

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_3 - 3x_4 = 13 \end{cases}$$

Długość odcinka w układzie współrzędnych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Długość odcinka w układzie współrzędnych

Źródło: dostępny w internecie: [pxhere.com](http://pxhere.com), domena publiczna.

Od wczesnych klas szkoły podstawowej na lekcjach matematyki rozwiązuje się tzw. zadania miarowe dotyczące geometrii. Częste polecenia związane z tym zagadnieniem to “oblicz obwód...”, “oblicz pole...”, “oblicz miarę kąta...” itp. Trudno wyobrazić sobie rozwiązywanie tego typu zadań bez umiejętności obliczania długości odcinka. W tej lekcji przypomnisz sobie, jak obliczyć długość odcinka umieszczonego w prostokątnym układzie współrzędnych.

### Twoje cele

- Przypomnisz sobie jak obliczać długość odcinka mając dane współrzędne jego końców.
- Wykorzystasz wzór na długość odcinka do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej.

# Przeczytaj

---

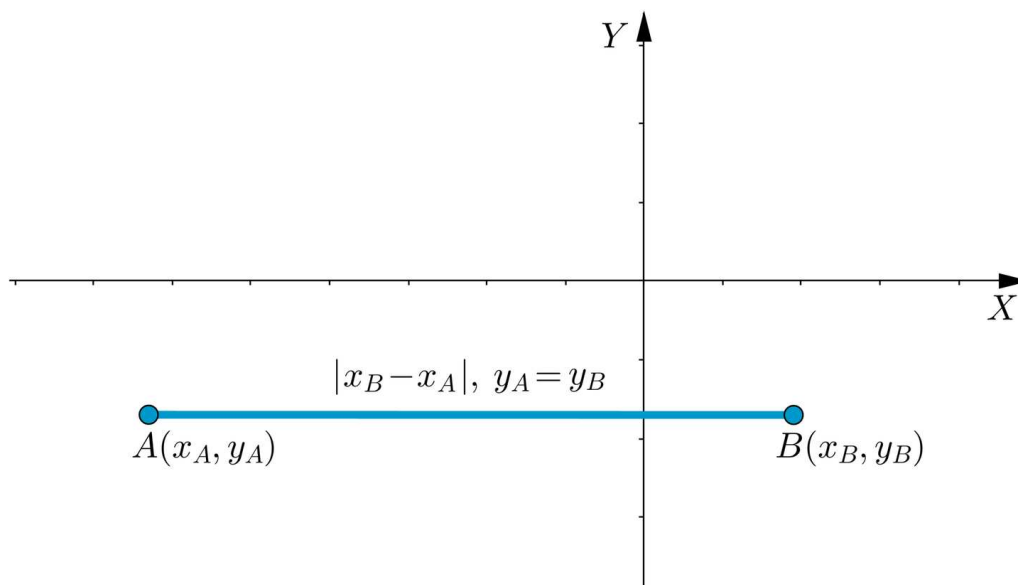
Dane są punkty  $A = (x_A, y_A)$ . Obliczymy długość odcinka  $AB$  rozważając jego różne położenie w układzie współrzędnych. Przypomnijmy - długość odcinka oznaczamy  $|AB|$ . Dwie pionowe kreski po obu stronach nazwy to ten sam symbol, który oznacza również wartość bezwzględną liczby, liczbę elementów zbioru i miarę kąta. Można powiedzieć, że symbol  $|\cdot|$  oznacza szeroko pojętą miarę. Tym razem to miara długości odcinka.

## Przypadek I

Odcinek  $AB$  jest równoległy do **osi  $X$** .

