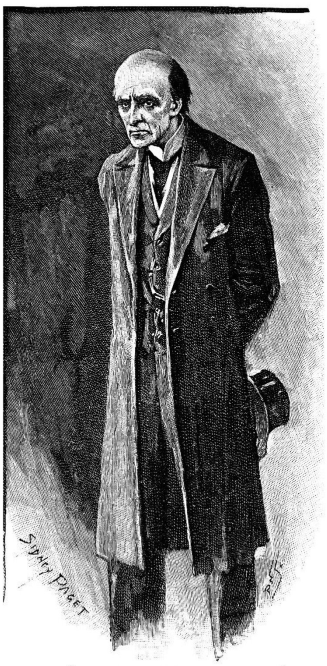
Wzór skróconego mnożenia na n-tą potęgę różnicy

Wzór skróconego mnożenia na n-tą potęgę różnicy

Źródło: Pexels, dostępny w internecie: www.unsplash.com.



Profesor Moriarty, ilustracja Sidney Paget, która towarzyszyła oryginalnej publikacji "*Ostatecznego problemu*"

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

W niektórych opowiadaniach o Sherlocku Holmesie napisanych przez Arthura Conana Doyle'a występuje fikcyjna postać – profesor James Moriarty. Doyle opisuje Moriarty'ego jako makiawelicznego przestępcę, wroga Sherolocka Holmesa, ale też genialnego matematyka. Przypisuje mu odkrycie wzoru na współczynniki rozwinięcia n–tej potęgi dwumianu.

W rzeczywistości metody otrzymywania tych współczynników znane były już w XIII wieku.

W tym materiale poznamy współczesne sposoby określania współczynników rozwinięcia n–tej potęgi różnicy.

Twoje cele

- Określisz współczynniki n–tej potęgi dwumianu różnicy, korzystając z trójkąta Pascala.
- Zapiszesz n–tą potęgę dwumianu różnicy w postaci sumy, korzystając z dwumianu Newtona.
- Wykorzystasz wzory na n–tą potęgę różnicy przekształcając wyrażenia algebraiczne.

Przeczytaj

Jeśli chcemy zapisać w postaci sumy potęgę $(a-b)^2$ lub potęgę $(a-b)^3$ możemy skorzystać z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia. W przypadku, gdy wykładnik potęgi jest większy, potęgę możemy zapisać w postaci iloczynu i wykonać odpowiednie mnożenie.

Na przykład:

$$(a-b)^4 = (a-b)^2 \cdot (a-b)^2$$

$$(a-b)^4 = \left(a^2 - 2ab + b^2\right)\left(a^2 - 2ab + b^2\right)$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 2a^3b + a^2b^2 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Analizując podany przykład można zauważyć, że zamiana potęgi różnicy na sumę za pomocą mnożenia, jest pracochłonna i łatwo przy tym popełnić błąd. Warto więc skorzystać z innych metod określania wyrazów szukanej sumy.

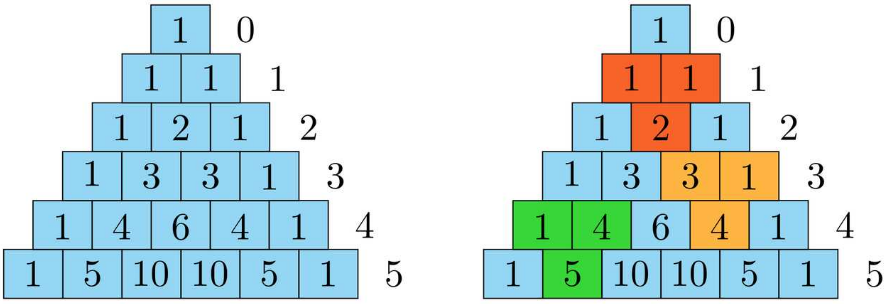
Zastosowanie trójkąta Pascala

Przyjrzyjmy się kolejnym zapisom w postaci sumy wyrażenia $(a-b)^n$, gdzie n – liczba naturalna.

