



Własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $0 < a < 1$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $0 < a < 1$

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

W dniu 4 kwietnia, w rocznicę śmierci szkockiego matematyka Johna Napiera (1550 – 1617), obchodzony jest Międzynarodowy Dzień Napierowski. Szczególnie uroczyście był obchodzony w 2014 roku, w 400-lecie wynalezienia przez Napiera logarytmów.

W tym materiale omówimy własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$, gdy $a \in (0, 1)$.

Twoje cele

- Na podstawie wykresu funkcji logarytmicznej określisz jej własności.
- Rozwiążesz nierówność logarytmiczną z wykorzystaniem wykresu.
- Zastosujesz definicję i własności funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a , żeby otrzymać liczbę b .

Przy powyższych założeniach mamy zatem: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

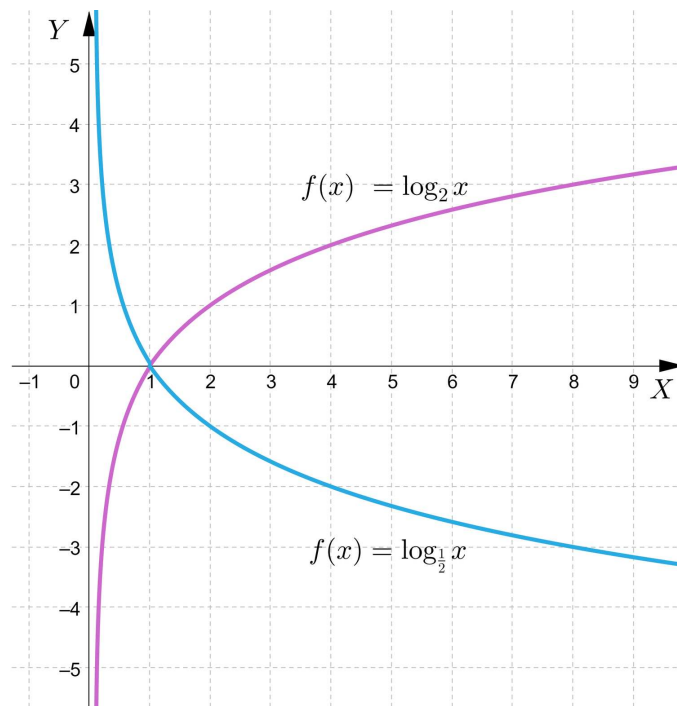
Funkcję $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ i $x \in \mathbb{R}_+$, nazywamy funkcją logarytmiczną o podstawie a .

Wykres funkcji $f(x) = \log_a x$ nazywamy krzywą logarytmiczną.

Sporządźmy wykresy funkcji $y = \log_2 x$ i $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Argumenty i wartości funkcji						
x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	-1	-2

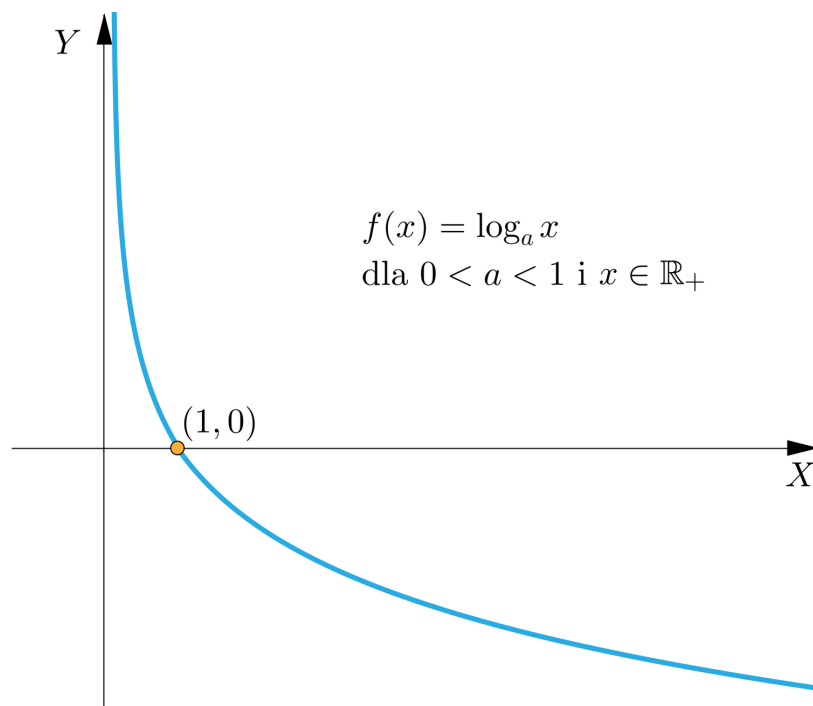
Z zestawienia w tabeli wynika, że wartości funkcji dla tych samych argumentów są liczbami przeciwnymi.



