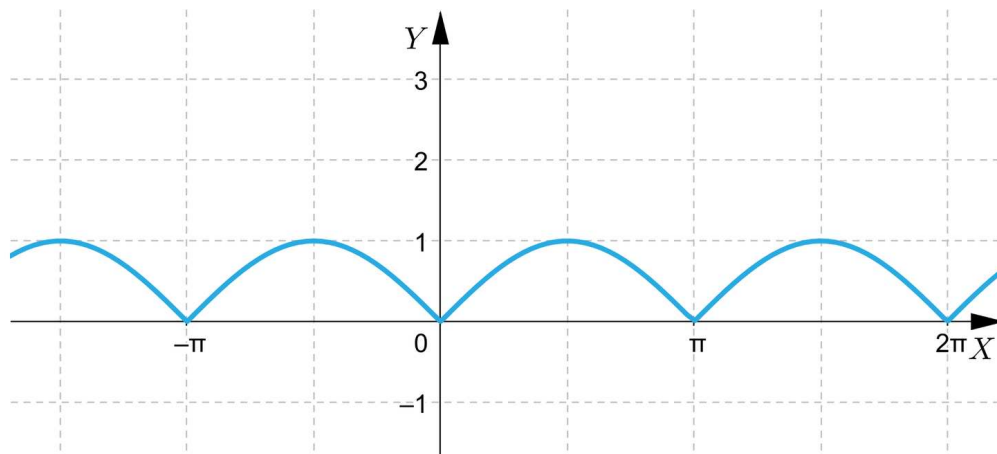


Jest jasne, że funkcja f nie posiada pochodnej w punkcie 0.

Istnieją zatem funkcje ciągłe, które nie posiadają pochodnej w pewnym punkcie. Można skonstruować jednak nieco bardziej wyrafinowany przykład.

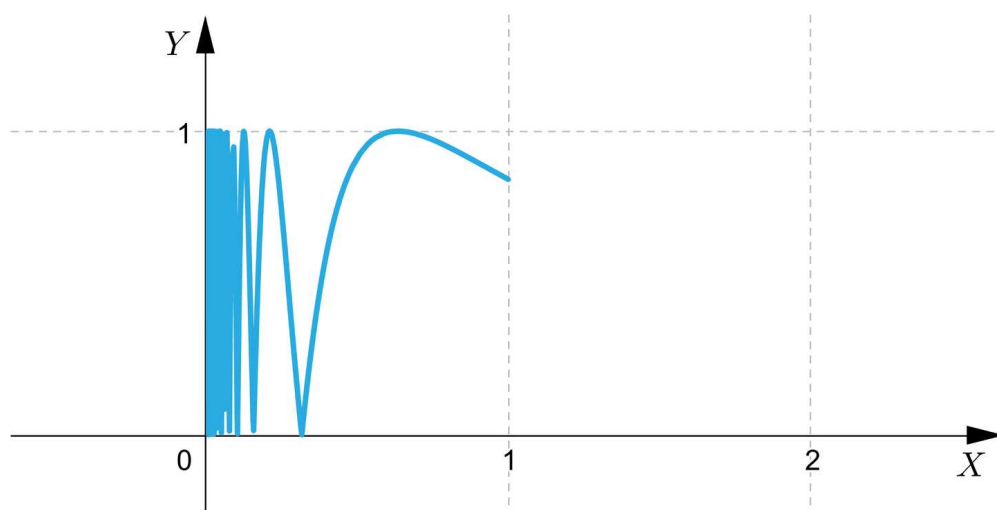
Przykład 3

Konstrukcję rozpoczniemy od znalezienia funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która ma nieskończenie wiele punktów, w których nie jest **różniczkowalna**. Wystarczy przyjąć $f(x) = |\sin(x)|$. Funkcja ta jest oczywiście ciągła jako złożenie funkcji ciągłych.



Z wykresu funkcji łatwo zauważyć, że pochodna funkcji f nie istnieje dla żadnego punktu $x_0 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcja f jest zatem funkcją ciągłą, która nie posiada pochodnej w nieskończenie wielu punktach swojej dziedziny.

Spróbujmy teraz 'ścisnąć' ten wykres do zera. Posłuży nam do tego funkcja $\frac{1}{x}$, $x > 0$. Aby uniknąć problemów w punkcie 0, zdefiniujemy funkcję $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ następująco:
 $g(x) = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$.



