



Najmniejsza/największa wartość funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Potrąfimy wyznaczyć wartości funkcji w punkcie oraz określić zbiór wartości funkcji. Bardzo ważną umiejętnością jest określanie wartości najmniejszej oraz wartości największej przyjmowanych przez funkcję.

Czy każda funkcja przyjmuje zawsze wartość największą?

Czy każda funkcja zawsze przyjmuje wartość najmniejszą?

Odpowiedzi na te pytania uzyskamy analizując poniższy materiał.

Twoje cele

- Wyznaczysz najmniejszą wartość funkcji, o ile taka istnieje.
- Wyznaczysz największą wartość funkcji, o ile taka istnieje.
- Sprawdzisz, czy funkcja posiada wartość najmniejszą.
- Sprawdzisz, czy funkcja posiada wartość największą.
- Udowodnisz, że dana liczba jest najmniejszą wartością funkcji.

- Udowodnisz, że dana liczba jest największą wartością funkcji.

Przeczytaj

Definicja: Najmniejsza wartość funkcji liczbowej

Najmniejszą wartością funkcji liczbowej nazywamy najmniejszą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Definicja: Największa wartość funkcji liczbowej

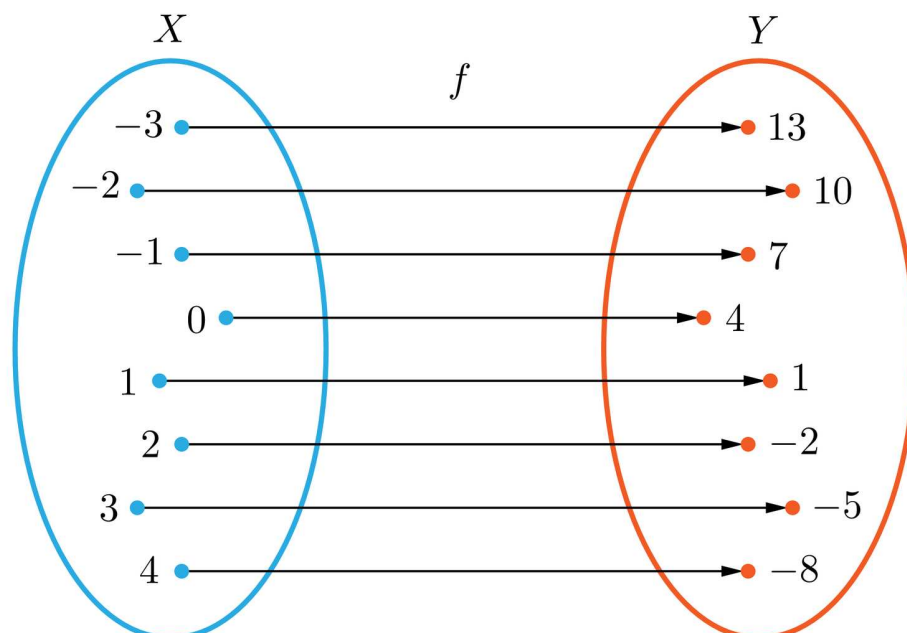
Największą wartością funkcji liczbowej nazywamy największą z liczb należących do zbioru wartości funkcji, o ile w zbiorze wartości taka liczba istnieje.

Funkcja może być opisana różnymi sposobami. Pokażemy, w jaki sposób możemy wyznaczyć najmniejszą/największą wartość funkcji w zależności od sposobu opisu funkcji.

Pomogą nam w tym poniższe przykłady.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą grafu.



Wskażemy największą oraz najmniejszą wartość funkcji f .

Rozwiązanie

Na podstawie grafu określimy zbiór wartości funkcji f .

$$ZW_f = \{-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13\}$$

Analizując zbiór wartości funkcji f , zauważamy, że funkcja osiąga wartość najmniejszą, równą -8 , dla argumentu $x = 4$ oraz wartość największą, równą 13 , dla argumentu $x = -3$.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	$-4, 6$	$-3, 7$	$-2, 8$	0	$1, 9$	$4, 2$	$5, 4$
$f(x)$	-1	-1	-1	0	1	1	1

Wyznamy największą oraz najmniejszą wartość funkcji f .

Rozwiązanie

Na podstawie tabelki wyznaczmy zbiór wartości funkcji f .

$$ZW_f = \{-1, 0, 1\}$$

Zbiór wartości funkcji jest zbiorem zawierającym trzy elementy.

Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą, równą -1 , dla trzech argumentów: $-4, 6$; $-3, 7$; $-2, 8$.

Funkcja przyjmuje wartość największą, równą 1 , dla trzech argumentów: $1, 9$; $4, 2$; $5, 4$.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$$\left\{ \left(-3\frac{5}{8}, -5\right), \left(-2\frac{1}{4}, -3\right), \left(-\frac{5}{7}, -2\right), (0, 2), (4, 3), \left(5\frac{1}{6}, 6\right) \right\}$$

Wyznamy najmniejszą oraz największą wartość funkcji f .

Rozwiązanie

Zapisujemy zbiór wartości funkcji f .

$$ZW_f = \{-5, -3, -2, 2, 3, 6\}$$

Analizując zbiór wartości funkcji f zauważamy, że funkcja osiąga wartość najmniejszą, równą -5 , dla argumentu $x = -3\frac{5}{8}$, a wartość największą, równą 6 , dla argumentu $x = 5\frac{1}{6}$.

Powyższe przykłady pokazały nam, że funkcja może osiągać wartość najmniejszą oraz wartość największą.

Czy każda funkcja zawsze osiąga wartość najmniejszą oraz wartość największą?

W każdym z powyższych przykładów dziedziną funkcji był zbiór skończony składający się z niewielu elementów.

Zbiór wartości funkcji również był zbiorem skończonym.

W celu wyznaczenia najmniejszej lub największej wartości funkcji należało zapisać elementy tworzące [zbiór wartości funkcji](#) w porządku rosnącym.

Najmniejsza liczba należąca do zbioru wartości była najmniejszą wartością funkcji, a liczba największa była największą wartością funkcji. Kolejne przykłady pokażą nam w jaki sposób wyznaczyć wartość najmniejszą/największą funkcji, gdy jest ona opisana za pomocą wzoru, wykresu lub opisu słownego.

Przykład 4

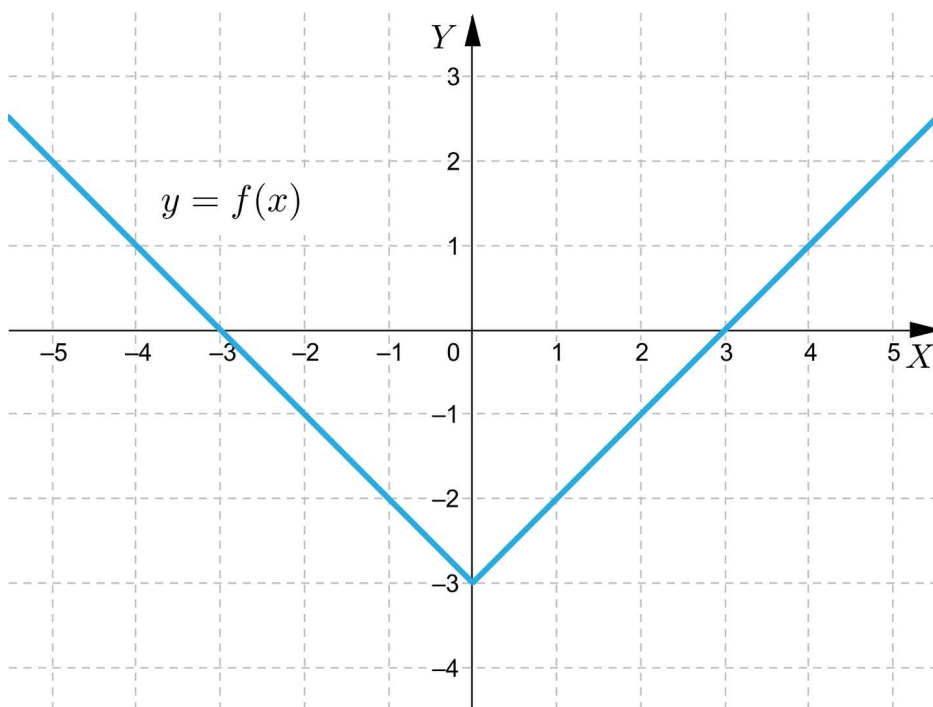
Funkcja f przedstawiona jest za pomocą opisu słownego.

Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje różnicę wartości bezwzględnej liczby x i liczby 3. Sprawdźmy, czy funkcja f posiada wartość najmniejszą oraz wartość największą.