Oznacza to, że rzędne punktów  $A$  i  $B$  są równe. Wówczas długość odcinka  $AB$  to wartość bezwzględna różnicy odciętych tych punktów:

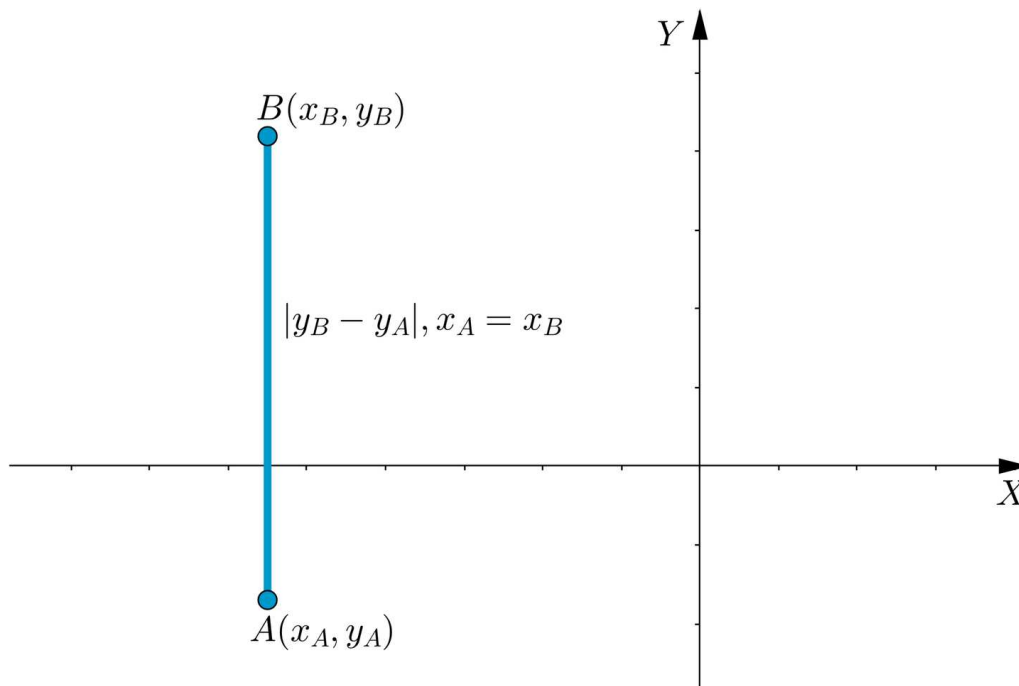
$$|AB| = |x_A - x_B| = |x_B - x_A|.$$



## Przypadek II

Odcinek  $AB$  jest równoległy do **osi  $Y$** . Oznacza to, że odcięte punktów  $A$  i  $B$  są równe. Wówczas długość odcinka  $AB$  to wartość bezwzględna różnicy rzędnych tych punktów:

$$|AB| = |y_A - y_B| = |y_B - y_A|.$$



### Przypadek III

Odcinek  $AB$  nie jest równoległy do żadnej z osi układu współrzędnych. Oznacza to, że ani rzędne, ani odcięte punktów  $A$  i  $B$  nie są równe. W tym przypadku w celu obliczenia długości odcinka  $AB$  możemy zastosować twierdzenie Pitagorasa. Tworzymy zatem trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są równoległe do osi układu współrzędnych.

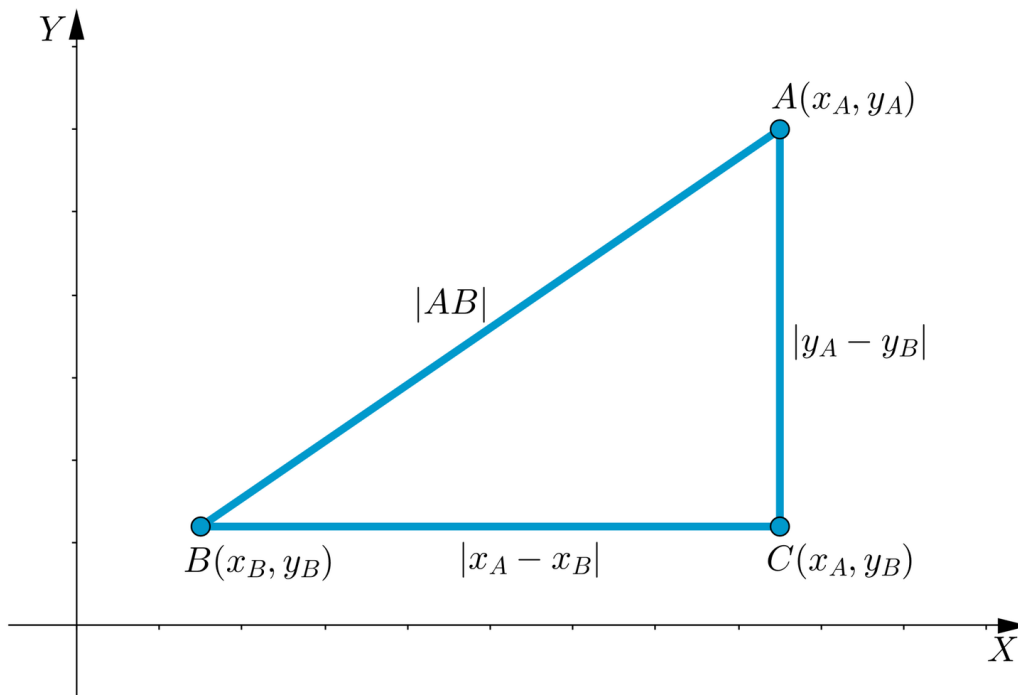
Z rysunku wynika następująca równość  $|AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$