Widzimy, że krzywe logarytmiczne o równaniach $y = \log_2 x$ i $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ są symetryczne względem osi X . Możemy zapisać następujący związek:

$$\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x.$$

Przeanalizujmy teraz wykres funkcji $f(x) = \log_a x$, dla $0 < a < 1$ i $x \in \mathbb{R}_+$.



Korzystając z wykresu funkcji krzywej logarytmicznej będącej wykresem funkcji $f(x) = \log_a x$ dla $a \in (0, 1)$ i $x \in \mathbb{R}_+$ odczytujemy:

1. **Dziedziną funkcji** jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich \mathbb{R}_+ .
2. **Zbiorem wartości funkcji** jest zbiór liczb rzeczywistych $ZW_f = \mathbb{R}$.
3. Funkcja jest malejąca w zbiorze \mathbb{R}_+ .
4. Funkcja ma jedno miejsce zerowe $x = 1$.
5. Funkcja przyjmuje wartości dodatnie ($f(x) > 0$) dla $x \in (0, 1)$.
6. Funkcja przyjmuje wartości ujemne ($f(x) < 0$) dla $x \in (1, +\infty)$.

Dla każdego $a \in (0, 1)$ funkcja logarytmiczna jest malejąca w zbiorze \mathbb{R}_+ .

Wynika z tego, że gdy $a \in (0, 1)$ to $\log_a x_1 < \log_a x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 > x_2$.

Przykład 1

Porównamy następujące pary liczb:

a) $\log_{0,4} 9,467$ i $\log_{0,4} 19,282$,

b) $\log_{0,5} 8$ i $\log_{0,5} 4$.

Rozwiązanie:

a) $\log_{0,4} 9,467 > \log_{0,4} 19,282$, ponieważ $y = \log_{0,4} x$ jest funkcją malejącą i $9,467 < 19,282$,

b) $\log_{0,5} 8 < \log_{0,5} 4$, ponieważ $y = \log_{0,5} x$ jest funkcją malejącą i $8 > 4$.

Przykład 2

Znajdziemy liczby ujemne w zbiorze: $\{\log_{0,2} 2; \log_{0,10} 0,2; \log_{0,4} 12; \log_{0,3} 0,6\}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $a \in (0, 1)$, funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x > 1$.

Liczbami ujemnymi są zatem: $\log_{0,2} 2$ i $\log_{0,4} 12$.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność: $\log_{0,3} x < \log_{0,3} 5$.

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja $\log_{0,3} x$ jest funkcją malejącą, to nierówność $\log_{0,3} x < \log_{0,3} 5$ jest równoważna nierówności $x > 5$.

Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\log_{0,3} x < \log_{0,3} 5$,

jest przedział $(5, \infty)$.

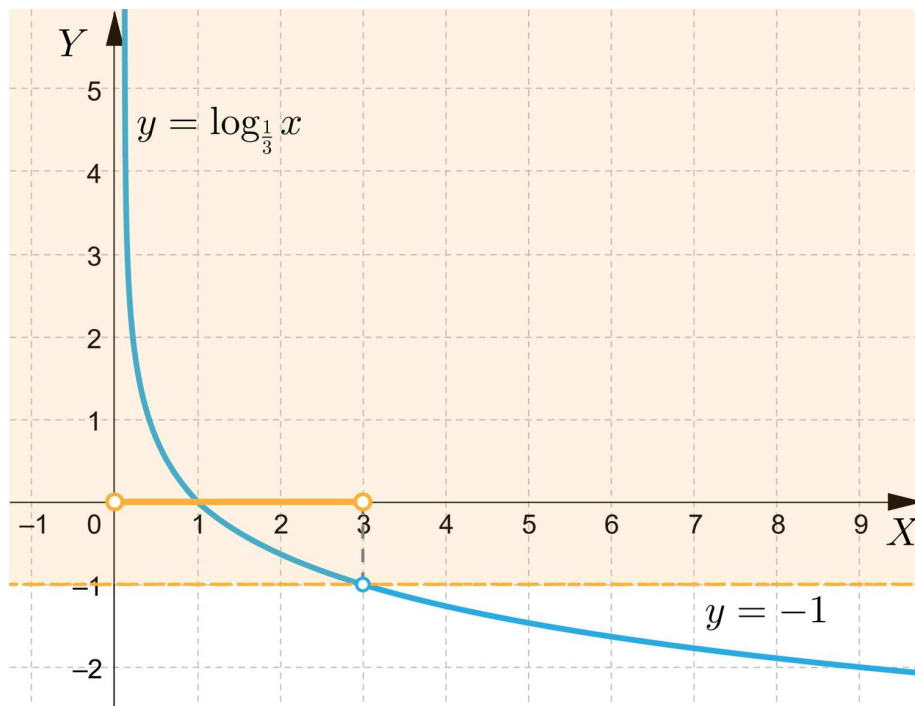
Przykład 4

Rozwiążemy graficznie nierówność: $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$.