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji f , zapiszemy wzór tej funkcji oraz naszkicujemy jej wykres.

Wzór funkcji: $f(x) = |x| - 3$, gdy $x \in \mathbb{R}$.



Z wykresu odczytujemy zbiór wartości funkcji f .

$$ZW_f = \langle -3, \infty \rangle.$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział lewostronnie domknięty.

Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -3 , dla argumentu $x = 0$.

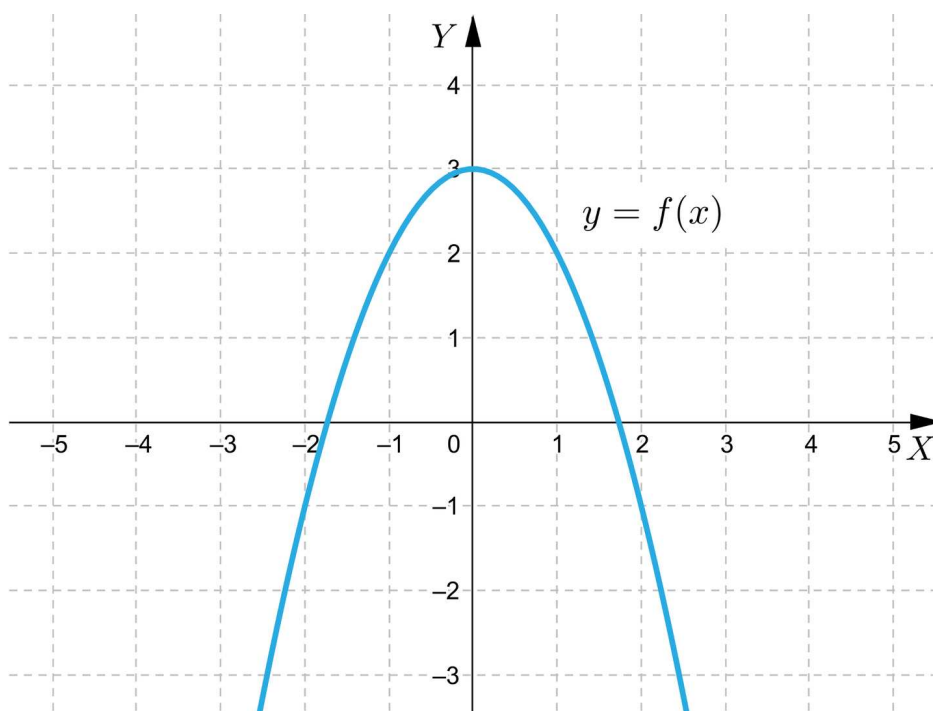
Funkcja f nie przyjmuje wartości największej.

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = -x^2 + 3$, gdy $x \in \mathbb{R}$. Sprawdźmy, czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą oraz czy przyjmuje wartość największą.

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji naszkicujemy jej wykres.



Z wykresu odczytujemy zbiór wartości funkcji f .

$$ZW_f = (-\infty, 3).$$

Zbiorem wartości funkcji jest przedział prawostronnie domknięty.

Funkcja f przyjmuje wartość największą równą 3, dla argumentu $x = 0$.

Funkcja f nie przyjmuje wartości najmniejszej.

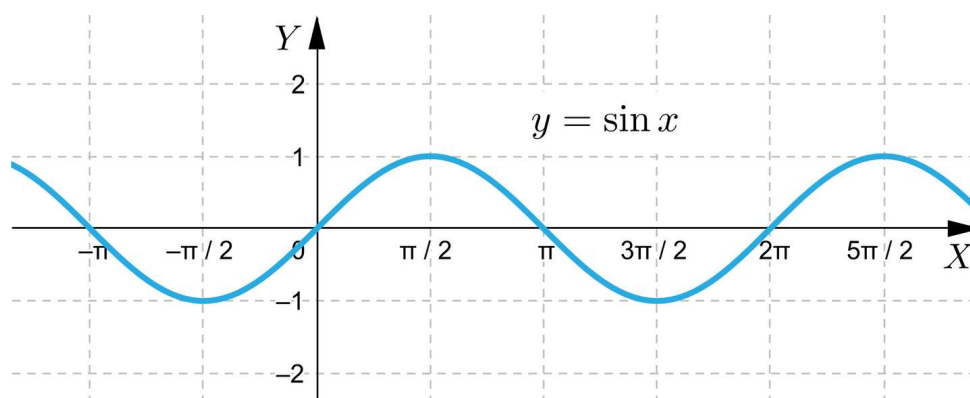
Przykład 6

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = \sin x$, gdy $x \in \mathbb{R}$. Sprawdźmy, czy funkcja przyjmuje wartość najmniejszą oraz czy przyjmuje wartość największą.