Wówczas g jest funkcją ograniczoną i ciągłą. Nie posiada ona jednak pochodnej w nieskończenie wielu punktach przedziału $(0, 1)$. Zbiór punktów, w których f nie posiada pochodnej jest bowiem postaci $\left\{ \frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

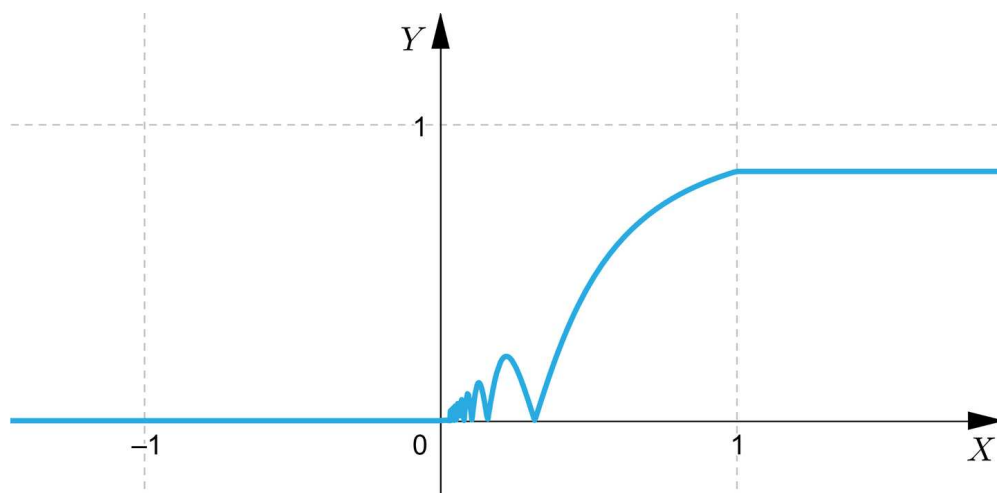
Zauważmy, że funkcja g ma jeszcze jedną własność, którą warto by było poprawić. Granica prawostronna g w punkcie 0 nie istnieje. Problemy z różniczkowalnością tej funkcji są również związane z otoczeniem punktu 0. Przyjmijmy zatem, że funkcja $h: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i dana jest wzorem

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ x \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| & \text{dla } x \in (0, 1). \\ \sin(1) & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Sprawdzenie ciągłości funkcji h w punktach 0 i 1 nie jest trudne. Nietrudno też wykazać, że funkcja h nie posiada pochodnej w punkcie 0. Otrzymujemy

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{x \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|}{x} = \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|.$$

Granica powyższego wyrażenia, gdy $x \rightarrow 0^+$ nie istnieje. Nie istnieje więc także pochodna w punkcie 0. Analogicznie wykazujemy, że funkcja h jest nieróżniczkowalna w 1. Wykres funkcji h przedstawia się następująco



Ostatecznie udało się skonstruować funkcję ciągłą, która jest nieróżniczkowalna w nieskończenie wielu punktach przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. Z drugiej strony, funkcja h jest także różniczkowalna w nieskończenie wielu punktach.

Nasunąć się może trudne pytanie: **Czy istnieje funkcja ciągła, która nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie swojej dziedziny?**

Ciekawostka

Odpowiedź na to pytanie jest o dziwo pozytywna. Jej uargumentowanie wykracza jednak w znacznym stopniu poza ramy matematyki licealnej. Postaramy się jednak w miarę przystępny sposób pokazać jak może być skonstruowana funkcja o wspomnianych własnościach.

Takimi są na przykład funkcje Weierstrassa.

Dla każdej liczby naturalnej określamy funkcję $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f_n(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cos(9^n \pi x)$.

Możemy teraz przyjąć $S_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Okazuje się, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $(S_n(x))_n$ jest zbieżnym ciągiem liczbowym. Definiujemy $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Nie jest jednak różniczkowalna w żadnym punkcie. Widać, że narysowanie dokładnego wykresu funkcji f nie jest możliwe. Możemy jednak narysować wykresy funkcji $S_1, S_2, \dots, S_5$. Stanowią one niedokładne, ale oddające charakter, przybliżenie funkcji f .

Powyższy przykład jest jedną z funkcji Weierstrassa. Karl Weierstrass (1815-1897) opublikował w roku 1886 pracę, w której wykazał, że jeżeli weźmiemy dowolne $a \in (0, 1)$, $b > \frac{2+3\pi}{2a}$ oraz $f_n(x) = a^n \cos(b^n \pi x)$, to postępując jak wyżej otrzymamy zawsze funkcję ciągłą, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie swojej dziedziny. Wykazanie tego faktu nie jest łatwe, zaś jeszcze na przełomie XVIII i XIX wieku część środowiska matematycznego była przekonana, że wszędzie nieróżniczkowalne funkcje ciągłe nie istnieją.

