

# Miary rozproszenia

Rozstęp. Rozproszenie wyników wokół średniej. Przykłady rozwiązanych zadań badających rozproszenie wyników wokół średniej.

Odchylenie przeciętne. Odchylenie standardowe. Wariancja liczb. Przykłady rozwiązanych zadań badających wartość odchylenia standardowego.

Zestaw zadań, w tym część zadań interaktywnych. Obliczanie odchylenia standardowego lub wariancji.

Zestaw zadań interaktywnych na obliczenie wariancji, odchylenia standardowego, średniej arytmetycznej.

Zestaw zadań, w tym część zadań interaktywnych. Obliczanie wariancji, odchylenia standardowego, średniej arytmetycznej.

# Miary rozproszenia

W tym materiale zawarte są informacje na temat podstawowych miar rozproszenia. Obliczysz rozstęp, odchylenie przeciętne, odchylenie standardowe i wariancję zestawu danych.

## Przykład 1

Właściciel dwóch sklepów z odzieżą, położonych w różnych miejscach miasta, próbuje ustalić, które bluzki sprzedają się najlepiej w każdym z jego sklepów, przy czym bierze pod uwagę jedynie cenę bluzki. Chce w ten sposób ustalić, jaki towar powinien zamówić. Zanotował, że podczas ostatniego dnia w pierwszym sklepie sprzedano kolejno bluzki w cenach (zaokrąglonych do pełnych dziesiątek złotych): 10 zł, 80 zł, 20 zł, 20 zł, 90 zł, 10 zł, 90 zł, 80 zł. W tym samym czasie w drugim sklepie sprzedano kolejno bluzki w cenach (zaokrąglonych do pełnych dziesiątek złotych): 50 zł, 50 zł, 40 zł, 60 zł, 50 zł, 40 zł, 60 zł, 50 zł, 50 zł, 50 zł.

Ceny te, po uporządkowaniu w kolejności niemalejącej, zapisał w następującej tabeli:

| 1 sklep | 2 sklep |
|---------|---------|
| 10 zł   | 40 zł   |
| 10 zł   | 40 zł   |
| 20 zł   | 50 zł   |
| 20 zł   | 50 zł   |
| 80 zł   | 50 zł   |
| 80 zł   | 50 zł   |
| 90 zł   | 50 zł   |
| 90 zł   | 50 zł   |
|         | 60 zł   |
|         | 60 zł   |

Zauważmy, że średnia cena zakupionej bluzki oraz mediana są takie same w obu sklepach.

W pierwszym sklepie

$$\bar{x} = \frac{10 + 10 + 20 + 20 + 80 + 80 + 90 + 90}{8} = \frac{400}{8} = 50$$

oraz mediana jest równa

$$\frac{20 + 80}{2} = 50.$$

W drugim sklepie

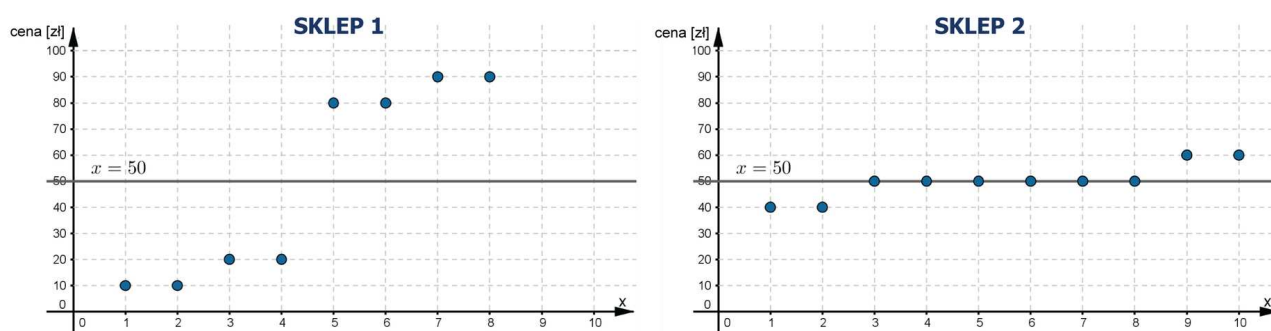
$$\bar{x} = \frac{40 + 40 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 60 + 60}{10} = \frac{500}{10} = 50$$

oraz mediana jest równa

$$\frac{50 + 50}{2} = 50.$$

Na podstawie tych danych można wysnuć wnioski, że w obu sklepach sprzedaż wygląda podobnie.