Rozwiązanie

W celu wyznaczenia zbioru wartości funkcji f naszkicujemy jej wykres. Jest to przykład funkcji, której dziedziną jest zbiór nieskończony i zbiorem wartości jest przedział obustronnie domknięty.

$$ZW_f = \langle -1, 1 \rangle.$$



Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą, równą -1 , dla argumentów $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdy $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcja f przyjmuje wartość największą, równą 1 , dla argumentów $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdy $k \in \mathbb{Z}$.

Ważne!

Podsumujmy poznane informacje.

- Jeżeli dziedziną funkcji jest zbiór skończony składający się z niewielkiej liczby elementów, to do wyznaczenia wartości największej oraz wartości najmniejszej funkcji należy uporządkować liczby należące do zbioru

wartości od najmniejszej do największej liczby i wskazać najmniejszą i największą wartość funkcji.

- Jeżeli dziedziną funkcji jest zbiór nieskończony, to funkcja może nie przyjmować wartości największej/najmniejszej.

Słownik

zbiór wartości funkcji

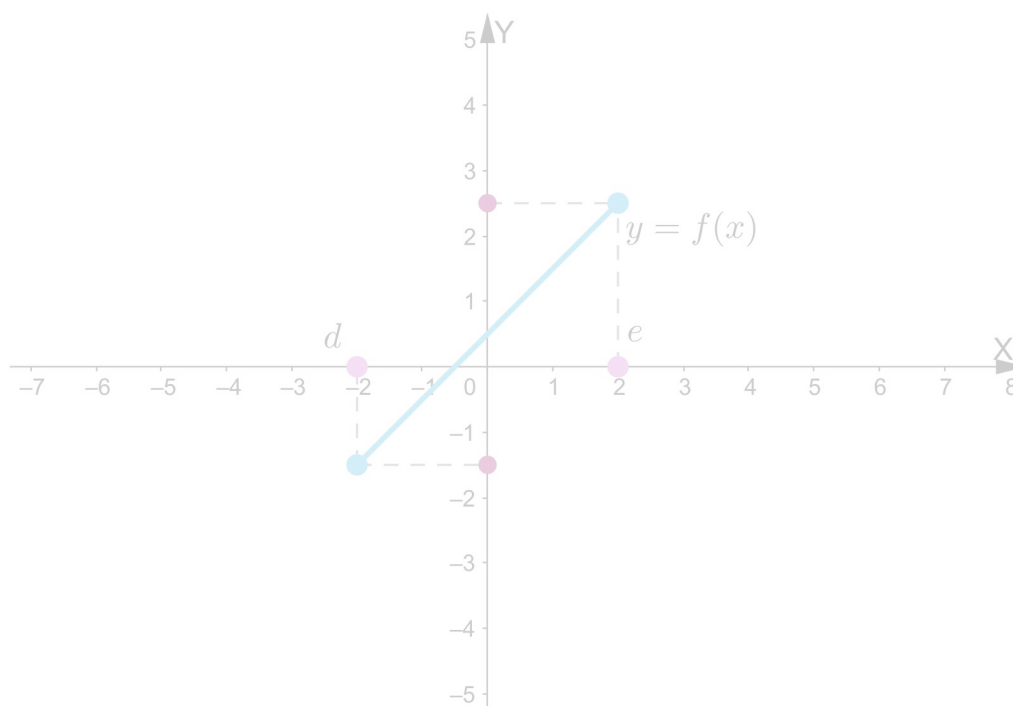
zbiór liczb, które otrzymujemy w wyniku obliczenia wartości funkcji dla wszystkich jej argumentów

Aplet

Polecenie 1

Aplet przedstawia wykresy dwóch funkcji. Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w aplecie. Zmieniając położenia suwaków oraz zmieniając dziedzinę funkcji zauważ, jak zmieniają się wartości najmniejsze oraz największe funkcji.