Słownik

funkcja ciągła

funkcja, która jest ciągła w każdym punkcie dziedziny

funkcja różniczkowalna

funkcja, która jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z zamieszczonymi tu informacjami, a następnie wykonaj polecenie poniżej.

Polecenie 2

Spośród podanych poniżej zdań wybierz prawdziwe.

☐

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w przynajmniej jednym punkcie, to jest ciągła w każdym punkcie.

☐

Warunkiem wystarczającym na ciągłość funkcji jest jej różniczkowalność.

☐

Istnieje nieciągła funkcja różniczkowalna.

☐

Każda funkcja różniczkowalna jest ciągła.

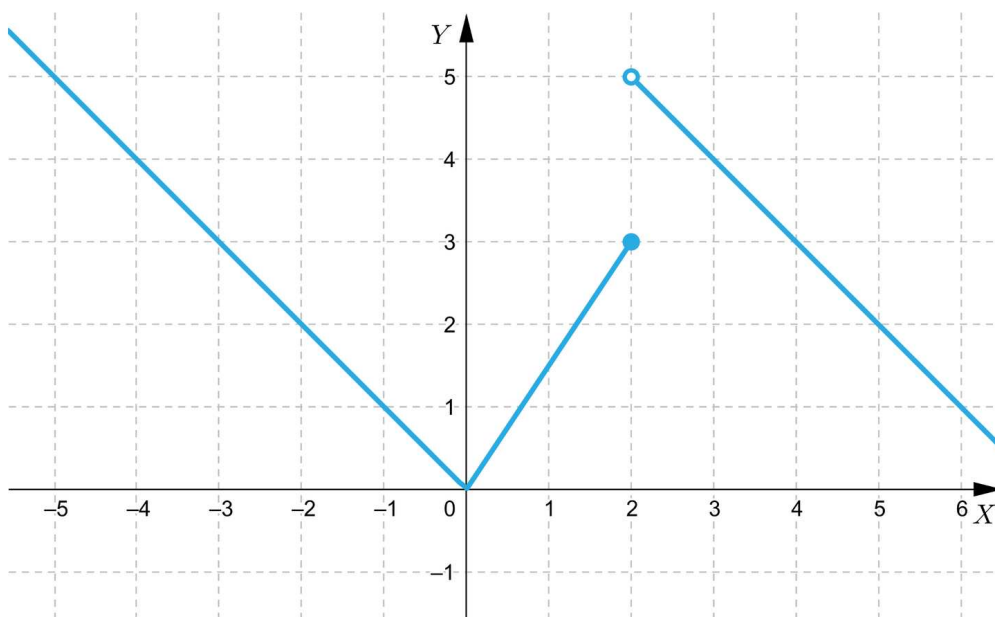
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest funkcja przedstawiona na wykresie. Wskaż zdania prawdziwe



☐ Funkcja jest ciągła w $x = 2$.

☐ Funkcja jest różniczkowalna w $x = 5$.

☐ Funkcja jest różniczkowalna w $x = 0$.

☐ Funkcja jest ciągła w $x = 5$.

☐ Funkcja jest ciągła w $x = 0$.

☐ Funkcja jest różniczkowalna w $x = 2$.

Ćwiczenie 2

Które z podanych funkcji są ciągłe, a które różniczkowalne w całej swojej dziedzinie.
Przeciągnij i upuść.

Funkcje ciągłe

$f(x) = |x|$

$f(x) = \operatorname{tg} x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = \operatorname{tg} x$

