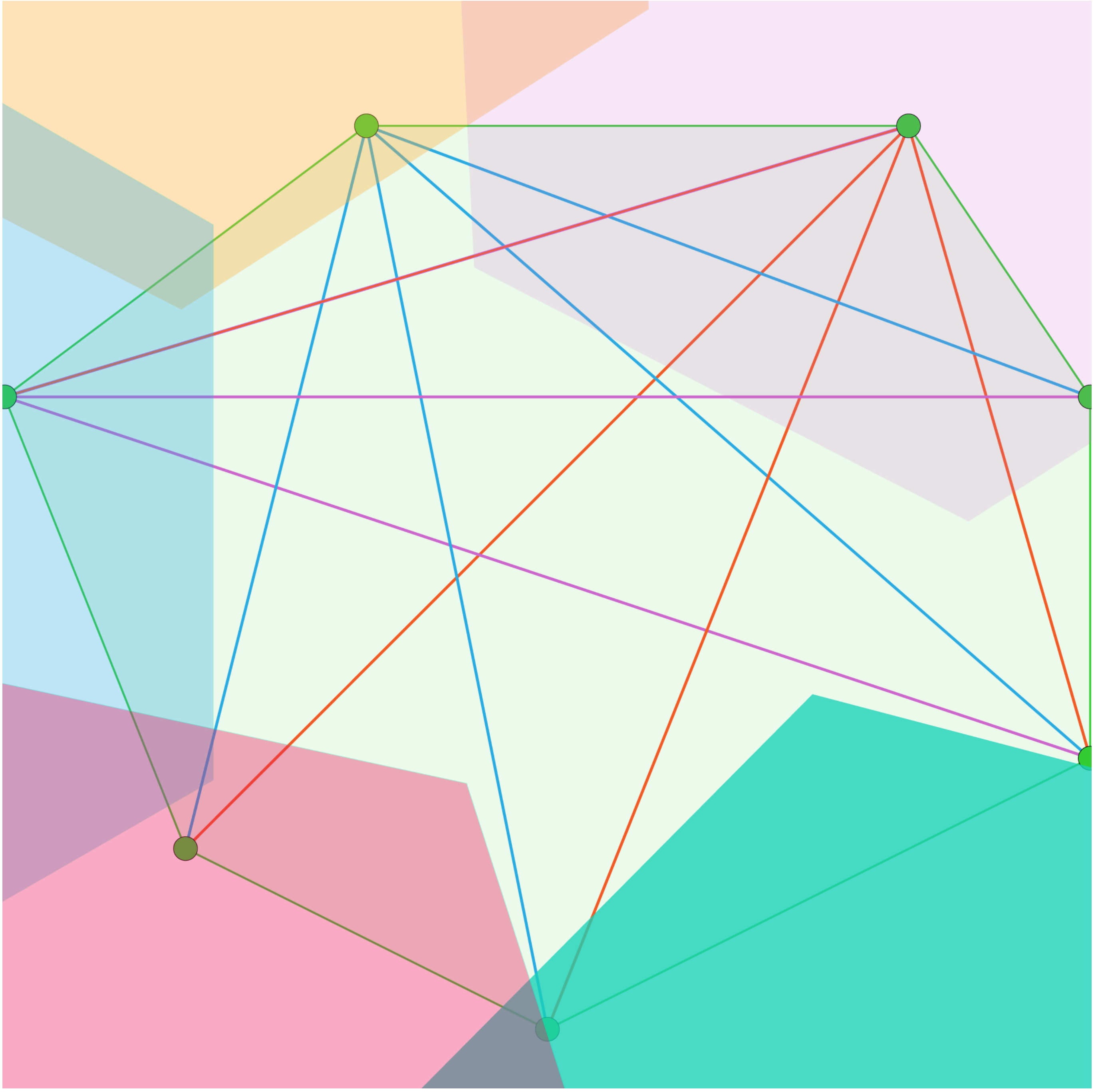


# Przekątne w wielokątach



Mówiąc w szkole o Pitagorasie myślimy przede wszystkim o słynnym twierdzeniu. Ale Pitagoras był także filozofem, twórcą pitagoreizmu, czyli koncepcji, w której „wszystko było liczbą”. Godłem Pitagorejczyków był foremny pięciokąt gwiaździsty, zwany dzisiaj pentagramem, w którym linie tworzące boki pięcioramiennej gwiazdy dzielą się w złotym stosunku.

> **Twoje cele**
>
> - Sformułujesz i udowodnisz twierdzenie o liczbie przekątnych wielokąta.
> - Zastosujesz poznane zależności do rozwiązywania problemów geometrycznych i praktycznych.

