



Wykorzystanie proporcjonalności odwrotnej w zagadnieniach z kontekstem realistycznym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie proporcjonalności odwrotnej w zagadnieniach z kontekstem realistycznym

Źródło: Bilal O., dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Pewien kierowca – matematyk zawsze tankuje paliwo za tę samą kwotę. Oznacza to, że ilość zakupionego paliwa jest odwrotnie proporcjonalna do jego ceny. Czy można napisać wzór funkcji, który opisze tę zależność? Na to pytanie odpowiemy w tym materiale.

Twoje cele

- Rozpoznaś wielkości odwrotnie proporcjonalne w zagadnieniach z kontekstem realistycznym.
- Wykorzystasz proporcjonalność odwrotną w zagadnieniach z życia codziennego.
- Zbudujesz model matematyczny do zadania z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.
- Wyznaczysz dziedzinę w stworzonym modelu matematycznym.

Przeczytaj

Już wiesz

Proporcjonalnością odwrotną nazywamy zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x, y , określoną wzorem $x \cdot y = a$, gdzie a jest liczbą różną od zera. O zmiennych x, y mówimy, że są odwrotnie proporcjonalne. Współczynnik a nazywamy współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej.

Ważne!

Iloczyn odpowiadających sobie wartości dwóch wielkości odwrotnie proporcjonalnych jest stały.

Ważne!

W przypadku rozpatrywania wielkości odwrotnie proporcjonalnych w zagadnieniach z kontekstem realistycznym należy pamiętać o dziedzinie budowanego modelu matematycznego. Zmienne x oraz y muszą być dodatnie. Dodatni jest także współczynnik proporcjonalności odwrotnej a .

Przykład 1

Dysponujemy określoną kwotą pieniędzy, np. kwotą 20 zł. Zbadamy zależność między ceną za jedną sztukę danego towaru, a ilością sztuk, które możemy kupić.

Rozwiązanie:

Cena za sztukę [w zł]	Liczba sztuk
1	20
2	10
4	5
5	4
10	2
20	1

Iloczyn tych wielkości jest stały, jeśli np. zwiększymy cenę za sztukę dwukrotnie, liczba sztuk zmniejszy się dwukrotnie.

Przykład 2

Obliczymy jak daleko od punktu podparcia powinien usiąść tato, który waży 80 kg, aby móc huśtać się z synem, który siedzi 4 m od punktu podparcia i waży 25 kg.

Rozwiązanie:

Zgodnie z [zasadą dźwigni Archimedesesa](#) ciężar i odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, czyli

$$Q_1 \cdot r_1 = Q_2 \cdot r_2$$

zatem

$$80 \cdot r_1 = 4 \cdot 25$$

$$r_1 = 1,25$$

Odpowiedź:

Tato powinien usiąść w odległości 1,25 m od punktu podparcia.

Przykład 3

Wyznamy stosunek ciężarów osób huśtających się na huśtawce, wiedząc, że jedna z nich siedzi w odległości 4,5 m od punktu podparcia, druga 1,8 m od punktu podparcia.

Rozwiązanie:

Zgodnie z [zasadą dźwigni Archimedesesa](#) ciężar i odległość od punktu podparcia są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, czyli

$$Q_1 \cdot r_1 = Q_2 \cdot r_2$$

zatem

$$Q_1 \cdot 4,5 = Q_2 \cdot 1,8$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 2,5$$

Odpowiedź:

Osoba, która siedzi bliżej punktu podparcia powinna być 2,5 razy cięższa.

Przykład 4

Grupa 18 robotników potrzebuje 20 dni na wykonanie pewnego zlecenia. O ile dni wydłuży się czas pracy, jeśli trzech z nich zrezygnuje z pracy, a pozostali będą pracować z taką samą wydajnością?

Rozwiązanie:

Liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni. Iloczyn tych wielkości jest stały,

czyli

$$18 \cdot 20 = 15 \cdot x$$

$$x = 24$$

Odpowiedź:

Czas pracy wydłuży się o 4 dni.

Przykład 5

Janek obliczył, że idąc z prędkością $5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ pokona drogę do domu w ciągu godziny i 12 minut. W jakim czasie pokona tę samą drogę, jadąc na rowerze z prędkością $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Rozwiązanie:

Prędkość i czas to wielkości odwrotnie proporcjonalne. Ich iloczyn jest stały.

Po ujednoczeniu jednostek możemy zapisać:

$$5 \cdot 1 \frac{1}{5} = 24 \cdot t$$

$$t = \frac{1}{4}$$

Odpowiedź:

Jadąc na rowerze Janek pokona drogę w 15 minut.

Słownik

zasada dźwigni Archimedesesa

jeżeli na dźwigni umieścimy w odległości odpowiednio r_1 i r_2 od punktu podparcia dwa przedmioty o ciężarach Q_1 i Q_2 to pozostaną one w równowadze, jeśli zachodzi równość:

$$Q_1 \cdot r_1 = Q_2 \cdot r_2$$

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem edukacyjnym oraz wykonaj polecenia poniżej.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVE18e9qB>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wykorzystania proporcjonalności odwrotnej w zagadnieniach z kontekstem realistycznym.