Zilustrujemy jednak te dane na wykresach.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

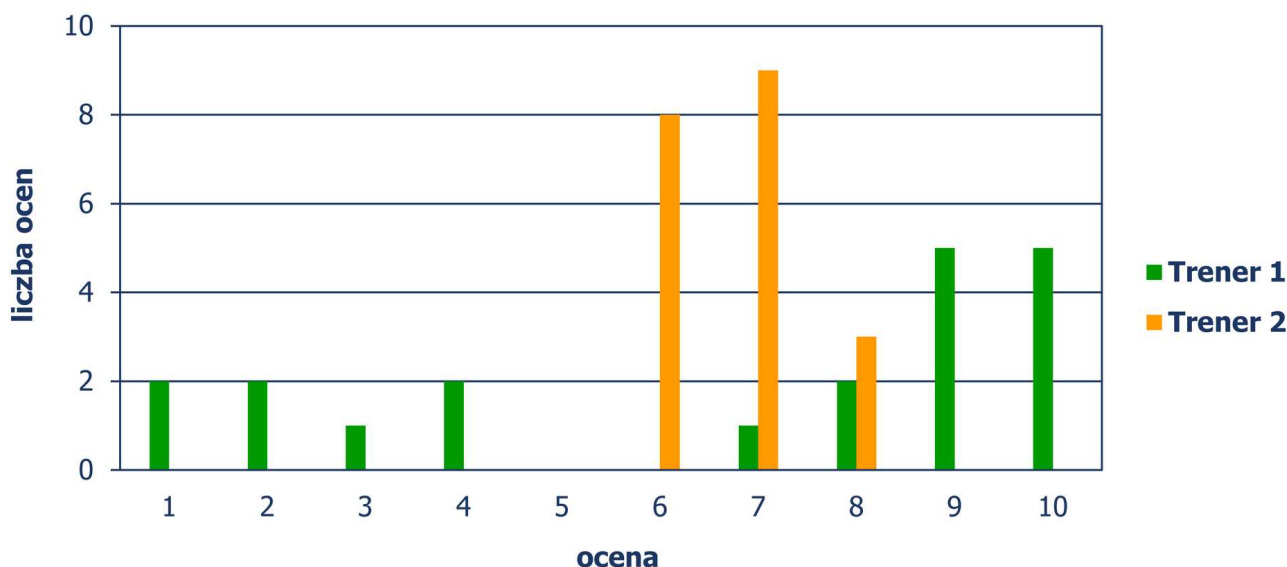
Na pierwszym wykresie dane znajdują się w sporej odległości od średniej  $x = 50$ , na drugim skupiają się wokół niej. W pierwszym zestawie danych są kwoty bardzo małe i bardzo duże w stosunku do średniej. Może to oznaczać, że do sklepu przychodzą zarówno zamożni klienci, jak i wydający na ubrania minimum pieniędzy. W drugim sklepie większość danych jest bliska średniej i medianie. Może to oznaczać, że klienci drugiego sklepu to ludzie średnio zamożni, którzy wybierają towar przeciętny, nie za drogi i nie za tani.

Właściciel sklepów prowadził podobne badanie przez kilka kolejnych dni i wnioski powtarzały się. Zdecydował się więc do pierwszego sklepu zamówić bluzki bardzo tanie i droższe, zaś do drugiego takie, których cena jest bliska 50 zł.