# Przeczytaj

## Przekątne wielokąta

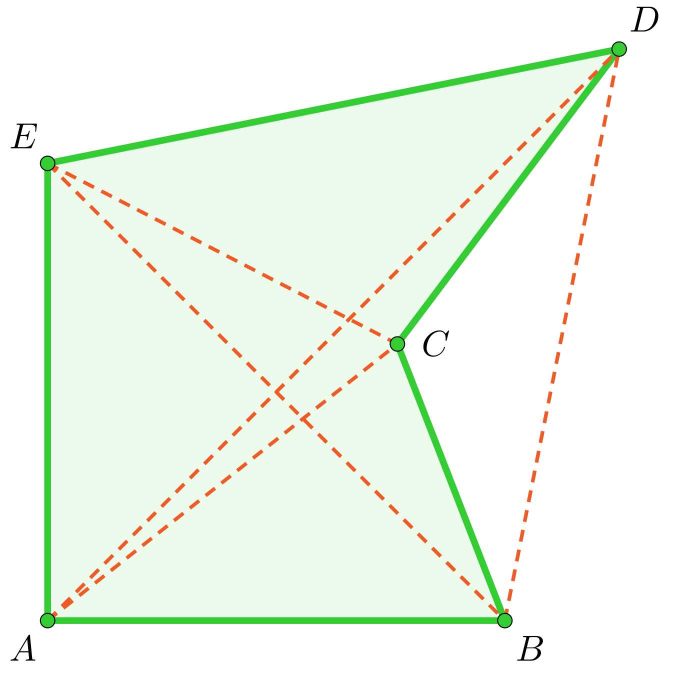
**Definicja: Przekątna wielokąta**

Odcinki łączące wierzchołki wielokąta i niebędące jego bokami nazywamy przekątnymi wielokąta.

Wiadomo, że trójkąt nie posiada przekątnych, bo każdy z odcinków łączących dowolne dwa jego wierzchołki jest jego bokiem. Wiadomo także, że w dowolnym czworokącie można poprowadzić dwie przekątne.

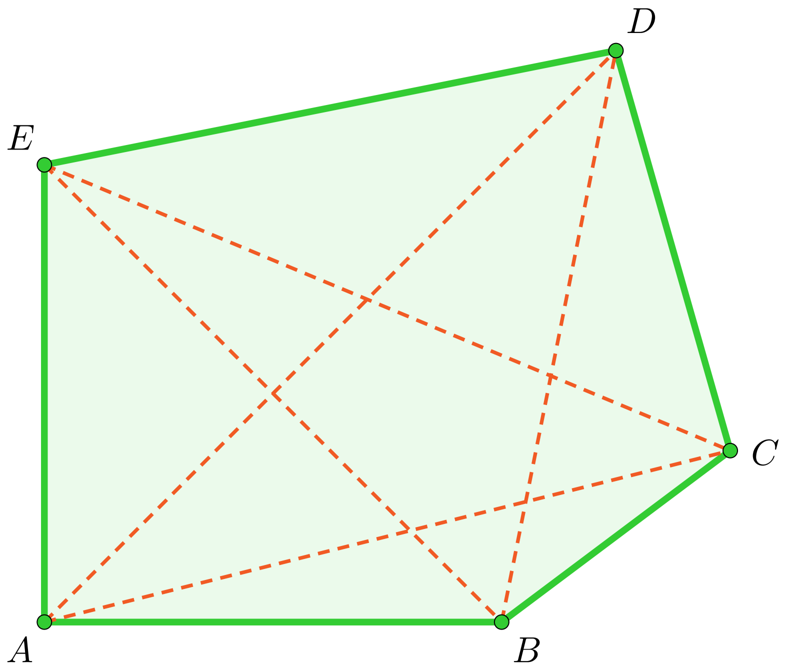
**Przykład 1**

Rozważmy figurę złożoną z obszaru ograniczonego łamaną zwyczajną zamkniętą złożoną z 5 odcinków (wraz z tą łamaną), taką jak na rysunku. To pięciokąt, który nie jest figurą wypukłą.




Zauważmy, że wówczas z każdego wierzchołka można poprowadzić dwie przekątne, a łączna liczba przekątnych jest równa pięć.

Jeśli rozważymy teraz pięciokąt wypukły, np. taki jak na rysunku poniższym, to liczby przekątnych poprowadzonych z każdego z wierzchołków oraz ich łączna liczba nie ulegają zmianie.




