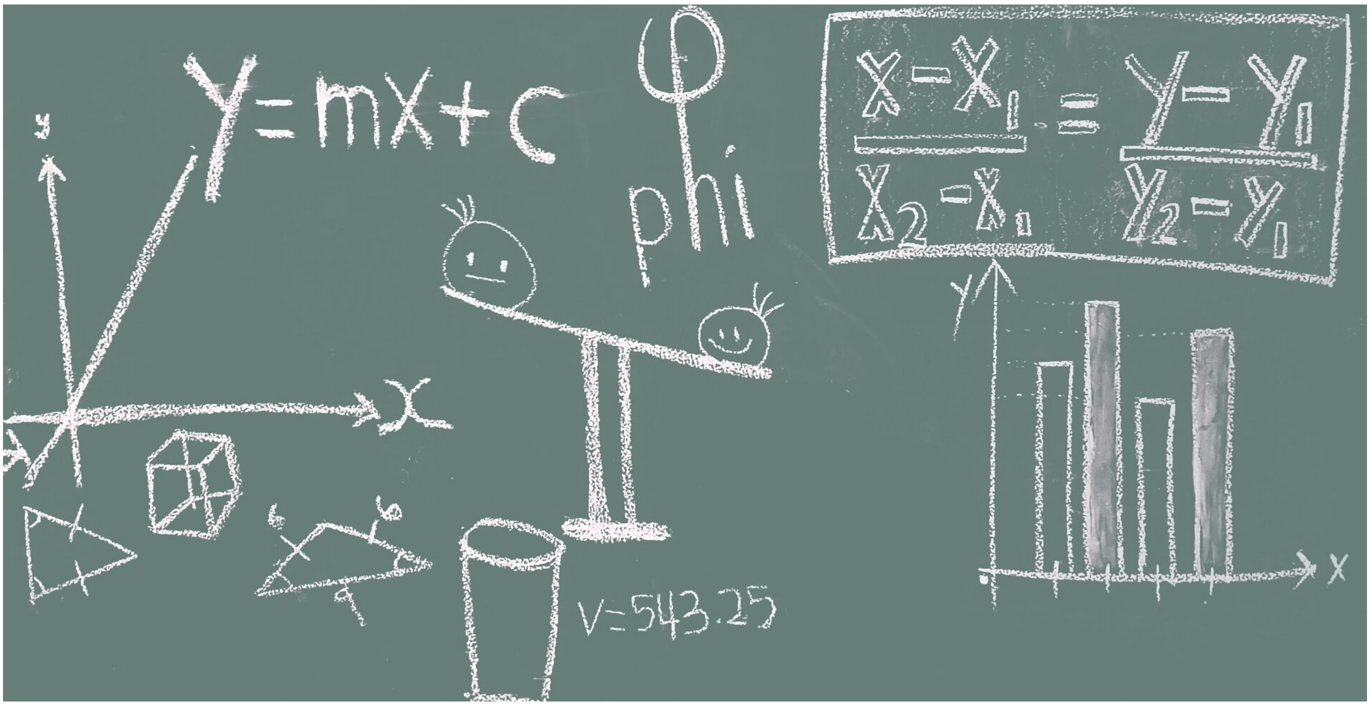
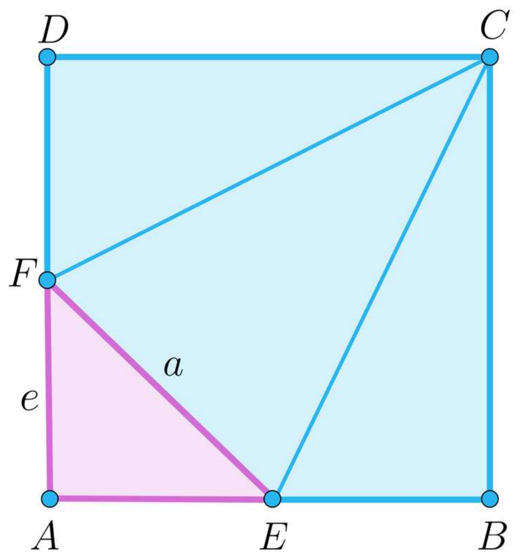
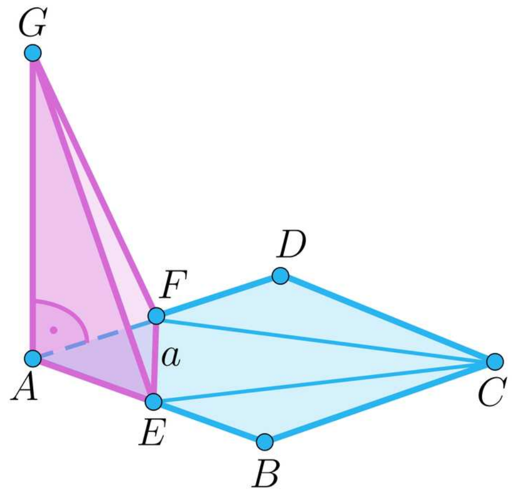