## Przykład 2

Pewna firma zajmuje się prowadzeniem szkoleń. Po każdym ze szkoleń uczestnicy oceniają trenera prowadzącego szkolenie. Ocena ta jest liczbą całkowitą od 1 (najniższa ocena) do 10. Jedno ze szkoleń,

w którym wzięło udział 20 uczestników, prowadzone było przez dwóch trenerów. Na poniższym wykresie przedstawiono otrzymane przez nich oceny.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczmy średnią ocen, jaką otrzymał każdy z trenerów.

$$\text{Trener 1: } \bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 5}{20} = \frac{135}{20} = 6,75.$$

$$\text{Trener 2: } \bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 3}{20} = \frac{135}{20} = 6,75.$$

Średnia ocen jest taka sama. Wykres natomiast wskazuje na inne rozkłady poszczególnych ocen jednostkowych. Trener 1 otrzymał oceny prawie z całej skali. Są one rozproszone w stosunku do oceny średniej, a więc część uczestników szkolenia oceniła go bardzo wysoko, a część bardzo nisko. Trener 2 otrzymał jedynie oceny 6, 7 i 8, a więc skupione wokół średniej. Może nie jest idealny (nie otrzymał 10), ale ludziom się na ogół podobał i nie wzbudzał negatywnych odczuć.

Oczywiście, jeżeli zestaw danych jest większy, to trudniej zaobserwować jego strukturę. Do oceny koncentracji badanych danych służą miary rozproszenia. Najprostszą miarą rozproszenia jest rozstęp, czyli różnica pomiędzy największą i najmniejszą wartością.

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Dużą zaletą tej charakterystyki jest łatwość jej wyznaczania. Jednak nie informuje nas ona, jak w przedziale  $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$  o długości  $R$  są rozłożone poszczególne dane. Czy np. są skupione wokół jednego punktu, czy rozrzucone w tym przedziale. Rozstęp mówi tylko o tym, jaką długość ma najkrótszy przedział zawierający wszystkie dane.

### Przykład 3

Obliczmy rozstęp dla każdej z wielkości występujących w poprzednich dwóch przykładach.

Dla pierwszego sklepu  $R = 90 - 10 = 80$ , a dla drugiego  $R = 60 - 40 = 20$ . Zauważymy więc, że różnica w cenie najdroższej i najtańszej bluzki w pierwszym sklepie wynosi 80 zł, zaś w drugim 20 zł, czyli jest cztery razy mniejsza. Zatem w drugim sklepie ceny są bardziej „skupione”.

W drugim przykładzie dla pierwszego trenera  $R = 10 - 1 = 9$ , a dla drugiego  $R = 8 - 6 = 2$ . Tutaj także rozstęp wyników drugiego trenera jest mniejszy niż pierwszego.

Najczęściej jednak potrzebujemy dokładniejszej analizy rozproszenia danych. Zauważmy, że dla tego samego rozstępu dane mogą układać się bardzo różnie. Na przykład rozstęp w zestawie danych: 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5 jest równy 4 i jest taki sam jak w zestawie: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5. Jednak w pierwszym zestawie, poza danymi skrajnymi, występuje wielokrotnie ta sama wartość 3, a w drugim zestawie występują wszystkie wartości całkowite od 1 do 5 i prawie każda tak samo często. Spróbujemy skonstruować taki wskaźnik, który pozwoli nam odróżnić te dwie sytuacje.

Zajmiemy się więc badaniem odległości każdej danej od średniej. Odległość między dwiema liczbami na osi liczbowej to wartość bezwzględna różnicy tych liczb. Zatem odchylenie liczby  $x_i$  od średniej  $\bar{x}$ , to

$$|x_i - \bar{x}|.$$

Obliczmy odchylenia średnich cen bluzek z przykładu pierwszego w każdym z dwóch sklepów. Wyniki zapiszmy w tabeli.

| I sklep           |                                                          | II sklep          |                                                          |
|-------------------|----------------------------------------------------------|-------------------|----------------------------------------------------------|
| Cena bluzki $x_i$ | Odchylenie od średniej<br>$ x_i - \bar{x}  =  x_i - 50 $ | Cena bluzki $x_i$ | Odchylenie od średniej<br>$ x_i - \bar{x}  =  x_i - 50 $ |
| 10                | 40                                                       | 40                | 10                                                       |
| 10                | 40                                                       | 40                | 10                                                       |
| 20                | 30                                                       | 50                | 0                                                        |
| 20                | 30                                                       | 50                | 0                                                        |
| 80                | 30                                                       | 50                | 0                                                        |
| 80                | 30                                                       | 50                | 0                                                        |
| 90                | 40                                                       | 60                | 10                                                       |
| 90                | 40                                                       | 60                | 10                                                       |

Obliczmy teraz średnią arytmetyczną znalezionych odchyleń w każdym ze sklepów.