## Liczba przekątnych wielokąta

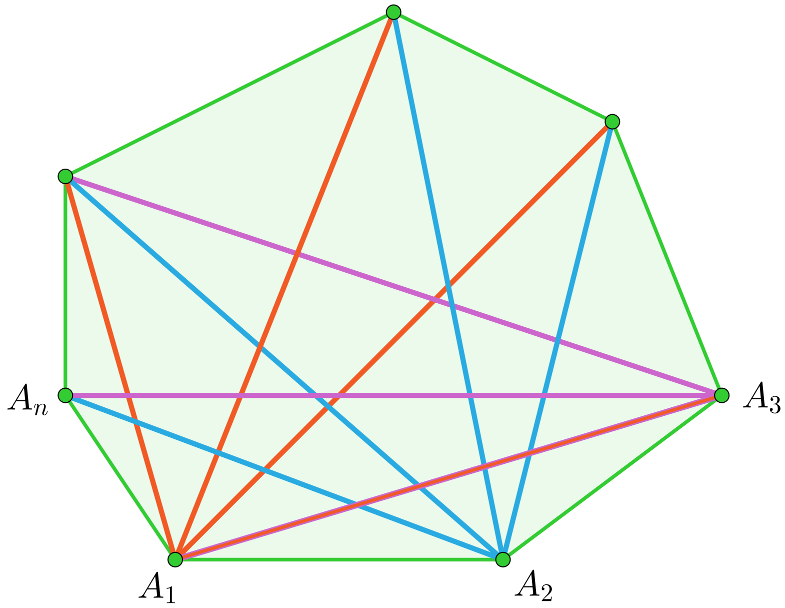
Zależność między liczbą wierzchołków wielokąta a liczbą jego przekątnych opisuje poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie: o liczbie przekątnych wielokąta**

Liczba przekątnych wielokąta jest równa $\frac{n(n-3)}{2}$, gdzie $n$ oznacza liczbę boków wielokąta ($n \in \mathbb{N}, n > 2$).

**Dowód**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.




Zauważmy, że z dowolnego wierzchołka możemy poprowadzić $(n-3)$ przekątne (na rysunku przekątne z wierzchołka $A_1$ są zaznaczone kolorem czerwonym, z wierzchołka $A_2$ kolorem niebieskim, z wierzchołka $A_3$ kolorem fioletowym). Wszystkich wierzchołków jest $n$, więc jeśli z każdego z wierzchołków poprowadzimy $(n-3)$ przekątne i zaznaczymy je innym kolorem, to łącznie poprowadzimy $n \cdot (n-3)$ odcinków. Każdy z narysowanych odcinków jest zaznaczony dwoma różnymi kolorami (na rysunku odcinek $A_1A_3$), czyli w iloczynie $n \cdot (n-3)$ jest liczony dwukrotnie.

Zatem liczbę wszystkich różnych przekątnych $n$-kąta opisuje wzór $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, co kończy dowód.

Skorzystamy z ostatniego wyniku do rozwiązania klasycznego problemu liczby meczów, jakie muszą być rozegrane w fazie grupowej turnieju piłkarskiego.

**Przykład 2**

W fazie grupowej turnieju uczestniczy siedem drużyn i każda drużyna rozgrywa z każdą inną dokładnie jeden mecz. Ile meczów zostanie rozegranych?

**Rozwiązanie**

Każdej drużynie możemy przyporządkować kolejno symbole $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_7$, które z kolei możemy utożsamić z różnymi wierzchołkami pewnego siedmiokąta. Wówczas skojarzenie dwóch drużyn, które będą grały mecz, można utożsamić z połączeniem odcinkiem dwóch dowolnych wierzchołków tej figury. Zauważmy jednak, że w ten sposób otrzymamy nie tylko wszystkie przekątne, ale także wszystkie boki tego

siedmiokąta.
Stąd, korzystając ze wzoru na liczbę przekątnych wielokąta, otrzymujemy wyrażenie:

$$\frac{7\cdot(7-3)}{2}+7=14+7=21$$

Ostatni wynik można uogólnić na turniej, w którym gra $n$ drużyn:

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}+n=n\cdot\left(\frac{n-3}{2}+1\right)=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Rezultat ten ma także proste interpretacje geometryczne, np. opisuje liczbę odcinków, którymi można połączyć dwa spośród $n$ punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe.