Pole powierzchni ostrosłupa trójkątnego

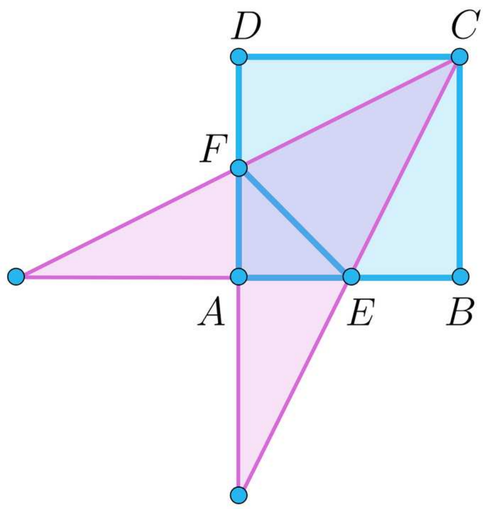
Czy siatka ostrosłupa może przybrać kształt prostokąta? Pomocna w rozwiązaniu może być kwadratowa kartka. Popatrzmy na rysunek poniżej.

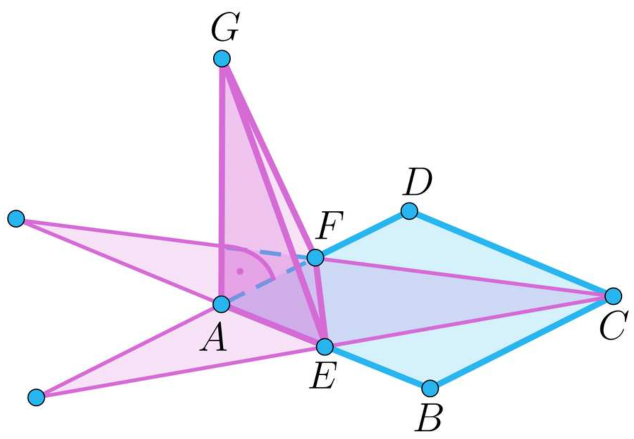




Tak jak na rysunku podzielmy kwadrat o wierzchołkach $ABCD$ odpowiednio odcinkami: EF, który łączy środki boków AB i AD oraz odcinkami EC oraz CF. Zauważmy, że utworzyła się siatka ostrosłupa trójkątnego, którego podstawą jest trójkąt AEF, wysokością jest odcinek $BC = DC$, tak jak na rysunku powyżej.

Po rozłożeniu siatki ostrosłupa, na rysunku poniżej, widzimy, że ściany boczne: trójkąt EFG jest przystający do EFC i trójkąt AFG jest przystający do trójkąta DFC i trójkąt AEG jest przystający do trójkąta EBC, trójkąt AEF jest podstawą ostrosłupa i jednocześnie częścią kwadratu $ABCD$. Zatem powierzchnia tego ostrosłupa trójkątnego jest równa powierzchni kwadratu.