W pierwszym sklepie:  $\frac{40+40+30+30+30+30+40+40}{8} = \frac{280}{8} = 35$ .

W drugim sklepie:  $\frac{10+10+10+10}{8} = \frac{40}{8} = 5$ .

Obliczone przez nas wielkości to tak zwane odchylenia przeciętne.

### Definicja: Odchylenie przeciętne

Odchyleniem przeciętnym liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nazywamy liczbę

$$\frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}.$$

Zatem w pierwszym sklepie odchylenie przeciętne jest wyższe niż w drugim, co potwierdza naszą wcześniejszą obserwację, że w pierwszym sklepie „ceny leżą dalej od średniej”, a w drugim znajdują się bliżej średniej.

W statystyce częściej od odchylenia przeciętnego wykorzystuje się tzw. odchylenie standardowe.

### Definicja: Odchylenie standardowe

Odchyleniem standardowym  $\sigma$  liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nazywamy liczbę

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Kwadrat tej wielkości nazywamy wariancją i oznaczamy symbolem  $\sigma^2$ , czyli

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Wariancja i odchylenie standardowe niosą dokładnie te same informacje. Wygodniej używać odchylenia standardowego, ponieważ wariancja jest podawana w jednostkach kwadratowych, a odchylenie standardowe dokładnie w tych samych jednostkach, co analizowane dane.

Obliczanie odchylenia standardowego, czy też wariancji, jest uciążliwe w sytuacji, gdy  $\bar{x}$  jest liczbą niecałkowitą i ma albo długie rozwinięcie dziesiętne, albo nawet nieskończone. Podamy teraz wzór, który sprawia, że obliczenia są znacznie wygodniejsze.

### Twierdzenie: Wariancja liczb

Wariancja liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  jest równa

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\frac{\bar{x}}{x}\right)^2.$$

### Dowód

Przekształcając wzór z definicji wariancji, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right)^2 + \dots + \left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n} = \\
&= \frac{x_1^2 - 2x_1 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + x_2^2 - 2x_2 \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2 + \dots + x_n^2 - 2x_n \cdot \bar{x} + \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2\bar{x} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{n \cdot \left(\bar{x}\right)^2}{n} = \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - 2 \cdot \left(\bar{x}\right)^2 + \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \left(\bar{x}\right)^2.
\end{aligned}$$

#### Przykład 4

W tabeli przedstawiono kwoty rachunków za telefon, jakie zapłaciła Małgosia w kolejnych miesiącach.

| styczeń | luty  | marzec | kwiecień | maj   | czerwiec |
|---------|-------|--------|----------|-------|----------|
| 63 zł   | 41 zł | 35 zł  | 67 zł    | 60 zł | 52 zł    |

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe tych wydatków z dokładnością do 1 zł. Średnia wydatków na telefon Małgosi jest równa:

$$\bar{x} = \frac{63+41+35+67+60+52}{6} = \frac{318}{6} = 53(\text{zł}).$$

W kolejnych miesiącach odchylenie od średniej jest równe:

|                              | styczeń | luty  | marzec | kwiecień | maj   | czerwiec |
|------------------------------|---------|-------|--------|----------|-------|----------|
| $x_i$                        | 63 zł   | 41 zł | 35 zł  | 67 zł    | 60 zł | 52 zł    |
| $\left x_i - \bar{x}\right $ | 10      | 12    | 18     | 14       | 7     | 1        |

Wariancja jest więc równa:

$$\sigma^2 = \frac{10^2+12^2+18^2+14^2+7^2+1^2}{6} = \frac{100+144+324+196+49+1}{6} = \frac{814}{6} = 135, \left(6\right) \approx 136$$

a odchylenie standardowe:

$$\sigma = \sqrt{136} \approx 12.$$

### Przykład 5

Wyniki pewnego badania umieszczono w tabeli.

| Wynik | Częstość |
|-------|----------|
| 4     | 5        |
| 5     | 2        |
| 6     | 4        |
| 7     | 6        |
| 8     | 3        |

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe w tym badaniu.