Odpowiedz na pytanie: czy zawsze funkcja przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DpxuK7py4>

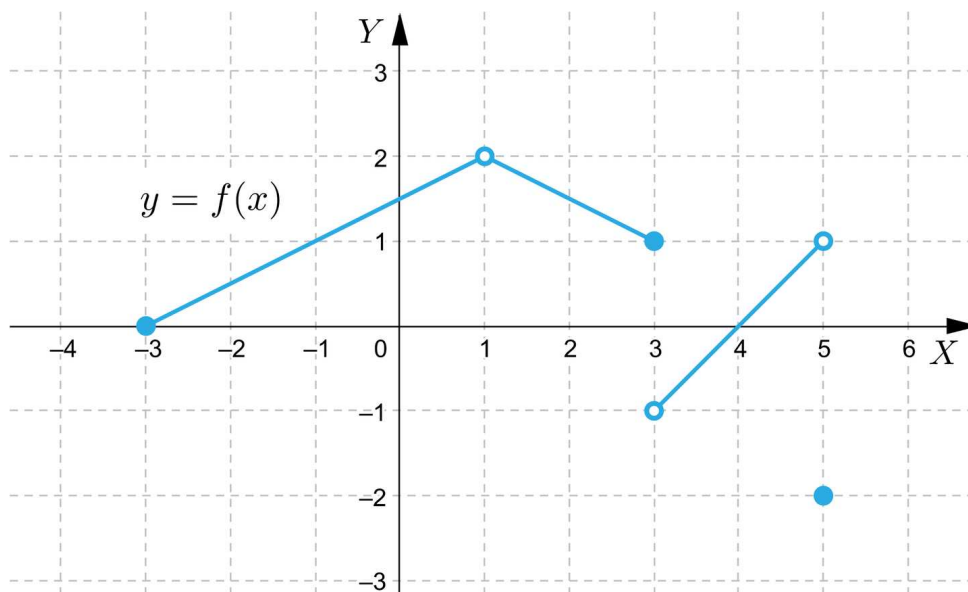
Po analizie przykładów przedstawionych w aplecie wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

Wyznacz (o ile istnieje) największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \frac{10}{x}$, gdy $x \in \langle 2, \infty \rangle$.




Polecenie 3

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Odczytaj z wykresu najmniejszą oraz największą wartość funkcji.

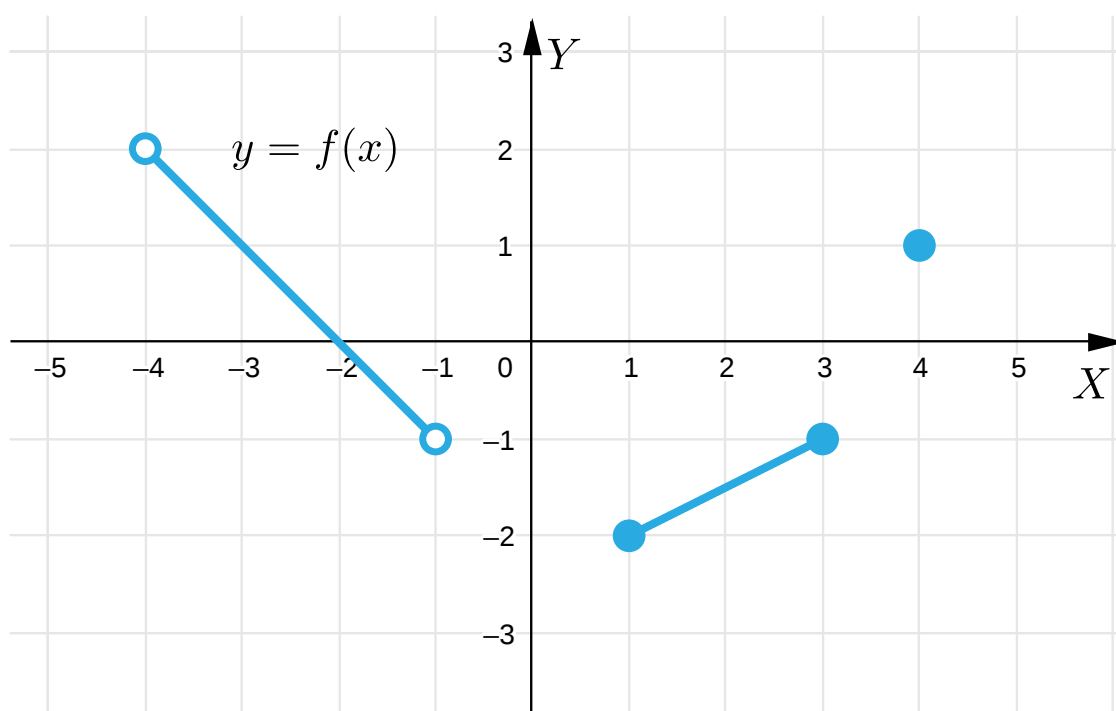
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