Powyższy przykład jest potwierdzeniem wniosku mówiącego, że wystarczy zsumować pole podstawy oraz pola ścian bocznych, aby uzyskać pole powierzchni całkowitej ostrosłupa trójkątnego.

Zastanów się, czy podobną konstrukcję można przeprowadzić dla prostokąta, który nie jest kwadratem.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz pole powierzchni ostrosłupa trójkątnego.
> - Wykorzystasz związki trygonometryczne i znane twierdzenia do rozwiązywania zadań.

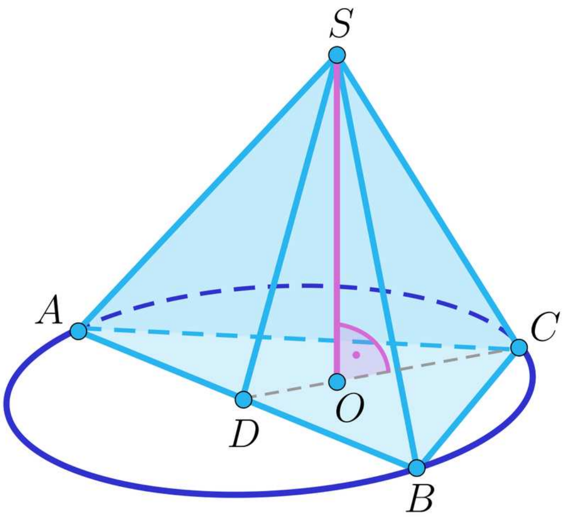
Przeczytaj

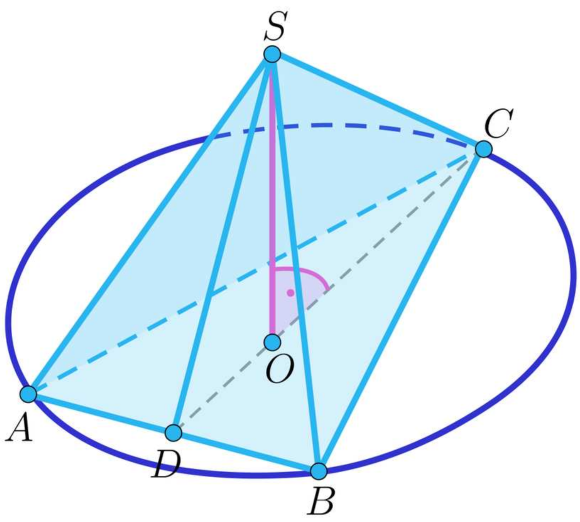
W tym materiale skupimy się na obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa trójkątnego.

Ostrosłup trójkątny, to taki ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt. Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami o wspólnym wierzchołku zwanym wierzchołkiem ostrosłupa. Ostrosłup trójkątny jest inaczej nazywany czworościanem.