Zacznijemy od policzenia średniej

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8}{5 + 2 + 4 + 6 + 3} = \frac{120}{20} = 6.$$

- sposób I

Obliczymy wariancję, korzystając ze wzoru podanego w twierdzeniu. W tym celu obliczymy średnią kwadratów otrzymanych wyników

$$\frac{5 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 6^2 + 6 \cdot 7^2 + 3 \cdot 8^2}{5 + 2 + 4 + 6 + 3} = \frac{760}{20} = 38.$$

Stąd wariancja jest równa  $\sigma^2 = 38 - \left(\bar{x}\right)^2 = 38 - 36 = 2$  i odchylenie standardowe  $\sigma = \sqrt{2}$ .

- sposób II

Obliczymy wariancję, posługując się definicją. Odchylenia poszczególnych wyników od średniej zamieścimy w tabeli.

| Wynik $x_i$ | Odchylenie $ x_i - \bar{x} $ | Częstość |
|-------------|------------------------------|----------|
| 4           | $ 4 - 6  = 2$                | 5        |
| 5           | $ 5 - 6  = 1$                | 2        |

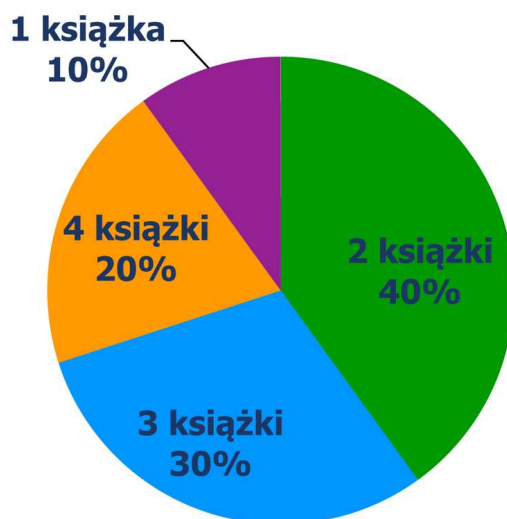
| Wynik $x_i$ | Odchylenie $ x_i - \bar{x} $ | Częstość |
|-------------|------------------------------|----------|
| 6           | $ 6 - 6  = 0$                | 4        |
| 7           | $ 7 - 6  = 1$                | 6        |
| 8           | $ 8 - 6  = 2$                | 3        |

Podstawiając wyniki do wzoru na wariancję, otrzymujemy:

$$\sigma^2 = \frac{5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 0^2 + 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2}{5 + 2 + 4 + 6 + 3} = \frac{40}{20} = 2.$$

#### Przykład 6

W pewnej szkole przeprowadzono ankietę, w której zadano uczniom pytanie „Ile książek przeczytałeś/łaś w ciągu ostatnich dwóch tygodni?”. Wyniki ankiety przedstawiono na diagramie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych wyników.  
Dla otrzymanych wyników możemy przyjąć następujące wagi:

| 1 książka | 2 książki | 3 książki | 4 książki | Suma wag |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 0,1       | 0,4       | 0,3       | 0,2       | 1        |

Średnia ważona otrzymanych wyników jest równa

$$\bar{x}_w = 0,1 \cdot 1 + 0,4 \cdot 2 + 0,3 \cdot 3 + 0,2 \cdot 4 = 0,1 + 0,8 + 0,9 + 0,8 = 2,6.$$

Licząc wariancję, posłużymy się wzorem z twierdzenia

$$\sigma^2 = \frac{0,1 \cdot 1^2 + 0,4 \cdot 2^2 + 0,3 \cdot 3^2 + 0,2 \cdot 4^2}{1} - (2,6)^2 = 0,1 + 1,6 + 2,7 + 3,2 - 6,76 = 0,84.$$

Wtedy odchylenie standardowe jest równe  $\sigma \approx 0,92$ .

### Przykład 7

Michał przeprowadził doświadczenie, w którym mierzył m.in. czas ruchu pewnego ciała. Wykonał doświadczenie 10 razy i otrzymał następujące wyniki w sekundach:

| Doświadczenie | Wynik |
|---------------|-------|
| 1             | 10,23 |
| 2             | 10,45 |
| 3             | 9,98  |
| 4             | 9,67  |
| 5             | 10,05 |
| 6             | 10,14 |
| 7             | 9,48  |
| 8             | 9,92  |
| 9             | 10,31 |
| 10            | 10,26 |

Wyznamy średni czas ruchu ciała oraz odchylenie standardowe w tym doświadczeniu.