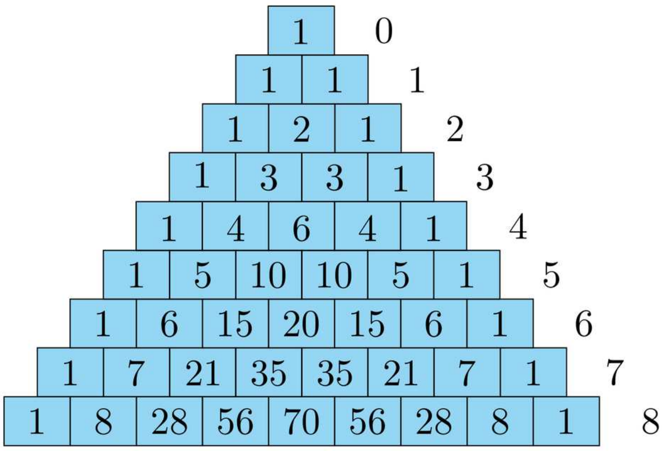
$$\begin{aligned}
(a-b)^0 &= 1 \\
(a-b)^1 &= a-b \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
(a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5
\end{aligned}$$

W otrzymanej sumie pierwszy wykładnik, do której podniesiona jest liczba a jest równy potędze rozważanego dwumianu. Każdy kolejny wykładnik jest mniejszy o 1 od poprzedniego, aż do ostatniego, który jest równy 0. Wykładniki liczby b zmieniają się w odwrotnej kolejności – wzrastają od 0 do wykładnika, do którego podniesiony jest rozważany dwumian. W każdym ze składników suma wykładników liczb a i b jest równa potędze, do której podniesiony jest dwumian $a - b$. Znak „minus” poprzedza co drugi składnik.

Aby znaleźć rozwinięcia kolejnych potęg dwumianu $(a - b)$, stworzymy najpierw tablicę współczynników liczbowych poprzednich rozwinięć.



Zauważmy, że skrajne liczby w uzyskanym „trójkącie” (zwanym trójkątem Pascala) to jedynki. Liczby w kolejnych wierszach powstają poprzez dodanie dwóch sąsiednich liczb z wiersza stojącego wyżej. Korzystające z tej obserwacji, dopisujemy kolejne wiersze.



Możemy teraz utworzyć następny wzór.

$(a - b)^6 = 1 \cdot a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + 1 \cdot b^6$

Zapiszemy nasze spostrzeżenia w postaci twierdzenia.

Twierdzenie: n–ta potęga różnicy

Dla każdej liczby naturalnej parzystej n i liczb a, b:

$$(a-b)^n = c_0a^n - c_1a^{n-1}b^1 + c_2a^{n-2}b^2 + \ldots - c_{n-1}a^1b^{n-1} + c_nb^n$$

gdzie:
liczby $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n$ są kolejnymi liczbami w n–tym wierszu trójkąta Pascala.

Dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n i liczb a, b:

$$(a-b)^n = c_0a^n - c_1a^{n-1}b^1 + c_2a^{n-2}b^2 + \ldots + c_{n-1}a^1b^{n-1} - c_nb^n$$

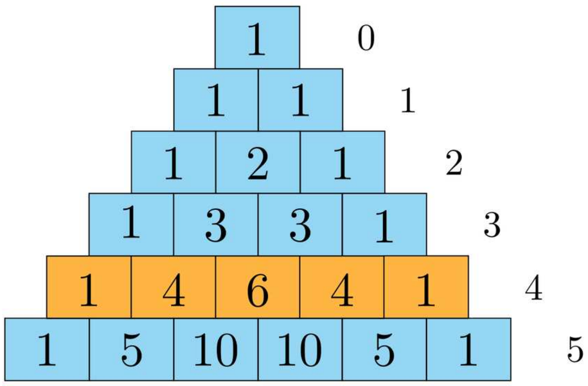
gdzie:
liczby $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n$ są kolejnymi liczbami w n–tym wierszu trójkąta Pascala.