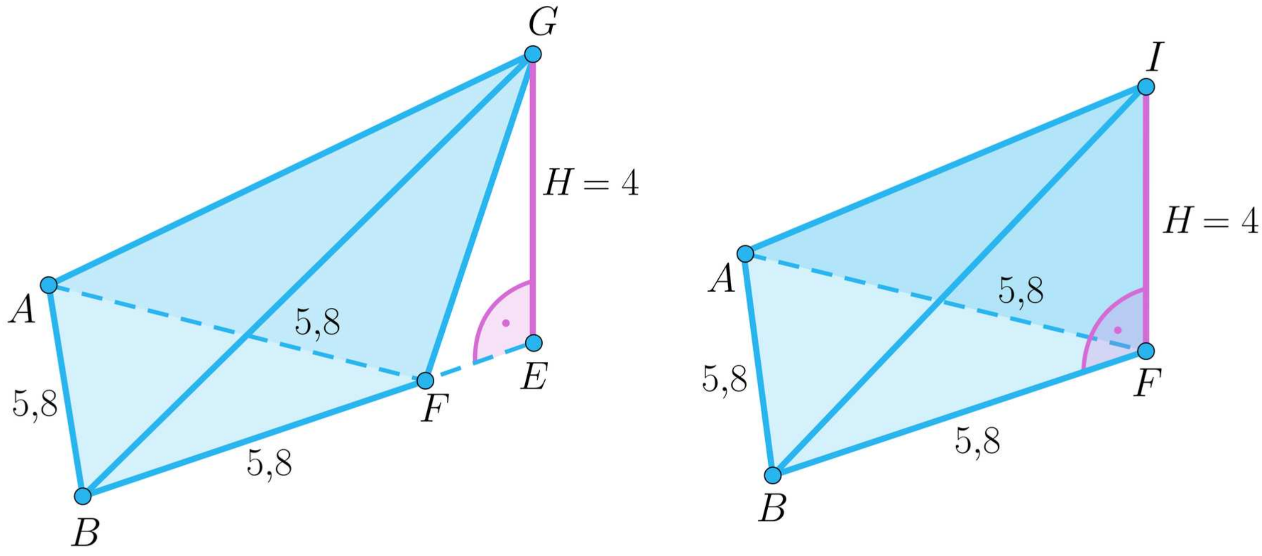
Wśród ostrosłupów możemy wyróżnić ostrosłupy **proste** oraz **pochyłe**.

Ostrosłup nazywamy **ostrosłupem trójkątnym prostym**, jeśli spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie będącym jego podstawą. Ostrosłup prosty ma wszystkie krawędzie boczne równej długości.





Ostrosłup trójkątny pochyły nie spełnia opisanej powyżej własności, często spodek wysokości ostrosłupa znajduje się poza podstawą ostrosłupa.



Jeśli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa tworzą z podstawą kąty równej miary, to spodek wysokości jest jednakowo oddalony od wierzchołków podstawy jest, więc środkiem okręgu opisanego na podstawie.

Jeśli wszystkie ściany boczne tworzą z podstawą kąty równej miary, to spodek wysokości jest jednakowo oddalony od krawędzi podstawy jest, więc środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

Pole powierzchni ostrosłupa to suma pola podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P = P_p + P_b$$

P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej, czyli suma wszystkich pól ścian bocznych ostrosłupa

Dla czworościanu foremnego o krawędzi a:

Pole powierzchni $P = a^2\sqrt{3}$.

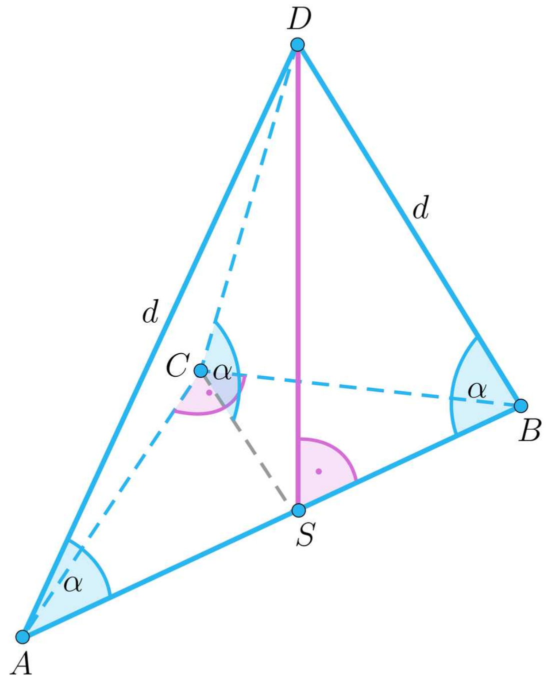
Przykład 1

Podstawą ostrosłupa prostego jest trójkąt prostokątny równoramienny, którego ramię ma długość $6\sqrt{2}$. Wiedząc, że wysokość ostrosłupa ma długość 8 cm, oblicz długości krawędzi bocznych oraz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wiemy, że ostrosłup jest prosty, więc spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie. W tym przypadku jest to środek przeciwprostokątnej, bo podstawą jest trójkąt prostokątny.