Korzystając z własności wartości bezwzględnej  $|a|^2 = a^2$  otrzymujemy

$$|AB|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

i dalej

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$



### Przykład 1

Obliczymy długość odcinka  $AB$  o końcach w podanych punktach.

a.  $A = (2, 3)$ ,  $B = (-4, 3)$

Ponieważ rzędne obu punktów są równe, możemy zauważyć, że odcinek  $AB$  jest równoległy do osi  $X$ . Aby wyznaczyć długość odcinka  $AB$  wystarczy obliczyć wartość bezwzględną różnicy odciętych tych punktów. Zatem

$$|AB| = |x_A - x_B| = |2 - (-4)| = 6$$

b.  $A = (1, 2)$ ,  $B = (1, -5)$

Ponieważ odcięte obu punktów są równe, możemy zauważyć, że odcinek  $AB$  jest równoległy do osi  $Y$ . Aby wyznaczyć długość odcinka  $AB$  wystarczy obliczyć wartość bezwzględną różnicy rzędnych tych punktów. Zatem

$$|AB| = |y_A - y_B| = |2 - (-5)| = 7$$

c.  $A = (2, -3)$ ,  $B = (-1, 5)$

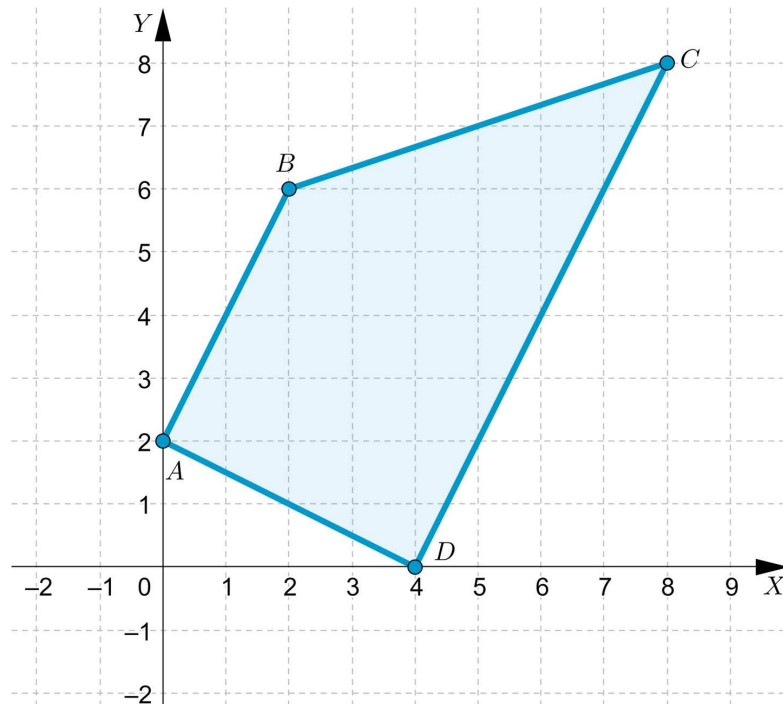
Ponieważ ani odcięte, ani rzędne punktów  $A$ ,  $B$  nie są równe, więc odcinek  $AB$  nie jest równoległy do żadnej z osi układu współrzędnych. Skorzystamy ze wzoru na długość odcinka o końcach, których współrzędne są dane.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - (-3))^2} = \sqrt{73}$$

### Przykład 2

Obliczymy pole trapezu o wierzchołkach  $A(0, 2)$ ,  $B(2, 6)$ ,  $C(8, 8)$ ,  $D(4, 0)$ .