Przykład 1

Zapiszemy w postaci sumy wyrażenie $(1-d)^4$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z powyższego twierdzenia, odczytując potrzebne współczynniki w 4 wierszu trójkąta Pascala.



$$(1-d)^4 = 1^4 - 4\cdot 1^3\cdot d + 6\cdot 1^2d^2 - 4\cdot 1\cdot d^3 + d^4$$

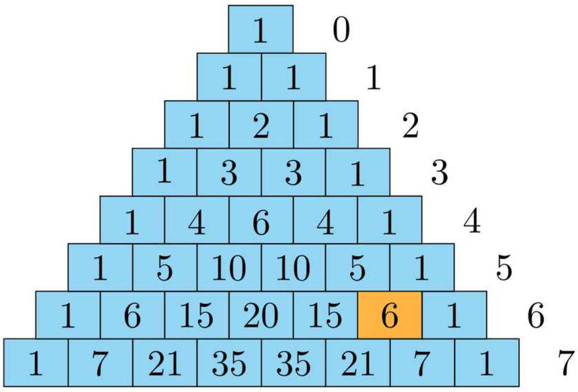
$$(1-d)^4 = 1 - 4d + 6d^2 - 4d^3 + d^4$$

Przykład 2

Znajdziemy szósty wyraz rozwinięcia potęgi $\left(3-\sqrt{3}\right)^6$.

Rozwiązanie:

Odpowiedni współczynnik liczbowy odczytujemy z trójkąta Pascala.



Jest to liczba 6.

W rozwinięciu dwumianu $\left(3-\sqrt{3}\right)^6$ wykładniki potęg liczby 3 zmniejszają się, a liczby $\sqrt{3}$ zwiększają się.

Zatem iloczyn potęg tych liczb będzie równy $3^1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^5 = 3 \cdot 9\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$.

Stąd wyraz szósty to:

$-6 \cdot 27\sqrt{3} = -162\sqrt{3}$

Zastosowanie dwumianu Newtona

Korzystając z trójkąta Pascala łatwo jest zapisać w postaci sumy jednomianów potęgę różnicy o niewielkim wykładniku. Natomiast w przypadku dużego wykładnika, trudno jest znaleźć potrzebne współczynniki. Prostszy sposób wyznaczania tych współczynników to wykorzystanie wzoru dwumianowego Newtona, zwanego krótko dwumianem Newtona.

Twierdzenie: Dwumian Newtona

Jeżeli x, y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, n jest liczbą naturalną parzystą, to

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots - \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

Jeżeli x, y są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, n jest liczbą naturalną nieparzystą, to

$$(x-y)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} - \binom{n}{n}y^n$$

Aby móc korzystać z dwumianu Newtona, przypominijmy, że $\binom{n}{k}$ (czytamy: n nad k lub n po k) to tzw. symbol Newtona.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ dla } 0 \le k \le n$$

Przypomnijmy jeszcze, że zapis $k!$ (czytamy: k silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych dodatnich, nie większych od k.

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$$

Przykład 3

Zapiszemy w postaci sumy jednomianów $(x-1)^7$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z dwumianu Newtona.

$$(x-1)^7 = \binom{7}{0}x^7 \cdot 1^0 - \binom{7}{1}x^6 \cdot 1^1 + \binom{7}{2}x^5 \cdot 1^2 - \binom{7}{3}x^4 \cdot 1^3 + \binom{7}{4}x^3 \cdot 1^4 - \binom{7}{5}x^2 \cdot 1^5 +$$

$$+\binom{7}{6}x^1 \cdot 1^6 - \binom{7}{7}x^0 \cdot 1^7$$

Obliczamy kolejne współczynniki.

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{0!(7-0)!} = \frac{7!}{1 \cdot 7!} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{7!}{1 \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7}{6!} = 7$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2 \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 5!} = 21$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{6 \cdot 4!} = \frac{4! 5 \cdot 6 \cdot 7}{6 \cdot 4!} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{24 \cdot 3!} = \frac{3! 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{24 \cdot 3!} = 35$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7!}{120 \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{120 \cdot 2!} = 21$$

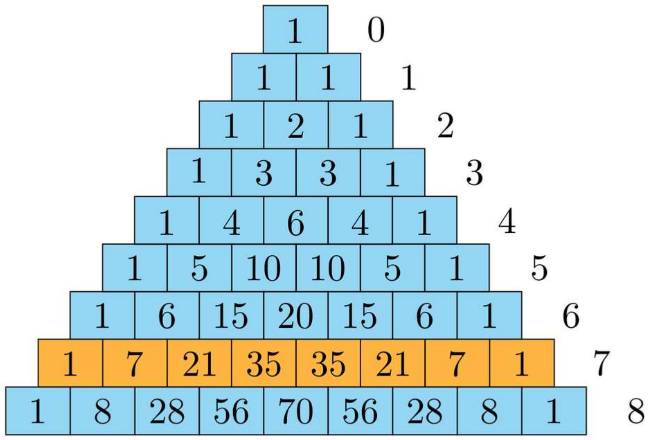
$$\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{6! \cdot 7}{6! \cdot 1!} = 7$$

$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!(7-7)!} = \frac{7!}{7! \cdot 0!} = 1$

Do uzyskanego wyrażenia podstawiamy wyznaczone liczby.