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Wiemy, że $|AC| = |BC| = 6\sqrt{2}$ są długościami ramion trójkąta prostokątnego w podstawie, więc $|AB| = 12$ oraz długość wysokości ostrosłupa $|SD| = 8$, $|AS| = \frac{1}{2}|AB| = 6$.

Zauważmy, że $|AD| = |BD| = |CD|$, ponieważ ostrosłup jest prosty. Oznaczmy $|AD| = d$.

Punkt S jest spodkiem wysokości ostrosłupa, odcinek SD jest prostopadły do AS i SB i SC. Długość krawędzi bocznej obliczymy korzystając z trójkąta ASD i twierdzenia Pitagorasa

$|AS|^2 + |SD|^2 = |AD|^2$

$6^2 + 8^2 = d^2$

$d^2 = 100$

$d = 10$

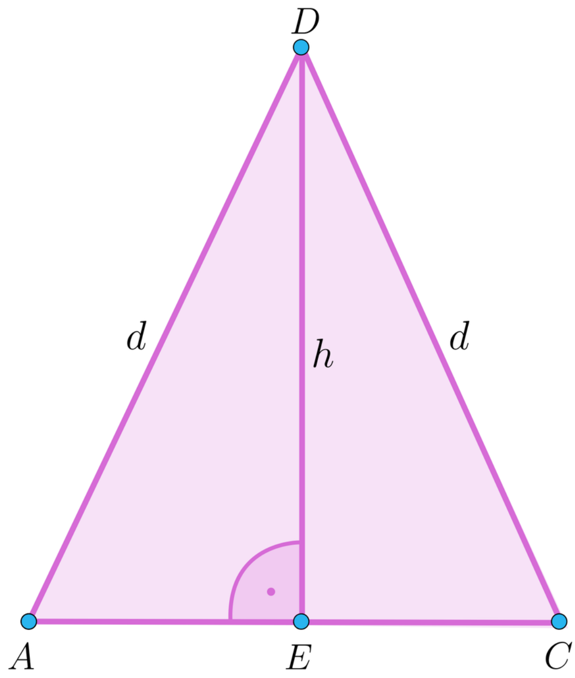
Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36$

Mamy już pole podstawy, obliczymy pole powierzchni bocznej, która jest sumą pól ścian bocznych ostrosłupa. W tym celu obliczymy pola odpowiednio trójkątów ABD, ACD i CBD.

$P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |DS| = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$

Trójkąty ACD i CBD są przystające oraz równoramienne.



Korzystając z rysunku pomocniczego obliczymy długość h wysokości trójkąta ACD.

Odcinek AE jest połową AC i jego długość wynosi $|AE| = 3\sqrt{2}$.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AED mamy:

$|AE|^2 + |ED|^2 = |AD|^2$

$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + h^2 = 10^2$

$h^2 = 100 - 18$

$h = \sqrt{82}$

$P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} = 6\sqrt{41}$

Obliczymy pole powierzchni bocznej:

$P_b = P_{ABD} + P_{CBD} + P_{ACD} = 48 + 2 \cdot 6\sqrt{41} = 48 + 12\sqrt{41}$

Zatem pole powierzchni ostrosłupa:

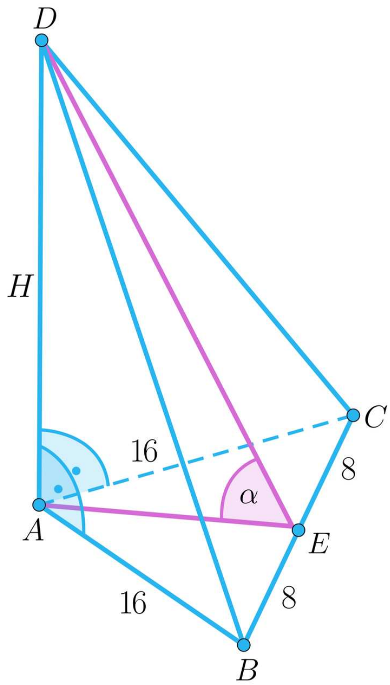
$P = P_p + P_b = 36 + 48 + 12\sqrt{41} = 84 + 12\sqrt{41} = 12\left(7 + \sqrt{41}\right)$