$f(x) = |\cos x|$

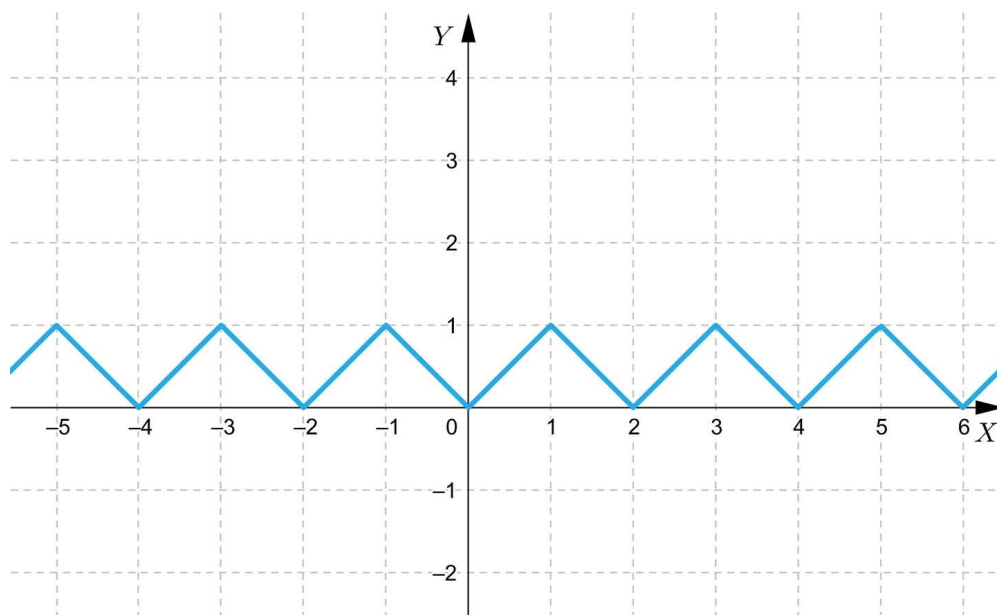
$f(x) = x^2$

Funkcje różniczkowalne

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$, przedstawiona na wykresie.



Przeciągnij poprawną odpowiedź.



Zbiór punktów ciągłości funkcji to

Zbiór punktów nieróżniczkowalności funkcji to .

☐ $\mathbb{Z}$ ☐ $\mathbb{R}$

Ćwiczenie 4



Wskaż zdania prawdziwe.

☐

Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0 to również nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

☐

Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 to może, ale nie musi być różniczkowalna w tym punkcie.

☐

Jeżeli funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie x_0 to na pewno nie jest w tym punkcie ciągła.

☐

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to jest w tym punkcie ciągła.

Ćwiczenie 5



Połącz w pary funkcje z ich własnościami.

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(x) = e^{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

$$f(x) = |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x > 0 \\ -x^2 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest ciągła w $x = 0$?

b) Dla jakiej wartości parametru a funkcja f jest różniczkowalna w $x = 0$?

Ćwiczenie 7



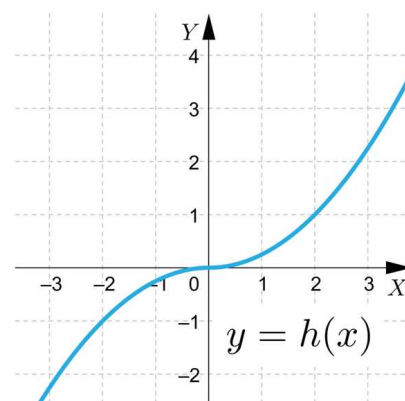
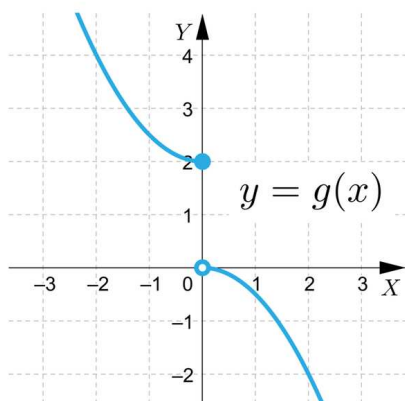
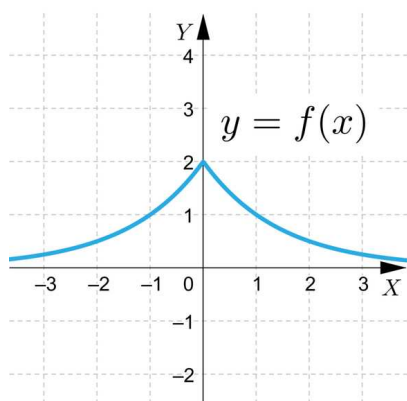
Dana jest funkcja $f(x) = |x - 2|$. Wskaż poprawne odpowiedzi.

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
2 ☐	-1 ☐	-1 ☐
0 ☐	1 ☐	1 ☐

Ćwiczenie 8



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie wyrażenia.



Funkcja $f(x)$ ciągła w punkcie $x = 0$.

Funkcja $f(x)$ różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Funkcja $g(x)$ ciągła w punkcie $x = 0$.

Funkcja $g(x)$ różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Funkcja $h(x)$ ciągła w punkcie $x = 0$.

Funkcja $h(x)$ różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Michał Bełdziński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związek pochodnej z ciągłością funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje zależność pomiędzy różniczkowalnością i ciągłością funkcji,
- analizuje ciągłość funkcji w punkcie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- giełda pomysłów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Związek pochodnej z ciągłością funkcji”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pochodna i monotoniczność funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Związek pochodnej z ciągłością funkcji”.