Rozwiązanie:

W układzie współrzędnych rysujemy wykres funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ oraz prostą o równaniu $y = -1$.

Wszystkie punkty krzywej logarytmicznej o równaniu $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, które leżą nad prostą $y = -1$ mają tę własność, że ich pierwsza współrzędna spełnia nierówność: $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$.



Odczytujemy z wykresu rozwiązanie nierówności $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$.

Rozwiązaniem nierówności $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ jest przedział $(0, 3)$.

Rozwiążmy teraz tę nierówność rachunkowo:

$\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ gdzie $x \in (0, +\infty)$.

Zapisujemy (-1) jako $\log_{\frac{1}{3}} 3$, gdyż $(\frac{1}{3})^{-1} = 3$.

Otrzymujemy w ten sposób nierówność: $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 3$.

Ponieważ funkcja logarytmiczna jest malejąca w zbiorze \mathbb{R}_+ , gdyż $a \in (0, 1)$, stąd też przechodzimy do równoważnej nierówności:

$$x < 3,$$

której rozwiązaniem jest przedział $(-\infty, 3)$.

Ponieważ dziedziną funkcji $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ jest $x \in (0, +\infty)$, to rozwiązaniem nierówności jest:

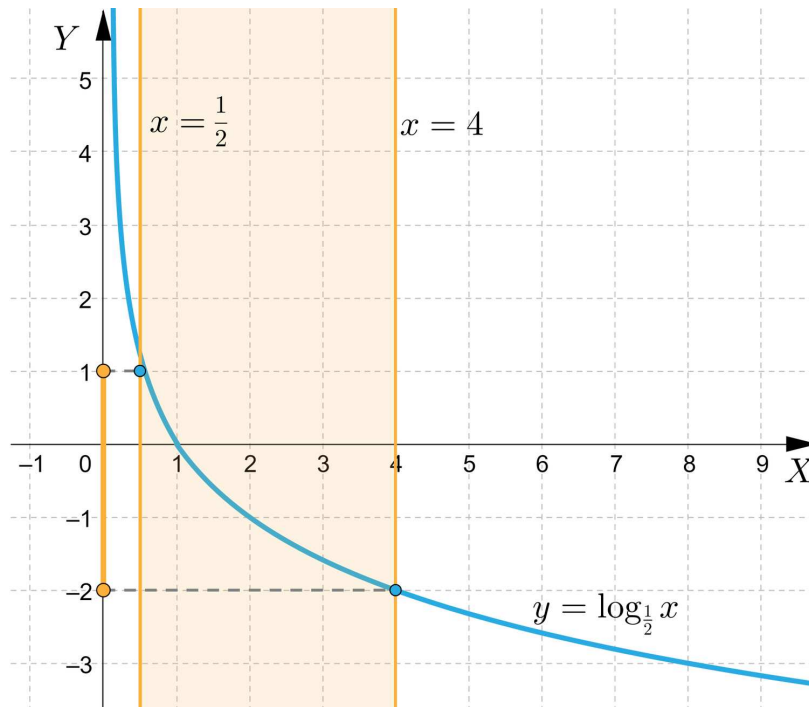
$$x \in (0, 3).$$

Nierówność $\log_{\frac{1}{3}} x > -1$ zachodzi dla $x \in (0, 3)$.

Przykład 5

Jakie wartości funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ przyjmuje dla $x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$?

Rozwiązanie:



Odczytujemy: $f(\frac{1}{2}) = 1$ i $f(4) = -2$. Dla $x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$ funkcja przyjmuje wartości $f(x) \in \langle -2, 1 \rangle$.