Przykład 2

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 16. Dwie ściany boczne są prostopadłe do podstawy, a trzecia tworzy z podstawą kąt o mierze 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa $ABCD$.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Oznaczymy długość wysokości ostrosłupa przez H oraz kąt $\alpha = 60^\circ$.

W trójkącie równobocznym ABC, odcinek AE jest jego wysokością, więc

$|AE| = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$

Obliczamy pole podstawy:

$P_p = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$

W celu obliczenia powierzchni ścian bocznych wyznaczymy długość wysokości H oraz długość odcinka ED, który jest wysokością trójkąta BCD.

Z trójkąta AED, który jest prostokątny mamy:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{|AE|}$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{8\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = \frac{H}{8\sqrt{3}}$

$H = 24$

oraz

$\cos \alpha = \frac{|AE|}{|ED|}$

$\cos 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{|ED|}$

$\frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{|ED|}$

$|ED| = 16\sqrt{3}$

Obliczamy pola ścian bocznych:

$P_{ABD} = P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 24 = 192$

oraz

$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16\sqrt{3} = 128\sqrt{3}$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:

$P = P_p + P_b = 64\sqrt{3} + 2 \cdot 192 + 128\sqrt{3} = 384 + 192\sqrt{3}$

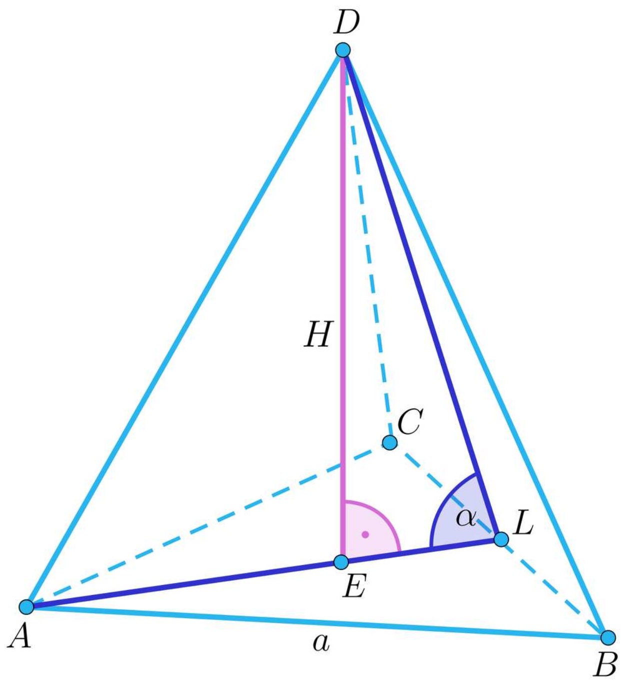
Odpowiedź: $P = 384 + 192\sqrt{3}$

Przykład 3

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem α. Wysokość ostrosłupa jest równa H. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Wiemy, że w podstawie ostrosłupa prawidłowego jest trójkąt równoboczny, więc odcinek EL ma długość:

$|EL| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Z trójkąta ELD mamy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{|EL|} = \frac{H}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}, \frac{a\sqrt{3}}{6} = H \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, więc $a = 2\sqrt{3} \cdot H \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot H^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{4} = 3\sqrt{3} \cdot H^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha$

W celu obliczenia powierzchni ścian bocznych wyznaczymy długość wysokości DL, który jest wysokością trójkąta BCD.