Zacniemy od policzenia średniej

$$\bar{x} = \frac{10,23 + 10,45 + 9,98 + 9,67 + 10,05 + 10,14 + 9,48 + 9,92 + 10,31 + 10,26}{10} = \frac{100,49}{10} = 10,049$$

Podstawiając do wzoru na odchylenie standardowe dostajemy

$$s = \sqrt{\frac{(10,23 - 10,049)^2 + (10,45 - 10,049)^2 + (9,98 - 10,049)^2 + \dots + (10,31 - 10,049)^2 + (10,26 - 10,049)^2}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,032761 + 0,160801 + 0,004761 + \dots + 0,068121 + 0,044521}{10}} = 0,2834237111.$$

### Ćwiczenie 1



Jaką wartość liczbową przyjmuje odchylenie standardowe zestawu liczb: 5, 7, 11, 13? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8

☐ 10

☐  $\sqrt{10}$

☐ 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 2



Jaką wartość liczbową przyjmuje wariancja zestawu liczb: 4, 7, 9, 20? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 146

☐ 36,5

☐ 10

☐ 12

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Jaką wartość liczbową przyjmuje wariancja, jeśli odchylenie standardowe pewnego zestawu danych jest równe  $4\sqrt{2}$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8

☐  $2\sqrt{2}$

☐ 32

☐  $2\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4



Który z poniższych zestawów liczb ma największe odchylenie standardowe? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 1, 2, 9, 10, 11

☐ 15, 15, 15, 15

☐ 10, 12, 14, 12

☐ 1, 2, 4, 6, 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 5



Połącz w pary te zestawy danych, które mają jednakowe odchylenie standardowe.

5, 3, 4, 6

15, 12, 13, 14

5, 2, 7, 4

11, 13, 14, 16

12, 14, 16, 18

15, 13, 11, 9

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie z matematyki przez uczniów klasy I. Oblicz średnią i odchylenie standardowe otrzymanych wyników, a następnie przeciągnij wyniki w odpowiednie luki.

| Ocena          | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------|---|---|---|---|---|---|
| Liczba uczniów | 2 | 3 | 7 | 8 | 4 | 1 |

$$\bar{x} = \text{[input box]}$$

$$\sigma = \text{[input box]}$$

4, 17

1, 22

2, 54

1, 24

3, 48

3, 20

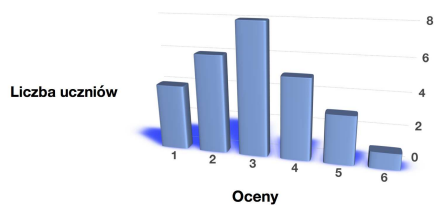
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Diagram słupkowy przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie z matematyki przez uczniów klasy III. Oblicz średnią i odchylenie standardowe otrzymanych wyników, a następnie przeciągnij odpowiedzi w wyznaczone luki.

| Oceny | Liczba uczniów |
|-------|----------------|
| 1     | 4              |
| 2     | 6              |
| 3     | 8              |
| 4     | 5              |
| 5     | 3              |
| 6     | 1              |



Średnia: [input box]

Odchylenie standardowe: [input box]

2, 48

3

1, 12

2, 94

1, 33

3, 54

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Uporządkuj zestawy danych w kolejności wzrastającej wariancji.

9, 4, 1, 6



3, 1, 7, 5



8, 8, 8, 8



1, 10, 4, 12



6, 6, 5, 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9



Uporządkuj podane liczby rosnąco.

$\frac{23}{25}$



$\frac{3}{5}$



$\frac{2}{3}$



0,8



0,88



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10



Uporządkuj podane liczby malejąco.