$(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x^1 - 1$

Na wszelki wypadek, możemy sprawdzić, czy dobrze wykonaliśmy obliczenia, korzystając z trójkąta Pascala.



Przykład 4

Znajdziemy piąty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\frac{1}{a} + a\right)^9$.

Rozwiązanie:

Piąty wyraz tego rozwinięcia to

$\binom{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^5 \cdot a^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} \cdot \frac{a^4}{a^5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot \frac{1}{a} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{24} \cdot a^{-1} = 126a^{-1}$

Odpowiedź:

Piąty wyraz to $126a^{-1}$.

Słownik

dwumian Newtona

twierdzenie określające sposób zamiany n–tej potęgi dwumianu na sumę jednomianów

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją. Rozwiąż najpierw zamieszczone tam zadania, a następnie porównaj z podanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwCmQoiY0

Film nawiązujący do treści lekcji przedstawiający przykłady zastosowania wzoru na en tą potęgę różnicy dwumianu.

Polecenie 2

Znajdź wartość wyrażenia $W = \left(\sqrt{5} - \frac{1}{5}\right)^5$. Wynik zapisz z dokładnością do $0,1$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Znajdź szósty wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$, korzystając z dwumianu Newtona.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór skróconego mnożenia na n–tą potęgę różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n.

Zakres rozszerzony.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;

3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa współczynniki n–tej potęgi dwumianu, korzystając z trójkąta Pascala

- zapisuje n−tą potęgę dwumianu w postaci sumy, korzystając z dwumianu Newtona
- interpretuje współczynniki uzyskane w wyniku rozwinięcia potęgi dwumianu
- analizuje złożone problemy arytmetyczne i algebraiczne, planuje sposób ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- arkusz analogii
- bank krytycznych ocen
- ale kino

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

Uczniowie przypominają poznane wzory skróconego mnożenia, w tym wzór na n−tą potęgę sumy.

Podają przykłady ich zastosowania. Rozmawiają o tym, czy do wzoru $(a+b)^n$ w miejsce b można podstawić liczbę ujemną i jak wtedy będzie wyglądał zapis. W ten sposób dochodzą do sformułowania tematu i celów zajęć.

Faza realizacyjna:

Praca w grupach – metodą „arkusz analogii" uczniowie wyprowadzają wzór na n−tą potęgę różnicy, wzorując się na wzorze na n−tą potęgę sumy.

Zapisują na kartkach przykłady obliczania potęg różnicy. Metodą „ale kino" uczniowie tworzą wspólny bank przykładów.

Teraz uczniowie pracują w parach – uzupełniają uzyskane już informacje na temat sposobów wyznaczania współczynników rozwinięcia potęgi różnicy, zapoznając się z materiałem w sekcji „Przeczytaj", następnie oglądają animację.

Uczniowie nadal pracują w parach. Na zmianę rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne. Jeden uczeń rozwiązuje, a drugi przygląda się jego pracy i zapisuje uwagi.

Po skończonym ćwiczeniu, uczniowie dzielą się na forum klasy swoimi spostrzeżeniami. Tworzą w ten sposób bank krytycznych ocen, którego celem jest pokazanie najczęściej popełnianych błędów, a zarazem okazją do wyjaśnienia, jak tych błędów unikać.

Faza podsumowująca:

Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, oceniając również pracę swojej i innych grup.

Nauczyciel zwraca uwagę na istotne momenty w zajęciach i stopień osiągniętych celów.

Praca domowa:

W domu uczniowie mają za zadanie poszukać problemów z innych dziedzin wiedzy (np. z fizyki, chemii), w których wykorzystywany jest wzór na n–tą potęgę różnicy.

Materiały pomocnicze:

- Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów
- Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy
- Wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy
- Wzory skróconego mnożenia na różnicę oraz na sumę sześcianów – zastosowania

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przy okazji tematów związanych z dwumianem Newtona lub trójkątem Pascala.