Z trójkąta ELD mamy:

$\sin\alpha = \frac{H}{|DL|}$, stąd $|DL| = \frac{H}{\sin\alpha}$

Mamy już pole podstawy, obliczymy pole powierzchni bocznej, która jest sumą pól ścian bocznych ostrosłupa. W tym celu obliczymy pole trójkąta BCD.

$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DL| = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot H \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{H}{\sin\alpha} = \frac{H^2\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$

$P_b = 3 \cdot \frac{H^2\sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{3} \cdot H^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$

Zatem pole powierzchni ostrosłupa:

> $P = P_p + P_b = 3\sqrt{3} \cdot H^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{3\sqrt{3} \cdot H^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} = 3\sqrt{3} \cdot H^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$

Słownik

> **ostrosłup prawidłowy**
>
> ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na jego podstawie

> **spodek wysokości bryły**
>
> rzut prostokątny wierzchołka bryły na płaszczyznę podstawy

> **ostrosłup prawidłowy trójkątny**
>
> ostrosłup prawidłowy, którego podstawą jest trójkąt równoboczny

> **czworościan foremny**
>
> ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie cztery ściany są trójkątami równobocznymi

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją 3D. Spróbuj samodzielnie rozwiązać podane zadania. Sprawdź poprawność Twoich rozwiązań z rozwiązaniami przedstawionymi w animacji. Czy podane wskazówki okazały się przydatne?

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1ASYV23W

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego pola powierzchni ostrosłupa trójkątnego.

Polecenie 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości $a = 20$ i krawędzi bocznej $b = 26$.

Polecenie 3

Oblicz, jaką częścią powierzchni sześcianu o boku długości b jest pole powierzchni całkowitej ostrosłupa trójkątnego, którego trzy krawędzie o długości b są parami prostopadłe?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny o podstawie $|AB| = b$ i kącie α pomiędzy ramionami. Krawędź CD jest wysokością ostrosłupa, a kąt nachylenia ściany ABD do podstawy ostrosłupa jest równy β. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni ostrosłupa trójkątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zakres rozszerzony. Uczeń:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza pole powierzchni ostrosłupa trójkątnego;
- stosuje znane twierdzenia w obliczaniu pola powierzchni ostrosłupa trójkątnego;
- wykorzystuje związki między odcinkami ostrosłupa trójkątnego w celu budowania rozwiązania zadania;
- wykorzystuje związki trygonometrii w obliczaniu pole powierzchni ostrosłupa trójkątnego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- pokaz multimedialny;
- analiza pomysłów;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca induwidualna;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- przykłady brył ostrosłupa trójkątnego, modele rzeczywiste lub wirtualne;
- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów i nauczyciela;
- projektor multimedialny;

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel zadaje pytania dotyczące własności ostrosłupów w szczególności ostrosłupa trójkątnego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie własności ostrosłupa trójkątnego prostego oraz pochyłego.
2. Podział klasy na grupy. Uczniowie w grupach analizują poszczególne przykłady obliczania pola powierzchni ostrosłupa trójkątnego. Wspólnie wyjaśniają sposób rozwiązania opisany w przykładach.
3. Uczniowie także w grupach lub indywidualnie zapoznają się z animacją 3D.
4. Nauczyciel poleca, aby uczniowie samodzielnie rozwiązali podane w Animacji 3D zadania oraz zadania z polecenia 2 i 3.
5. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne w celu utrwalenia i sprawdzenia nabytych umiejętności.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca uczniom wykonać te ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane podczas lekcji.

Materiały pomocnicze:

Ostrosłup i jego właściwości

Wskazówki metodyczne:

W sytuacji, gdy nauczyciel przewiduje, że nie uda mu się zrealizować wszystkich zaplanowanych zagadnień podczas jednej lekcji, może tak zorganizować lekcję, żeby animację 3D wykorzystać jako element pracy domowej. Animacje 3D można również wykorzystać w lekcji „ Pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego trójkątnego” jako kolejny przykład zadania obliczeniowego.