Potwierdzimy ten wynik drogą rachunkową:

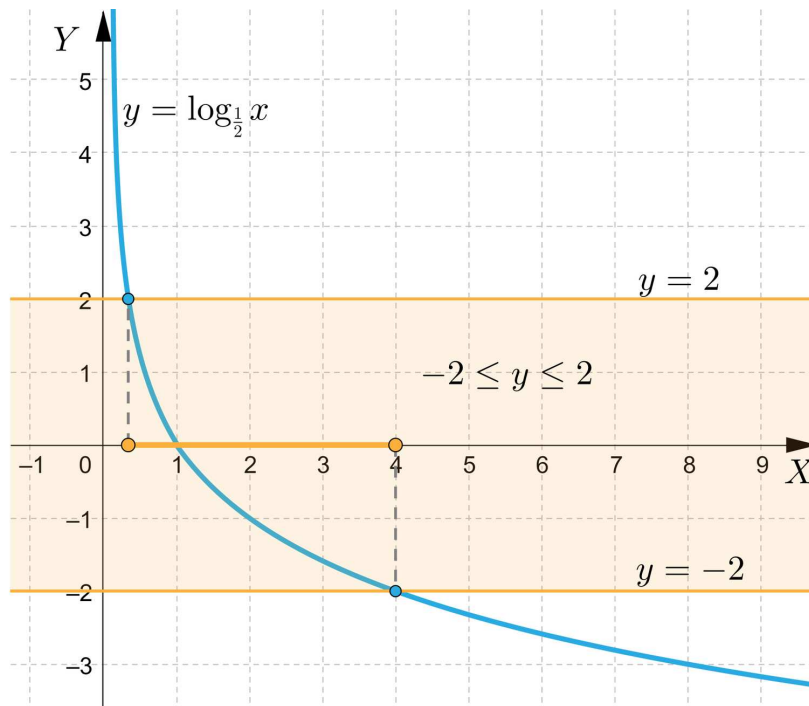
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \text{ i } f(4) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2.$$

Ponieważ funkcja przyjmuje wszystkie wartości w zbiorze \mathbb{R} i jest monotoniczna w swojej dziedzinie, to $ZW_f = \langle -2, 1 \rangle$.

Przykład 6

Dla jakich wartości x , wartości funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ należą do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$?

Rozwiązanie:



Odczytujemy z wykresu, że dla $x \in \langle \frac{1}{4}, 4 \rangle$ funkcja przyjmuje wartości z przedziału $\langle -2, 2 \rangle$.

Potwierdzimy ten wynik drogą rachunkową.

Jeżeli wartości funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ należą do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$, to oznacza to, że wartości funkcji spełniają nierówność:

$$-2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 2 \text{ i } x \in \mathbb{R}_+.$$

$$\text{Zapisujemy } -2 = \log_{\frac{1}{2}} 4 \text{ i } 2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}.$$

Stąd nierówność przyjmuje postać:

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4},$$

która jest równoważna układowi nierówności:

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \text{ i } \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4.$$

Dla $0 < a < 1$ funkcja jest malejąca w zbiorze \mathbb{R}_+ .

Otrzymujemy zatem:

$$x \geq \frac{1}{4} \text{ i } x \leq 4, \text{ a stąd } x \in \langle \frac{1}{4}, 4 \rangle.$$

Wartości funkcji $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ należą do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$ dla $x \in \langle \frac{1}{4}, 4 \rangle$.

Słownik

logarytm liczby dodatniej b przy podstawie a

wykładnik potęgi, do której należy podnieść liczbę a , żeby otrzymać liczbę b ; $\log_a b = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a^c = b$

dziedzina funkcji

zbiór wszystkich wartości zmiennej niezależnej x , dla których funkcja $f(x)$ jest określona

zbiór wartości funkcji

zbiór wszystkich wartości tej funkcji

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $0 < a < 1$. Następnie rozwiąż zadania i sprawdź odpowiedzi.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DbL0Ucozm>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a(x)$ dla $0 < a < 1$.


Polecenie 2

Punkt $A = (\frac{1}{9}, 2)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$. Określ dla jakich wartości x funkcja przyjmuje wartości z przedziału $(0, 1)$.

Polecenie 3

Dana jest funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji dla $x \in \langle \frac{1}{25}, 5 \rangle$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ile liczb dodatnich jest w zbiorze:

$\{\log_{0,1} 0,321; \log_{0,27} 1; \log_{0,5} 3,21; \log_{0,53} 0,713; \log_{0,9} 0,99\}$?

4

3

1

2

Ćwiczenie 2



Uporządkuj rosnąco liczby:

$\log_{0,1} 3$



$\log_{0,1} 0,3$



$\log_{0,3} 3$



$\log_{0,1} 0,321$



Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja $f(x) = \log_{0,1} x$. Wybierz zdania prawdziwe:

Równanie $f(x) = 2$ jest spełnione dla $x = 0, 2$.

Nierówność $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x)$ jest spełniona dla x należącego do przedziału $(0, \frac{1}{2})$.

Nierówność $f(x) < f(2)$ jest spełniona dla $x \in \langle 2, +\infty \rangle$.