Na podstawie rysunku możemy podejrzewać, że odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe. Zweryfikujmy to przypuszczenie wyznaczając równania prostych zawierających te odcinki.



Ponieważ prosta  $AB$  przecina oś  $Y$  w punkcie  $(0, 2)$ , więc jej równanie ma postać  $y = ax + 2$ .

Aby wyznaczyć współczynnik kierunkowy, podstawimy do równania  $y = ax + 2$  współrzędne punktu  $B(2, 6)$ , otrzymując równanie

$$6 = 2a + 2.$$

Zatem  $a = 2$ , czyli prosta  $AB$  ma równanie

$$y = 2x + 2.$$

Aby wyznaczyć równanie prostej  $CD$ , podstawimy współrzędne punktów  $C(8, 8)$  i  $D(4, 0)$  do równania  $y = cx + d$ , otrzymując układ równań

$$\begin{cases} 8 = 8c + d \\ 0 = 4c + d \end{cases}$$

Odejmując równania stronami, otrzymujemy

$$8 = 4c,$$

$$c = 2.$$

Mamy więc

$$\begin{cases} c = 2 \\ d = -8 \end{cases}$$

Zatem prosta  $CD$  ma równanie

$$y = 2x - 8.$$

Ponieważ równania prostych  $AB$  i  $CD$  mają równe współczynniki kierunkowe, więc odcinki  $AB$  i  $CD$  są równoległe.

W celu wyznaczenia pola trapezu obliczymy długości jego podstaw.

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 2)^2} = \\ = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|CD| = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(8 - 4)^2 + (8 - 0)^2} = \\ = \sqrt{(8 - 4)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Obliczymy teraz wysokość trapezu. Wyznamy równanie prostej  $AD$ , podstawiając do równania

$$y = kx + m$$

współrzędne punktów  $A(0, 2)$  i  $D(4, 0)$ . Ponieważ  $A$  leży na osi  $Y$ , więc  $m = 2$ . Po podstawieniu współrzędnych punktu  $D$ , otrzymujemy

$$0 = 4k + 2,$$

czyli  $k = -\frac{1}{2}$ . Stąd równanie prostej  $AD$  to

$$y = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Ponieważ iloczyn współczynników kierunkowych prostej  $AD$  i prostej  $AB$  jest równy  $-1$ , więc proste te są prostopadłe. Oznacza to, że odcinek  $AD$  jest wysokością trapezu.

$$|AD| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (2 - 0)^2} = \\ = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Zatem pole trapezu jest równe  $P = (2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 30$ .

### Przykład 3

Wyznamy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których długość odcinka o końcach  $A = (2m, m)$  i  $B = (-3m, -11m)$  jest równa 13.

Korzystając ze wzoru na długość odcinka możemy zanotować równanie

$$\sqrt{(-3m - 2m)^2 + (-11m - m)^2} = 13.$$

Ponieważ obie strony równania są nieujemne, możemy je podnieść do kwadratu otrzymując równanie równoważne  $(-3m - 2m)^2 + (-11m - m)^2 = 169$ , które przekształca się kolejno:

$$(-5m)^2 + (-12m)^2 = 169,$$

$$25m^2 + 144m^2 = 169,$$

$$169m^2 = 169,$$

$$m^2 = 1.$$

Zatem warunki zadania spełniają dwie liczby: 1 oraz  $-1$ .