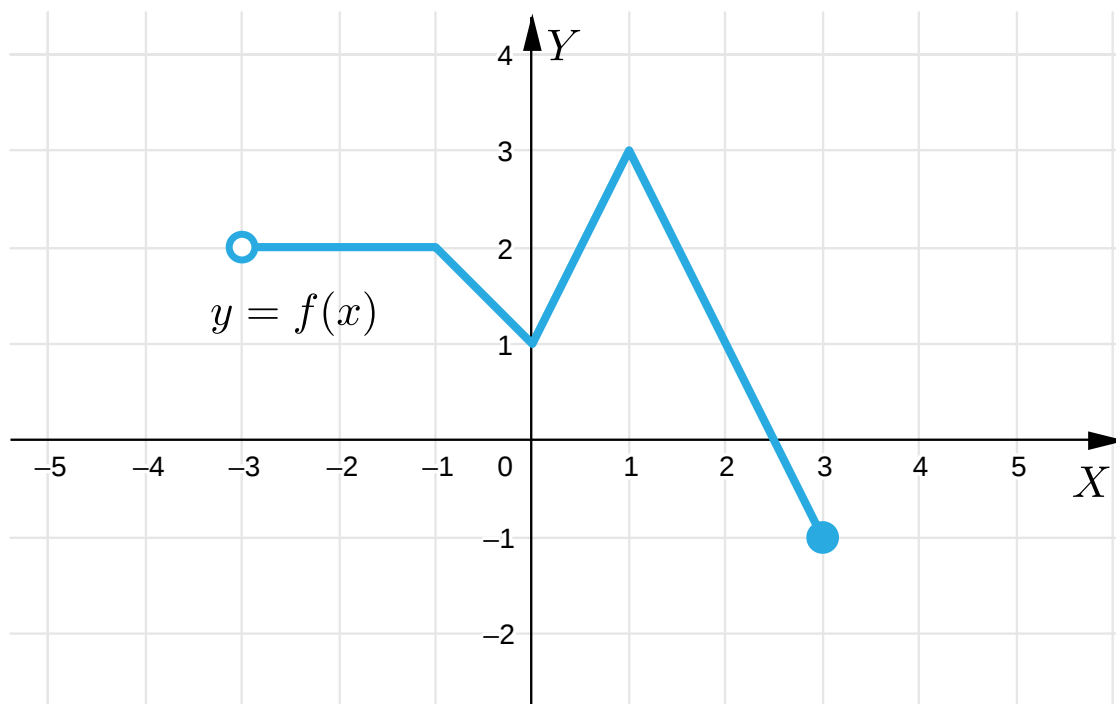
Rysunek przedstawia wykres funkcji f .



Ćwiczenie 2



Rysunek przedstawia wykres funkcji f .



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Najmniejsza/największa wartość funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł informacji.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza najmniejszą/największą wartość funkcji (o ile taka istnieje)
- sprawdza, czy podana funkcja przyjmuje wartość najmniejszą/największą
- udowadnia, że podana liczba jest najmniejszą/największą wartością funkcji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda diamentowego uszeregowania
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, pracując w grupach, metodą diamentowego uszeregowania porządkują poznane dotychczas sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy, tworzą algorytmy wyznaczania największej/najmniejszej wartości funkcji i przedstawiają je na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają aplet przedstawiający sposób wyznaczania najmniejszej/największej wartości funkcji opisanej za pomocą wzoru i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.

2. Zadanie dla chętnych:

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = \frac{3}{x+3}$, gdy $x > -3$. Wyznacz jej wartość największą/najmniejszą (o ile takie istnieją).

Materiały pomocnicze:

[Funkcja i jej własności. Część I](#)

[Wartość funkcji dla danego argumentu](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać aplet do pracy w parach lub w grupach. Uczniowie przygotowują swoje propozycje, a następnie prezentują je na forum klasy.