Nierówność $f(x) < f(2)$ jest spełniona dla $x \in (2, +\infty)$.

Ćwiczenie 4



Dana jest funkcja $f(x) = \log_{0,5} x$. W miejsce kropek wstaw odpowiednie liczby.

1) Nierówność $f(x) < -2$ jest spełniona dla $x \in (\text{pusty_pole}, +\infty)$.

2) Nierówność $f(x) > -5$ jest spełniona dla $x \in (\text{pusty_pole}, \text{pusty_pole})$.

3) Nierówność $f(x) \leq 3$ jest spełniona dla $x \in \langle \text{pusty_pole}, \text{pusty_pole}, +\infty \rangle$.

Ćwiczenie 5



Dla $x \in \left\langle \frac{\sqrt{7}}{7}, 2401 \right\rangle$ funkcja $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$ przyjmuje wartości z przedziału:

$\langle -\frac{1}{2}, 4 \rangle$.

$\langle -4, -\frac{1}{2} \rangle$.

$\langle -\frac{1}{4}, 2 \rangle$.

$\langle -4, \frac{1}{2} \rangle$.

Ćwiczenie 6



Punkt $A = (2\frac{1}{2}, -1)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Podstawą logarytmu jest liczba $a = \frac{5}{2}$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Największa wartość tej funkcji dla $x \in \langle 0,064; 6,25 \rangle$ wynosi 2.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Najmniejsza wartość tej funkcji dla $x \in \langle 0,064; 6,25 \rangle$ wynosi (-2) .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Ćwiczenie 7



Punkt $A = (2\sqrt{2}, -1\frac{1}{2})$ należy do wykresu funkcji $f(x) = \log_a x$. W puste miejsce wstaw odpowiednie liczby.

- 1) Podstawą logarytmu jest liczba $a =$
- 2) Jeśli punkt $B = (b, -3)$ należy do wykresu tej funkcji to $b =$
- 3) Jeśli punkt $C = (\frac{1}{16}, c)$ należy do wykresu tej funkcji to $c =$

Ćwiczenie 8



Największa wartość funkcji $f(x) = \log_a x$ w przedziale $\langle \frac{243}{1024}, 1\frac{1}{3} \rangle$ wynosi 5. Najmniejsza wartość tej funkcji w podanym przedziale to:

- 3.
- 1.
- 1.
- 5.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $0 < a < 1$

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste

Zakres podstawowy. Uczeń:

5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ oraz $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;

9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały w których funkcja przyjmuje większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, najmniejsze i największe wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sporządza wykres funkcji $f(x) = \log_a x$,
- odczytuje własności funkcji $f(x) = \log_a x$ z jej wykresu,
- stosuje definicję logarytmu,
- odczytuje z wykresu funkcji jej własności,
- wyznacza argument dla danej wartości funkcji i odwrotnie,
- rozwiązuje zadania posługując się funkcją logarytmiczną lub jej wykresem,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- praca z tekstem,
- mini - konkurs zadaniowy.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca

1. uczniowie przypominają definicję logarytmu,
2. uczniowie, na tablicy rysują wykres funkcji $f(x) = \log_a x$,
3. nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe grupy,

2. każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji Przeczytaj,
3. uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji Przeczytaj,
4. nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek,
5. uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 1-4 z sekcji „Sprawdź się”, nauczyciel pyta poszczególnych uczniów o poprawne odpowiedzi. Pozostali uczniowie omawiają i argumentują ich poprawność. W razie wątpliwości, uczniowie przedstawiają na tablicy poprawne rozwiązanie,
6. uczniowie, w parach, oglądają animację oraz rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się pod animacją. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy,
7. uczniowie pozostają w parach i rozwiązują zadania 5-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów i w razie potrzeby podaje odpowiedzi.
8. Mini - konkurs zadaniowy - nauczyciel przedstawia do rozwiązania proste zadania wzorowane na przykładach z sekcji Przeczytaj. Trzech ochotników na przemian rozwiązuje zadania przedstawiane przez nauczyciela. Wygrywa uczeń, który najlepiej i najszybciej rozwiąże poprawnie zadania.

Faza podsumowująca:

1. uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień,
2. nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$ dla $0 < a < 1$ ”).

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji. Sposoby przedstawiania funkcji](#)
- [Historia i określenie logarytmów](#)
- [Definicja logarytmu. Własności logarytmu](#)
- [Zadania](#)
- [Działania na logarytmach. Przykłady](#)
- [Wykresy funkcji specjalnych i ich własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można również wykorzystać w realizacji lekcji „Funkcja logarytmiczna”.