## Słownik

**wielokąt ($n$-kąt, $n$-bok)**

płaska figura geometryczna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną

**łamana**

figura geometryczna, którą można przedstawić jako sumę skończonej liczby takich odcinków, że dowolne dwa odcinki mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny i koniec każdego z odcinków (ew. z wyjątkiem ostatniego) jest początkiem następnego; łamana, której kolejne dwa odcinki nie leżą na jednej prostej oraz żaden z jej punktów nie należy do więcej niż dwóch odcinków, nazywa się zwyczajną; łamana nazywa się zamkniętą, gdy koniec jej ostatniego odcinka jest początkiem pierwszego odcinka; odcinki tworzące łamaną nazywamy jej bokami, a końce boków to wierzchołki łamanej

# Aplet

**Polecenie 1**
Uruchom aplet. Wybierz sześciokąt, a następnie w polu wyboru wierzchołka zaznacz jeden z wierzchołków. Obserwuj, jaka jest liczba rysowanych przekątnych. Dokonując wyboru kolejnych wierzchołków obserwuj, jaka jest liczba przekątnych prowadzonych z różnych wierzchołków. Czy widzisz związek między liczbą wierzchołków a liczbą przekątnych prowadzonych z danego wierzchołka? Jednocześnie obserwuj, jaka jest łączna liczba poprowadzonych przekątnych. Te same obserwacje przeprowadź dla ośmiokąta, ale zanim wybierzesz ośmiokąt próbuj odpowiedzieć na pytanie: ile przekątnych można poprowadzić z wierzchołka ośmiokąta? Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci stwierdzeń dotyczących relacji między liczbą wierzchołków a liczbą przekątnych prowadzanych z dowolnego wierzchołka każdego z wielokątów oraz łączną liczbą poprowadzonych przekątnych.

Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci twierdzeń dotyczących dowolnego $n$ - kąta.

**Polecenie 2**
Odpowiedz na pytania:

**1)** Ile przekątnych ma dwudziestokąt?

**2)** Jaki wielokąt ma $405$ przekątnych?

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

**Ćwiczenie 1**

**Ćwiczenie 2**

**Ćwiczenie 3**

**Ćwiczenie 4**

**Ćwiczenie 5**

**Ćwiczenie 6**

Liczba przekątnych $n$ - kąta jest o $27$ mniejsza od liczby przekątnych $(n+3)$ - kąta. Wyznacz $n$.

**Ćwiczenie 7**

Dwie przekątne podzieliły dany wielokąt na cztery pięciokąty. Wyznacz liczbę przekątnych tego wielokąta.

**Ćwiczenie 8**

W turnieju piłkarskim, w fazie grupowej, rozgrywano każdego kolejnego dnia dokładnie jeden mecz. Gdyby w grupie zmniejszyć liczbę drużyn o $1$, to ta faza rozgrywek trwałby o tydzień krócej. Oblicz ile drużyn grało w fazie grupowej.

**Ćwiczenie 9**

Wykaż, że liczby przekątnych $(n+1)$ - kąta i $n$ - kąta różnią się o $(n-1)$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Jacek Człapiński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Przekątne w wielokątach**

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VIII. Planimetria

Uczeń:

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokątach do ustalania zależności między liczbą boków i przekątnych

- odkrywa związki między liczbą przekątnych i liczbą boków wielokąta i stosuje je do rozwiązywania problemów

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

**Formy pracy:**

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

**Przebieg lekcji**

**Faza wstępna:**

1. Uczniowie wspólnie zastanawiają się, z czym kojarzy im się postać Pitagorasa i pojęcie „złotej liczby”. Nauczyciel wspomina o pitagoreizmie i nawiązuje do symbolu tej szkoły filozoficznej (pentagram).

2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia przekątnej wielokąta i omówienie liczby przekątnych w trójkątach i czworokątach.

3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel precyzuje pojęcie przekątnej wielokąta. Uczniowie na przykładach pokazują, że nie każdy odcinek łączący wierzchołki wielokąta jest przekątną. Uczniowie dyskutują, czy fakt, że figura jest wypukła wpływa na liczbę jego przekątnych.

2. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują aplet geogebry *Przekątne wielokąta.*

3. Nauczyciel steruje dyskusją, jaką uczniowie prowadzą w trakcie wykonywania ćwiczeń z użyciem apletu w takim kierunku, aby samodzielnie odkryli twierdzenie o liczbie przekątnych wielokąta, a następnie omawia szkic dowodu tego twierdzenia.

4. Uczniowie rozwiązując problem postawiony w *Przykładzie 2.* budują (przy pomocy nauczyciela) model geometryczny danej sytuacji problemowej i go uogólniają (dla dowolnego $n$); wskazują na związek między praktycznym zastosowaniem poznanej zależności i jej geometryczną interpretacją.

5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

**Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

2. Nauczyciel wskazuje, że często rozwiązanie problemu, który pozornie nie jest związany z geometrią, daje się opisać prostym modelem geometrycznym i odwrotnie.

**Praca domowa:**

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

**Materiały pomocnicze:**

- Wielokąty i ich własności

**Wskazówki metodyczne:**

Aplet geogebry *Przekątne wielokąta* można użyć do wprowadzenia pojęcia triangulacji figury.