## Słownik

### **oś odciętych**

jedna z osi liczbowych tworzących układ współrzędnych, zwykle pozioma, oznaczana przez  $X$ ; podając współrzędne punktów jako pierwszą podajemy współrzędną odczytaną z osi odciętych

### **oś rzędnych**

jedna z osi liczbowych tworzących układ współrzędnych, zwykle pionowa, oznaczana przez  $Y$ ; podając współrzędne punktów jako drugą podajemy współrzędną odczytaną z osi rzędnych

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Następnie na jej podstawie rozwiąż zadania.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DmYvvcgO6>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej długość odcinka w układzie współrzędnych.

---

## Polecenie 2

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Wyznacz równanie krzywej, która jest zbiorem wszystkich punktów odległych o 2 od punktu  $S$  o współrzędnych  $(3, 4)$ .

Ćwiczenie 7

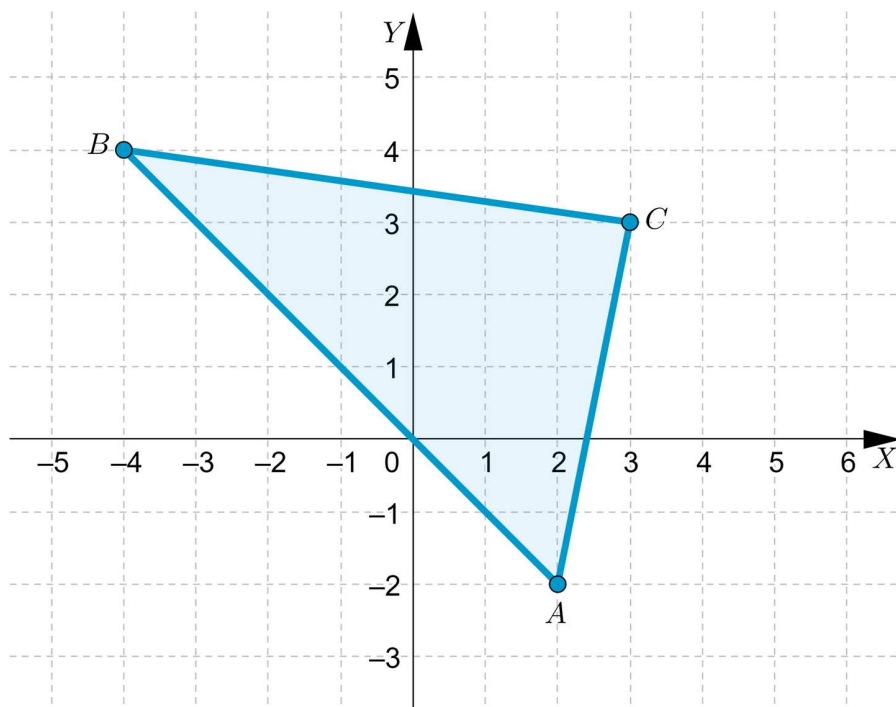


Oblicz obwód czworokąta ograniczonego prostymi o równaniach  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ,  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $y = -2x - 4$  oraz  $y = -x + 1$ .

### Ćwiczenie 8



Oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku poniżej.



### Ćwiczenie 9



Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których odcinek o końcach  $A = (m, -2m - 2)$  i  $B = (-3m, m + 2)$  ma długość 13.

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Sebastian Guz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Długość odcinka w układzie współrzędnych

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- oblicza długość odcinka mając dane współrzędne jego końców,
- analizuje przedstawiony rysunek i wykorzystuje wzór na długość odcinka do rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej,

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- metoda tekstu przewodniego;
- liga zadaniowa;
- dyskusja.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;

- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel wprowadza uczniów szczegółowo w temat lekcji: „Długość odcinka w układzie współrzędnych” i jej cele. Może posłużyć się wyświetloną na tablicy zawartością sekcji „Wprowadzenie”.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki. Prosi wybranego ucznia lub uczennicę o zapisywanie propozycji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w 2 grupach, metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie zapoznają się z animacją. Następnie na jej podstawie rozwiązują polecenie 2. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenie nr 1-2, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum krok po kroku.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Długość odcinka w układzie współrzędnych” i podsumowuje przebieg lekcji. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak ...”.

#### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie

mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

**Materiały pomocnicze:**

- [Długość odcinka. Środek odcinka](#)

**Wskazówki metodyczne:**

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Długość odcinka w układzie współrzędnych”.