32, 3



$29\frac{1}{3}$



3, 223



$\frac{323}{11}$



3, 23



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 11



Oblicz odchylenie standardowe podanego zestawu danych: 15, 12, 17, 10, 13, 8, 10, 16. Wynik zaokrąglij do całości, a następnie zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 5

☐ 3

☐ 2

☐ 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 12



Tomek każdego dnia rano, jadąc do szkoły, porównywał czas przyjazdu tramwaju z informacją umieszczoną na przystanku. Przez kolejne dni notował w zeszycie, ile minut spóźniał się tramwaj. Oblicz, ile przeciętnie minut spóźniał się tramwaj.

| poniedziałek | wtorek | środa   | czwartek | piątek |
|--------------|--------|---------|----------|--------|
| 3,5 min      | 6 min  | 2,5 min | 0 min    | 3 min  |

Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Tramwaj spóźniał się przeciętnie  min.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 13



Zaznacz takie trzy liczby, dla których średnia jest równa 7 i odchylenie standardowe jest większe od 2,3.

|                            |                             |                            |                            |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 4 <input type="checkbox"/> | 10 <input type="checkbox"/> | 7 <input type="checkbox"/> | 2 <input type="checkbox"/> | 5 <input type="checkbox"/> | 15 <input type="checkbox"/> |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 14



Magda, przygotowując się do matury, postanowiła sprawdzić, ile godzin dziennie przeznaczą na naukę. W tym celu przez dwa tygodnie codziennie zapisywała wyniki w tabeli, a następnie zaznaczyła je na wykresie. Oblicz średnią liczbę czasu poświęconego na naukę i odchylenie standardowe w pierwszym tygodniu, w drugim oraz w całym okresie dwóch tygodni.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 15



Odpowiedz na pytania.

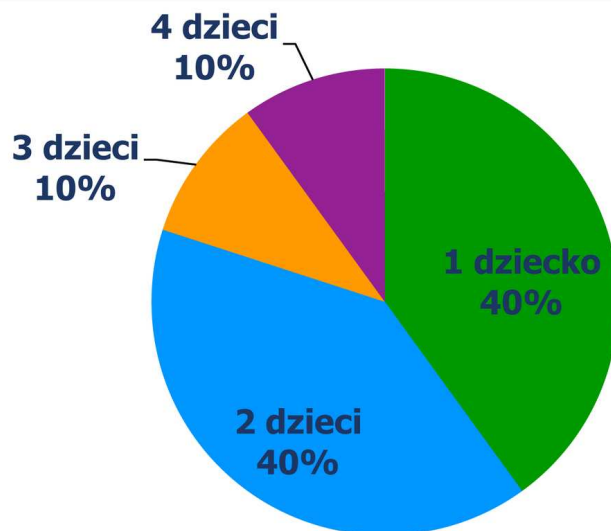
1. Jaka jest wariancja i jakie jest odchylenie standardowe zestawu liczb: 2, 4, 6, 8, 10? Jak zmienia się wariancja i odchylenie standardowe, jeżeli każdą z podanych liczb zwiększymy dwa razy?
2. Średnia arytmetyczna zestawu pięciu liczb:  $a, b, c, d, e$  jest równa  $\bar{x}$ , a odchylenie standardowe  $\sigma$ . Jak zmienia się te dwa wskaźniki, gdy każdą z liczb tego zestawu zwiększymy trzy razy?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 16



W pewnej szkole przeprowadzono badanie dotyczące liczby dzieci w rodzinach uczniów. Wyniki przedstawiono na diagramie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz wariancję i odchylenie standardowe otrzymanych wyników. Wyniki wpisz w luki.

$\sigma^2 =$

$\sigma \approx$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 17



Na lekcji fizyki przeprowadzono doświadczenie, podczas którego mierzono temperaturę pewnej próbki umieszczonej w określonych warunkach. Wyniki zapisano w tabeli.

| Nr próbki | Temperatura |
|-----------|-------------|
| 1         | 23,12       |
| 2         | 23,71       |
| 3         | 22,93       |
| 4         | 23,34       |
| 5         | 23,19       |
| 6         | 23,45       |
| 7         | 23,65       |
| 8         | 23,74       |
| 9         | 23,48       |
| 10        | 23,62       |

Oblicz średnią temperaturę oraz wariancję i odchylenie standardowe w tym badaniu. Każdy z otrzymanych wyników wpisz z dokładnością do 0,01.

$$\bar{x} = \text{[input box]}$$

$$\sigma^2 = \text{[input box]}$$

$$\sigma \approx \text{[input box]}$$