Polecenie 2

Na podstawie filmu wypełnij tabelę. Wielkości odwrotnie proporcjonalne nie muszą być dodatnie w przypadku, gdy określają procentowy wzrost i spadek dla ceny paliwa od ceny pierwotnej oraz ilości zakupionego paliwa.

$x = -25$, wzrost ceny paliwa o 50% powoduje spadek ilości zakupionego paliwa o $33\frac{1}{3}\%$,
wzrost ceny paliwa o 20% powoduje spadek ilości zakupionego paliwa o 25%, spadek ceny paliwa o 50% powoduje wzrost ilości zakupionego paliwa o $33\frac{1}{3}\%$

Argument funkcji	Wartość funkcji	Interpretacja
$x = -25$		
		wzrost ceny paliwa o 50% powoduje spadek ilości zakupionego paliwa o $33\frac{1}{3}\%$

Polecenie 3

Oblicz, o ile procent należy obniżyć cenę paliwa, aby kierowca matematyk z filmu kupował o 100% więcej paliwa.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Sznurek został pocięty na 15 kawałków o długości 12 cm każdy. Jeśli długość jednego kawałka będzie równa 18 cm, to liczba kawałków będzie równa:

☐ 12.

☐ 15.

☐ 10.

Ćwiczenie 2



36 l soku chcemy rozlać do jednakowych buteleczek. Dopasuj liczbę buteleczek do ich pojemności.

72

1,8 l

300

0,12 l

20

0,25 l

144

0,5 l

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdanie, wpisując odpowiednie wartości.

Ekipa budowlana składająca się z 12 osób ma wybudować budynek w ciągu 250 dni. Jeśli liczba pracowników zmaleje do 10, to na wykonanie planu będzie potrzebnych

dni, a jeśli liczba pracowników wzrośnie do

, to budynek

zostanie wybudowany w ciągu 200 dni.

Ćwiczenie 4



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Jan zaplanował, że za pewną kwotę kupi długopisy. Wchodząc do sklepu zobaczył napis "Każdy produkt 20% taniej". W związku z tym za tę samą kwotę może zakupić:

☐ zbyt mało danych, by rozwiązać zadanie

☐ 25% więcej długopisów

☐ 20% więcej długopisów

Ćwiczenie 5



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Grupa 25 osób składa się na prezent urodzinowy dla kolegi. Obliczyli, że każdy wpłaci po 30 zł. W ostatniej chwili jedna z osób zrezygnowała z wpłaty. O ile wzrośnie składka dla pozostałych osób.

☐ 0,75 zł

☐ 1,25 zł

☐ 1,5 zł

Ćwiczenie 6



Uzupełnij tabelę zależności pomiędzy prędkością i czasem potrzebnym na pokonanie określonej drogi.

24 minuty, 30 kmh, 8 godzin, 1, 12 godziny, 0, 24 godziny, 15 kmh

Czas	Prędkość
24 minuty	30 kmh

Ćwiczenie 7



Wyznacz stosunek odległości od punktu podparcia osób hustających się do miejsca na którym siedzą na huśtawce, wiedząc, że jedna z nich waży 70 kg, a druga waży 20 kg.

Ćwiczenie 8



Pięcioosobowa rodzina idzie na spacer. Uzupełnij tabelę, w której widnieją zależności pomiędzy długością kroku danej osoby, a liczbą wykonanych kroków, przy stałej drodze.

Długość kroku		Liczba kroków	
80 cm			
cm		2000	
1 m			
m		800	
40 cm		2500	

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie proporcjonalności odwrotnej w zagadnieniach z kontekstem realistycznym

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wielkości odwrotnie proporcjonalne w zagadnieniach z kontekstem realistycznym;
- wykorzystuje własności proporcjonalności odwrotnej w zagadnieniach z życia codziennego;
- buduje model matematyczny do zadania z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
- wyznacza dziedzinę w stworzonym modelu matematycznym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego;
- praca indywidualna.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu;
- projektor multimedialny;
- tablica interaktywna/tablica, pisaki/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z sekcją „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Uczniowie przypominają najważniejsze informacje dotyczące proporcjonalności odwrotnej, podają przykłady.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”.
2. Następnie nauczyciel omawia Przykład 1 i 2. Kolejne przykłady uczniowie analizują samodzielnie. W razie potrzeby nauczyciel wyjaśnia niejasności.
3. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 1-4 z sekcji „sprawdź się”, nauczyciel pyta poszczególnych uczniów o poprawne odpowiedzi. Pozostali uczniowie omawiają i argumentują ich poprawność. W razie wątpliwości, uczniowie przedstawiają na tablicy poprawne rozwiązanie.
4. Następnie uczniowie, w parach, oglądają film edukacyjny oraz rozwiązują polecenia 2-3. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.
5. Uczniowie pozostają w parach i rozwiązują zadania 5-8. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów i w razie potrzeby podaje podpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

Proporcjonalność odwrotna

Wykres funkcji $y = \frac{a}{x}$

Wskazówki metodyczne:

- Film edukacyjny można wykorzystać jako utrwalenie pojęcia wielkości odwrotnie proporcjonalnych.
- Film edukacyjny można również wykorzystać w realizacji lekcji o procentach lub zadań dotyczących prędkości drogi i czasu.